Série des sciences math., astr.
et phys. — Vol. XXV, No. 11, 1977

MATHEMATIK
(KOMMUTATIVE RINGE UND ALGEBREN)

Schlechte Henselsche Ringe

von

Gerhard PFISTER

Vorgelegt von B. BOJARSKI am 20. Dezember 1976

Summary. Some examples of local henselian rings with "bad" properties are given: Discrete valuation rings, algebraically closed in its completion and not excellent; discrete valuation rings of characteristic 0 having the property of approximation but a "very small" automorphism group; two-dimensional regular local henselian rings, algebraically closed in its completion, japanese but not universal japanese.

Ausgangspunkt für die Untersuchungen in diesem Artikel ist der folgende Satz:

Sei A ein reduzierter lokaler henselscher Ring. Wenn A universell japanisch ist, dann ist A in der Komplettierung $\hat{A}$ algebraisch abgeschlossen.

Diesen Satz findet man z.B. in [4], Seite 71.

Hier soll nun gezeigt werden, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht richtig ist. Angeregt wurden diese Untersuchungen durch die Frage, *ob ein lokaler henselscher Ring A, der in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen ist, die Approximationseigenschaft hat* (vgl. die diesbezüglichen Definitionen in [4], Seite 134, [5] oder [6]). Die Frage wird damit auch negativ beantwortet.

Anschließend wird die Automorphismengruppe henselscher diskreter Bewertungsringe der Charakteristik 0 betrachtet (diese haben stets die Approximationseigenschaft). Ausgangspunkt für diese Untersuchungen war die Frage, *ob man für lokale henselsche Ringe mit Approximationseigenschaft ausgehend von der Komplettierung eine einheitliche Theorie der Automorphismengruppe machen kann.* Während nun bekanntlich die Automorphismengruppe eines kompletten regulären lokalen Ringes sehr "groß" ist, zeigen Beispiele, daß es exzellente henselsche diskrete Bewertungsringe über dem Körper **C** der komplexen Zahlen gibt, die nur die Identität als Automorphismus besitzen. Damit muß man auch diese Frage negativ beantworten.

1. Henselsche Ringe, die nicht universell japanisch sind. Wir wollen zunächst einige Hilfssätze voranstellen, die wir für die Konstruktion der Beispiele benötigen.

1.1. Lemma. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung p, sei $R_1 \supseteq R$ ein über R unverzweigter diskreter Bewertungsring (d. h. R_1 hat auch die Bewertung p).*

Sei $(w_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $\hat{R}_1$. Dann ist der algebraische Abschluß $\bar{R}$ von $R[(w_i)_{i\in I}]$ in R_1 ein henselscher diskreter Bewertungsring mit Bewertung p.

Der Beweis ist trivial.

1.2. Lemma. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung p. Sei Y eine Unbestimmte und seien $(w_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $R[[Y]]$. Dann ist der algebraische Abschluß B von $R[Y, (w_i)_{i\in I}]$ in $\hat{R}[[Y]]$ ein noetherscher regulärer henselscher lokaler Ring der Dimension 2 mit Maximalideal (p, Y).*

Der Beweis ist nicht schwierig. Man kann ihn aber auch aus einem allgemeinerem Resultat von Valabrega (vgl. [7]) ableiten. Wir wollen deshalb hier nicht weiter darauf eingehen.

1.3. Beispiel für einen henselschen diskreten Bewertungsring, der seinen Restklassenkörper enthält, in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen ist, aber nicht exzellent ist.

Sei K ein beliebiger Körper der Charakteristik $p>0$ und seien $g_1, \ldots, g_p \in K[[Y]]$ so gewählt, daß $Y, g_1, \ldots, g_p$ in $K[[Y]]$ algebraisch unabhängig über K sind. Sei $g = g_1^p + Yg_2^p + \ldots + Y^{p-1} g_p^p$. Sei R der algebraische Abschluß von $K[Y, g]$ in $K[[Y]]$, dann liefert R das gesuchte Beispiel. Nach 1.1 ist R henselscher diskreter Bewertungsring, der seinen Restklassenkörper K enthält und in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen ist. Wir müssen zeigen, daß R nicht exzellent ist. Wäre nun R exzellent, dann hätte R die Approximationseigenschaft (vgl. dazu z.B. [1], [4], Seite 140, [5] oder [6]: Ein lokaler Ring A, $\mathfrak{m}$ hat die Approximationseigenschaft, wenn stets folgendes gilt:

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein n-Tupel von Variablen, $n \geq 1$, und $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in A[X]$ gegeben. Wenn die Gleichung $f=0$ eine formale Lösung hat, d.h. wenn es $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, $\bar{x}_i \in \hat{A}$, gibt mit $f(\bar{x})=0$, dann existiert für vorgegebenes $c>0$ eine Lösung $x_c = (x_{c,1}, \ldots, x_{c,n})$, $x_{c,i} \in A$, von $f=0$ mit $x_c \equiv \bar{x} \bmod \mathfrak{m}^c$.).

Nun betrachten wit über R die folgende Gleichung:

$$X_1^p + YX_2^p + \ldots + Y^{p-1} X_p^p = g.$$

Diese Gleichung hat eine formale Lösung aus $\hat{R} = K[[Y]]$, nämlich die Lösung $X_i = g_i$, $i = 1, \ldots, p$. Wegen ihrere algebraischen Unbhängigkeit sind die $g_i \notin R$ (es ist ja nach Konstruktion von R der Transzendensgrad von R über K gleich 2; wären die $g_i \in R$, müßte R mindestens den Transzendensgrad $p+1$ über K haben).

Andererseits sind die Lösungen der obigen Gleichung eindeutig bestimmt, d.h. es gibt genau eine Lösung (weil K die Chrakteristik p hat, würde eine weitere Lösung der obigen Gleichung eine nichttriviale Lösung der Gleichung $X_1^p + YX_2^p + \ldots + Y^{p-1} X_p^p = 0$ in $K[[Y]]$ liefern; letztere hat aber nur die triviale Lösung, wie man leicht nachrechnet). Da nun die $g_i \notin R$ sind, hat die obige Gleichung zwar eine formale Lösung, jedoch keine Lösung aus R. Dann kann R nicht die Approximationseigenschaft haben, also wegen [4], Seite 136, bzw. [6] nicht exzellent sein.

1.4. Beispiel für einen zweidimensionalen regulären lokalen henselschen Ring A, der in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen ist, japanisch und

Sei K ein beliebiger Körper der Charakteristik $p>0$. Sei C ein kompletter diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0 mit Restklassenkörper K (z.B. der Cohenring von K). Wir wählen ein $g \in K[[Y]]$ wie im Beispiel 1.3. Dieses g liften wit auf $C[[Y]]$ zu G. Sei A der algebraische Abschluß von $C[Y, G]$ in $C[[Y]]$. Nach 1.2 ist A regulär, noethersch, henselsch und zweidimensional. Da A die Charakteristik 0 hat, ist A japanisch (vgl. [3] IV, 1 Seite 216). Da A regulär ist, ist A universell catenaire (vgl. [3] IV, 2 Seite 99). Nach 1.3 ist $A/\mathfrak{m}_C A$ nicht universell japanisch (für diskrete Bewertungsringe ist ja exzellent gleichbedeutend mit universell japanisch, [3] IV 2 Seite 198, 215). Damit kann aber nach Definition A nicht universell japanisch sein.

1.5. Bemerkung. Sei A ein regulärer lokaler Ring der Dimension 2, A sei in der Komplettierung $\hat{A}$ algebraisch abgeschlossen, dann gilt:

(1) Wenn der Restklassenkörper von A die Charakteristik 0 hat, ist A exzellent.

(2) Wenn A die Charakteristik 0 hat, ist A exzellent genau dann, wenn A universell japanisch ist.

Der Beweis ist nicht schwierig. Er basiert auf der Tatsache, daß unter den obigen Voraussetzungen $f \in A$ irreduzibel ist, genau dann, wenn $f \in \hat{A}$ irreduzibel ist. Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen. Die Bemerkung soll nur helfen, das letzte Beispiel einzuordnen.

2. Zur Automorphismengruppe henselscher diskreter Bewertungsringe. Wir wollen in diesem Abschnitt durch einige Beispiele zeigen, daß exzellente henselsche diskrete Bewertungsringe der Charakteristik 0, d.h. Ringe mit Approximationseigenschaft, sehr "unterschiedliche" Automorphismengruppen haben können.

Grundlage für unsere Untersuchungen ist das folgende Resultat von Ax (vgl. [2]):

2.1. Satz (Ax). *Sei T eine Unbestimmte, seien $y_1, \ldots, y_n \in T\,\mathbf{C}[[T]]$, $\mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Dann ist*

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(y_1, \ldots, y_n, e^{y_1}, \ldots, e^{y_n}) \geq n+1,$$

wenn $y_1, \ldots, y_n$ über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. (Dabei bezeichnen wir mit $\operatorname{trdeg}_{\mathbf{C}}$ den Transzendenzgrad über $\mathbf{C}$, und mit e^y wie üblich $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} y^v$).

Im folgenden sei stets

$$\operatorname{Aut}(R) = \{f: R \to R,\ f|\mathbf{C} = \mathrm{id}_{\mathbf{C}},\ f \text{ Ringautomorphismus}\}$$

die Automorphismengruppe eines henselschen diskreten Cewertungsringes R mit Restklassenkörper $\mathbf{C}$.

2.2. Bemerkung. *Sei T eine Unbestimmte, sei R einer der Ringe $\mathbf{C}\langle T\rangle$, $\mathbf{C}\{T\}$ orer $\mathbf{C}[[T]]$ (d.h. algebraische Potenzreihen, konvergente Potenzreihen bzw. formale Potenzreihen). Dann sind die $\mathbf{C}$-Automorphismen von R gegeben durch die Zuordnung $T \mapsto T\cdot e$, e eine Einheit aus R, d.h.* Aut $(R) \cong R^*$ *= Gruppe der Einheiten von R (natürlich gilt diese Isomorphie nur mengentheoretisch, da die Gruppenoperation in* Aut (R) *durch "Einsetzen" gegeben ist).*

6.3. Bemerkung. *Sei R über* **C** *ein henselscher diskreter Bewertungsring, dann ist* $\mathrm{Aut}(R)=\mathrm{Gal}(Q(R)|\mathbf{C})$.

Der Beweis ist nicht schwierig, weil man in R aus Einheiten die n-ten Wurzeln ziehen kann. Er folgt jedoch auch sofort aus dem allgemeinerem Satz von F. K. Schmidt (vgl. [4]).

Wir wollen nun diskrete Bewertungsringe zwischen $\mathbf{C}\langle T\rangle$ und $\mathbf{C}[[T]]$ betrachten.

Sei $g\in\mathbf{C}[[T]]$, sei R der algebraische Abschluß von $\mathbf{C}[T,g]$ in $\mathbf{C}[[T]]$. R ist ein exzellenter henselscher diskreter Bewertungsring. Je nachdem ob $\frac{dg}{dT}\in R$ oder $\in R$ ist, ist offenbar $\mathrm{Der}(R)=\{\text{Derivationen von } R \text{ in } R, \text{ die } \mathbf{C}\text{-linear sind}\}=\frac{d}{dT}R$ oder 0.

Wir werden nun g spezialisieren und in Abhängigkeit davon Aut (R) und Der (R) untersuchen.

g	Aut (R)	Der (R)
(1) e^T	$\mathbf{Q}^*$	$\frac{d}{dT}R$
(2) $\ln T+1$	$\{T\mapsto(T+1)^a-1,\ a\in\mathbf{Q}^*\}\simeq\mathbf{Q}^*$	$\frac{d}{dT}R$
(3) $\ln(2T-1)+\sqrt{2}\ln(T+1)$	$\{\mathrm{id}\}$	$\frac{d}{dT}R$
(4) $e^{(e^T-1)}$	$\{\mathrm{id}\}$	0
(5) $e^{(\ln(T+1))^2}$	$\{T\mapsto(T+1)^a-1,\ a\in\mathbf{Q}^*\}\simeq\mathbf{Q}^*$	0
(6) $e^{i\cdot\ln(T+1)}-1$	$\simeq\mathbf{Q}[i]^*$	$\frac{d}{dT}R$
(7) $e^{\sqrt{2}\ln(T+1)}-1$	$\simeq\mathbf{Q}[\sqrt{2}]^*$	$\frac{d}{dT}R$

Wir werden den Beweis nur für ein typisches Beispiel führen. Nichttrivial ist nur die Berechnung der Automorphismengruppe. Sei f ein nichttrivialer Automorphismus von R für $g=e^{(e^T-1)}$. Dann ist

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}\left(T,f(T),e^{(e^T-1)},e^{(e^{f(T)}-1)}\right)\leqslant 2.$$

Daraus folgt, daß $T, f(T), e^T, e^{f(T)}$ über **Q** linear abhängig sind (wären sie linear unabhängig, würde nach 2.1 folgen, daß

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}\left(T,f(T),e^T,e^{f(T)},e^{(e^T-1)},e^{(e^{f(T)}-1)}\right)\geqslant 5$$

ist. Das geht aber nicht.

Wenn nun $T, f(T), e^T-1$ über **Q** linear unabhängig sind, folgt nach 2.1

Das ist aber unmöglich, da $f(T)$ und $e^{f(T)}$ nach dem zuvor gesagten algebrais über T und $e^{(e^T-1)}$ sind.

Wenn also ein nichttrivialer Automorphismus f von R existiert, sind $T, e^T-f(T)$ über **Q** linear abhängig.

Sei $aT+bf(T)+c(e^T-1)=0$ mit $a,b,c\in\mathbf{Q}$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

1. Fall $c=0$: In diesem Fall ist $f(T)=a'T$ für ein von Null verschiedenes aus **Q**. Wenn f ein nichttrivialer Automorphismus sein soll, muß $a'\neq 1$ sein. D führt aber zu einem Widerspruch, da für $a'\neq 1$ stets

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}\left(T,e^{(e^T-1)},e^{(a'T-1)}\right)=3 \text{ ist}$$

(das folgt analog zuvor).

2. Fall $c\neq 0$: Zunächst ist klar, daß $b\neq 0$ sein muß. Wir haben also ei Gleichung

$$f(T)=a'T+b'(e^T-1)$$

mit $a', b'\in\mathbf{Q}$ (und o.B.d.A. nach dem 1. Fall $b'\neq 0$). Das ergibt einen Widerspruc da $f(T)$ algebraisch über T und $e^{(e^T-1)}$ sein muß (analog nach 2.1). Damit hab wir gezeigt, daß in dem betrachteten Fall R nur die Identität als Automorphismus h
Was können wir aus diesen Beispielen schließen?

I) Es gibt henselsche exzellente diskrete Bewertungsringe vom Transzendenzgr 2 über **C** mit isomorpher Automorphismengruppe, die nicht isomorph si (vgl. (3) und (4) bzw. (5) und (1).

II) Das Vorhandensein von Derivationen hat keinen Einfluß auf die Existe von Automorphismen (vgl. (3), (4) bzw. (1), (5)).

III) Es gibt lokale Ringe mit Approximationseigenschaft über **C**, die nur d Identität als Automorphismus haben.

Durch ein Lemma können wir die Klasse der Beispiele noch etwas ausdehne

6.4. Lemma. *Sei* $g\in\mathbf{C}[[T]]$ *transzendent,* $h\in T\mathbf{C}\langle T\rangle$. *Sei R der algebraisc Abschluß von* $\mathbf{C}[T,g]$ *in* $\mathbf{C}[[T]]$ *und R' der algebraische Abschluß von* $\mathbf{C}[T,g(h(T)$ *in* $\mathbf{C}[[T]]$, *dann ist* $\mathrm{Aut}(R')=\mathrm{Aut}(R)\times\mu_n$, *wenn* $h=T^n$. *Einheit ist und* μ_n *a Gruppe der n-ten Einheitswurzeln bezeichnet.*

Der Beweis ist nicht schwierig (er folgt im Prinzip aus dem Satz über implizi Funktionen und der Tatsache, daß man in R aus Einheiten n-te Wurzeln ziehe kann). Wir wollen ihn hier nicht ausführen.

Wenn wir das Lemma auf die Beispiele (1) und (4) anwenden, erhalten w henselsche exzellente diskrete Bewertungsringe vom Transzendenzgrad 2 über mit Automorphismengruppe $\mathbf{Q}^*\times\mu_n$ bzw. μ_n.

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN, SEKTION MATHEMATIK, 108 BERLIN, UNTER DEN LI DEN 6 (DDR)

LITERATUR

[1] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. Mat IHES, 36 (1969), 23–58.

[2] J. Ax, *On Schanuel's conjectures and Skolem's method*, Ann. of Math. II ser., 93 (197

[3] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Elements de géométrie algébrique*, IV 1, 2, Publ. math. IHES, **20**, **21** (1964/65).

[4] H. Kurke, G. Pfister, M. Roczen, *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*, Berlin, 1975.

[5] G. Pfister, D. Popescu, *Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe*, Inv. math., **30** (2) (1975), 145–174.

[6] G. Pfister, *Ringe mit Approximationseigenschaft*, Math. Nachr., **57** (1973), 169–175.

[7] P. Valabrega, *On two-dimensional regular local rings and a lifting problem*, Ann. Sc. norm. sup. Pisa III, vol. XXVI (1973), 787–807.

Г. Фистер, **Плохие кольца Гензела**

Содержание. В работе даны кольца Гензела с „плохими свойствами": дискретно нормированные кольца, алгебраического замкнутые в своем пополнении, но не стличны; дискретно нормированные кольца с характеристикой 0 со свойством аппроксимации, а с „очень маленькой" группой автоморфизмов; 2 — мерные регулярные локальные кольца Гензела, алгебраически замкнутые в своём пополнении, японски, но не универсально японски.