BULLETIN DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
Série des sciences math., astr. et phys. — Vol. XXIV, No. 5, 1976

MATHEMATIK
(KOMMUTATIVE RINGE)

Ein Vorbereitungssatz für Ideale in algebraischen Potenzreihenringen

von

G. PFISTER und M. ROCZEN

Vorgelegt von A. MOSTOWSKI am 15. Mai 1975

Summary. We prove the general preparation theorem of Weierstraß—Grauert for ideals in the case of algebraic power series.

Sei k' ein algebraisch abgeschlossener Körper, $T=(T_1, ..., T_m)$ ein m-Tupel von Unbestimmten. In [2] hat Grauert für den Körper k der komplexen Zahlen und den Ring $k\{T\}$ der konvergenten Potenzreihen eine weitgehende Verallgemeinerung des klassischen Vorbereitungssatzes von Weierstraß bewiesen. In [7] hat einer der Autoren das Analogon dieses Satzes für formale Potenzreihenalgebren über einem beliebigen Körper bewiesen sowie für ihre Unteralgebren, die einer gewissen Zusatzbedingung („Divisionsformel") genügen. Wir wollen hier diesen Satz für den Ring $k\langle T\rangle$ der algebraischen Potenzreihen über k beweisen. Eine Teillösung dieses Problems haben wir bereits in [6] angegeben. Sie basiert auf einer Approximationsmethode, die nur im dort behandelten Falle $m\leqslant 3$ anwendbar war. Inzwischen ist von Mostowski in [5] ein „verscherfter Artinscher Approximationssatz" bewiesen wordene, der sich in modifizierter Form auf das Problem der Algebraisierung der Divisionsformel anwenden läßt. Damit ist der Grauertsche Vorbereitungssatz für algebraische Potenzreihen über k (mit beliebiger Charakteristik) bewiesen.

Wir bemerken, daß der Mostowskische Approximationssatz nur für algebraische Potenzreihenalgebren über den komplexen Zahlen (bzw. allgemeiner über Körpern der Charakteristik 0) gültig ist, nicht jedoch für die entsprechende Algebra der konvergenten Potenzreihen (vgl. [3]). Die hier verwendete Beweismethode ist demnach nur für den algebraischen Fall geeignet.

1. Der Approximationssatz von T. Mostowski. In [5] hat T. Mostowski ein von Artin in [1] gestelltes Problem gelöst.

SATZ 1 (Mostowski). *Seien* $(X_1, ..., X_n)=X$, $(Y_1, ..., Y_N)=Y$ *Unbestimmte und* $F=(F_1, ..., F_m)$ *ein System von m Polynomen aus* $C[X, Y]$, C *der Körper der komplexen Zahlen. Sei c eine natürliche Zahl. Ist*

$$F(X, \bar{y}(X))=0 \quad \textit{für} \quad \bar{y}=(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_N), \quad \bar{y}_i \in C[[x_{j_1(i)}, ..., x_{j_{r_i}(i)}]]$$
$$\textit{mit,} \quad j_1(i), ..., j_r(i) \in \{1, ..., n\},$$

so existieren algebraische Potenzreihen

$$y_i \in C\langle X_{j_1(i)}, \ldots, X_{j_{r_i}(i)}\rangle, \quad y=(y_1, \ldots, y_N), \quad \textit{mit} \quad F(X, y(X))=0$$

und

$$y_i \equiv \bar{y}_i \bmod X^c.$$

Für unsere Situation benötigen wir eine ewas allgemeinere Fassung.

Korollar 1. *Seien X, Y wie in Satz 1, k ein Körper der Charakteristik 0 und $F=(F_1, \ldots, F_m)$ ein System von Polynomen aus $k\langle X\rangle [Y]$. Sei c eine natürliche Zahl. Ist*

$$F(X, \bar{y}(X))=0$$

für

$$\bar{y}=(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N), \quad \bar{y}_i \in k[[X_{j_1(i)}, \ldots, X_{j_{r_i}(i)}]], \quad j_1(i), \ldots, j_r(i) \in \{1, \ldots, n\},$$

so existieren algebraische Potenzreihen

$$y_i \in k'\langle X_{j_1(i)}, \ldots, X_{j_{r_i}(i)}\rangle, \quad y=(y_1, \ldots, y_N),$$

k' eine endliche Erweiterung von k mit

$$F(X, y(X))=0$$

und

$$y_i \equiv \bar{y}_i \bmod X^c.$$

Beweis. Zunächst können wir o.B.d.A. annehmen, daß die F_i aus $k[X, Y]$ sind. Sei M die Menge der Koeffizienten der $\bar{y}_i$ und der F_i aus k. Sei k_1 der algebraische Abschluß von $Q(M)$ (Q der Körper der rationalen Zahlen). Dann sind die F_i und die $\bar{y}_i$ über k_1 definiert. Da M abzählbar ist, läßt sich k_1 in C einbetten. Es gibt also nach Satz 1 eine algebraische Lösung $y=(y_1, \ldots, y_N)$ der Gleichung

$$F(X, Y)=0, \quad y_i \in C\langle X_{j_1(i)}, \ldots, X_{j_{r_i}(i)}\rangle$$

mit $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod X^c$. Nun sind, da die y_i algebraisch sind, diese schon über einer Erweiterung vom endlichen Typ über k_1 definiert, d.h. die y_i sind über $(k_1[T_1, \ldots, T_r, S]/F]_G$ definiert mit einem in S separablen Polynom $F(T_1, \ldots, T_r, S)$. Nun wählen wir $t_1, \ldots, t_r \in k_1$, so daß für eine Lösung s von $F(t_1, \ldots, t_r, S)=0$ $G(t_1, \ldots, t_r, s) \neq 0$ ist. Dann sind die $\tilde{y}_i = y_i(t_1, \ldots, t_r, X)$ über k_1 definiert. Da die F_i und $\bar{y}_i$ von vornherein über k_1 definiert waren, ist $F(X, \tilde{y})=0$ und $\tilde{y}_i \equiv \bar{y}_i \bmod X^c$. Die $\tilde{y}_i$ sind also aus $k_1\langle X_{j_1(i)}, \ldots, X_{j_{r_i}(i)}\rangle$. Damit sind sie aber schon über einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper k^* von $Q(M)$ definiert und damit über einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper k' von k.

2. Der Vorbereitungssatz. Nach Grauert [2] versteht man unter einem reduzierenden System s ein m-Tupel $(s_1, \ldots, s_m)$ von Abbildungen s_i gewisser Teilmengen von $(N \cup \{\infty\})^{i-1}$ in $N \cup \{\infty\}$ (N bezeichnet die natürlichen Zahlen), so daß

$$s_1 = \text{konstant},$$

$$s_i = s_i(v_1, \ldots, v_{i-1}) \quad \text{definiert für} \quad 0 \leqslant v_1 < s_1, \ldots, \quad 0 \leqslant v_{i-1} < s_{i-1}(v_1, \ldots, v_{i-1})$$

ist und überdies gilt:
Ist $s_{i-1}(v_1, \ldots, v_{i-2})=\infty$, so
Der Multiindex $v=(v_1, \ldots, v_i)$
tionsbereich von s gehört.
Ist überdies $i \leqslant m$ und $s_{i+1}(v_1$
setzen $v^*=(v_1, \ldots, v_i, s_{i+1}(v))$.
Es gibt offenbar nur endlich vie
male Potenzreihe über k, so nen
reduziertem v verschwinden. Ei
reihen über k heißt Divisions
mit $0(r_v) > v^*$ sind(0 bezeichn
index zu dem ein von Null vers
alle r_v reduziert, so heißt L
gilt nun

Satz 2 (Divisionsformel).
jedes $f \in k[[T]]$ eine eindeutige

mit einer bezüglich s reduziert

$Q_v \in k[[T_{i+1}$

Satz 3 (Vorbereitungssatz)
die Aussage von Satz 2 gilt (d.
zu jedem Ideal J von A ein red
allgemeinem linearen Koordinate
gendensystem von Weierstraß
den durch Satz 2 eindeutig best

3. Beweis der Divisionsform

1. Fall (Char $k=0$): Nach
gilt: Sei $f \in k\langle T\rangle$ und $\sum_v Q_v w_v$
für $v=(v_1, \ldots, v_i)$ so sind alle
Die Bezeichnungen vom vor
Divisionssystem $L \subseteq k\langle T\rangle$ zu f
unmittalbar aus Korollar 1.

2. Fall (Char $k \neq 0$): Sei W de
Surjektion. Wir wollen zeigen,
$=\sum_v Q_v w_v + r$ mit wie in Satz 2
Wir wählen $\bar{w}_v \in j^{-1}(w_v)$ mit
system $\bar{L}$ in $W\langle T\rangle$, also nach
$\bar{f}=\sum_v \bar{Q}_v \bar{w}_v + \bar{r}$ für ein fixiertes $\bar{f}$

ist und überdies gilt:
Ist $s_{i-1}(v_1, ..., v_{i-2})=\infty$, so ist $s_i(v_1, ..., v_{i-1})=\infty$ für alle $v_{i-1} \in N$.
Der Multiindex $v=(v_1, ..., v_i)$ $(i \leqslant m)$ heißt reduziert bezüglich s, falls er zum Definitionsbereich von s gehört.
Ist überdies $i \leqslant m$ und $s_{i+1}(v_1, ..., v_i) \neq \infty$, so nennen wir v endlich bezüglich s und setzen $v^*=(v_i, ..., v_i, s_{i+1}(v))$.
Es gibt offenbar nur endlich viele Multiindizes vom Typ v^*. Ist $f=\sum a_v T^v$ eine formale Potenzreihe über k, so nennen wir sie bezüglich s reduziert, falls alle a_v mit nicht reduziertem v verschwinden. Eine Menge $L=\{w_v, v$ endlich zu $s\}$ von formalen Potenzreihen über k heißt Divisionssystem zu s, falls $w_v=T^{v^*}+r_v$ formale Potenzreihen mit $0(r_v)>v^*$ sind(0 bezeichnet den in lexikographischer Ordung kleinsten Multiindex zu dem ein von Null verschiedener Term der Potenzreihe gehört). Sind überdies alle r_v reduziert, so heißt L System von Weierstraßpolynomen zu s. Nach [7] gilt nun

SATZ 2 (Divisionsformel). *Sei $L=\{w_v\}$ ein zu s gehöriges Divisionssystem, so hat jedes $f \in k[[T]]$ eine eindeutige Darstellung*

$$f=\sum_v Q_v w_v+r$$

mit einer bezüglich s reduzierten Potenzreihe r und

$$Q_v \in k[[T_{i+1}, ..., T_m]] \quad \text{für} \quad v=(v_1, ..., v_i).$$

SATZ 3 (Vorbereitungssatz). *Sei A eine k-Algebra, $k[T] \subseteq A \subseteq k[[T]]$, für die die Aussage von Satz 2 gilt (d.h. mit f, $W_v \in A$ folgt Q_v und r aus A). Dann gehört zu jedem Ideal J von A ein reduzierendes System s, so daß J nach einer hinreichend allgemeinem linearen Koordinatentransformation ein durch s eindeutig bestimmtes Ezregendensystem von Weierstraß polynomen besitzt mit $red(J)=0$ ($red(f)$ bezeichnet den durch Satz 2 eindeutig bestimmten „Rest" r bei der Division durch L).*

3. Beweis der Divisionsformel für $k\langle T\rangle$.

1. Fall (Char $k=0$): Nach [6] Abschnitt 4 genügt es zu zeigen, daß folgendes gilt: Sei $f \in k\langle T\rangle$ und $\sum_v Q_v w_{v=f}$ mit formalen Potenzreihen $Q_v \in k[[T_{i+1}, ..., T_m]]$ für $v=(v_1, ..., v_i)$ so sind alle Q_v algebraische Potenzreihen.

Die Bezeichnungen vom vorigen Abschnitt werden beibehalten, es ist stets ein Divisionssystem $L \subseteq k\langle T\rangle$ zu fixiertem s vorgegeben. Diese Aussage folgt jedoch unmittalbar aus Korollar 1.

2. Fall (Char $k \neq 0$): Sei W der Cohenring von k, j: $W\langle T\rangle \to k\langle T\rangle$ die kanonische Surjektion. Wir wollen zeigen, daß $f \in k\langle T\rangle$ eine eindeutige Darstellung $f = \sum_v Q_v w_v+r$ mit wie in Satz 2 normierten Q_v und r besitzt.

Wir wählen $\bar{w}_v \in j^{-1}(w_v)$ mit Anfangskoeffizienten 1 und erhalten ein Divisionssystem $\bar{L}$ in $W\langle T\rangle$, also nach [7], Satz 2 eine eindeutige normierte Darstellung $\bar{f}=\sum_v \bar{Q}_v \bar{w}_v+\bar{r}$ für ein fixiertes $\bar{f} \in j^{-1}(f)$, wobei die $\bar{Q}_v$ und $\bar{r}$ formale Potenzreihen über W sind. Nun ist $W\langle T\rangle \subset K\langle T\rangle$, wobei K der algebraische Abschluß des Quotientenkörpers von W ist, char $K=0$. Damit sind aber nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 2 und Fall 1 $\bar{Q}_v$, $\bar{r} \in K\langle T\rangle$. Damit sind sie aber auch aus $W\langle T\rangle$, also $j(\bar{Q}_v)=Q_v$, $j(\bar{r})=r \in k\langle T\rangle$, q.e.d.

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN, SEKTION MATHEMATIK, 108 BERLIN, UNTER DEN LINDEN 6 (DDR)

LITERATUR

[1] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Inventiones Math., **5** (1968), 277—291.

[2] H. Grauert, *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen*, ibid., **15** (1972), 171—198.

[3] A. M. Gabrielov, *O formalnych sootnoscheniach meschdu analititscheskimi funkciami*, Funkcionalnyj analis i ego priloschenia, **5** (1971), 64—65.

[4] H. Kurke, G. Pfister, M. Roczen, *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*, Berlin, 1975.

[5] T. Mostowski, *A decision procedure for rings of power-series of several variables and applications* [erscheint demnächst].

[6] G. Pfister, M. Roczen, *Zum Satz von Weierstraß—Grauert für algebraische Potenzreihen* [erscheint demnächst].

[7] M. Roczen, *Eine Bemerkung zum Vorbereitungssatz von Weierstraß—Grauert*, Revue Roumaine de Mathématiques, **19** (1974), 1243—1250.

Г. Пфистер, М. Рочен, **Подготовительная теорема для иддалов для случая алгебраических степенных рядов**

Содержание. В настоящей работе приводится доказательство общей подготовительной теоремы Вейерштрасса—Грауэрта для идеалов для случая алгебраических степенных рядов.