Ringe mit Approximationseigenschaft

Herrn Professor Dr. H. GRELL zum 70. Geburtstag gewidmet

Von GERHARD PFISTER in Berlin

(Eingegangen am 3. 2. 1972)

In dieser Note wollen wir einige Ausführungen zu den von M. ARTIN betrachteten Ringen mit Approximationseigenschaft machen.

Sei A ein kommutativer Ring mit 1, *I ein Ideal von A. Wir sagen (A, I) hat die Approximationseigenschaft (und schreiben kurz $(A, I) \in \mathsf{AE}$), wenn stets folgendes gilt: Seien $Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$ N Unbestimmte und*

$$f = (f_1, \ldots, f_m)$$

Polynome aus $A[Y]$, die eine formale Lösung $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ aus der I-adischen Komplettierung A_I^k von A haben, d. h. $f(\bar{y}) = 0$.

Dann existiert für jede natürliche Zahl $c > 0$ eine Lösung von

$$f = 0 \qquad y = (y_1, \ldots, y_N)$$

aus A, d. h. $f(y) = 0$ *und* $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod I^c$ *für alle i.*

1. Folgerungen aus der Approximationseigenschaft

Satz 1. *Sei $(A, I) \in \mathsf{AE}$ und A separiert bezüglich der I-adischen Topologie, dann gilt:*

(1) $(A$, Radikal von $I) \in \mathsf{AE}$,

(2) *I ist im Jacobsonradikal von A enthalten,*

(3) *(A, I) ist* HENSEL*sch,*

(4) *A ist in der I-adischen Komplettierung von A A_I^k algebraisch abgeschlossen, wenn A ein Integritätsbereich ist*

(5) *wenn A reduziert ist, ist A_I^k reduziert,*

(6) *wenn A Integritätsbereich ist, ist A_I^k Integritätsbereich,*

(7) *A ist normal, wenn A_I^k normal ist,*

(8) *sei J ein endlich erzeugtes Ideal von A und A_I^k flach über A, dann ist $(A/J, I + J/J) \in \mathsf{AE}$.*

Beweis. (1) ist trivial. Um (2) zu zeigen, nehmen wir ein a aus I, dann ist $a+1$ Einheit in A_I^k, d. h. die Gleichung $(a+1)\,Y = 1$ hat eine Lösung aus A_I^k. Dann gibt es aber auch eine Lösung aus A, d. h. $a+1$ ist Einheit in A. (3) gilt, weil A_I^k HENSELsch in I ist. Sei nämlich $H(T)$ ein normiertes Polynom aus $A[T]$ mit $H(0) \in I$ und $H'(0)$ ist Einheit modulo I. Dann existiert ein a aus IA_I^k mit $H(a) = 0$. Dann existiert aber wegen der Approximationseigenschaft ein b aus A, $b \equiv a \bmod I$ (d. h. $b \in I$) mit $H(b) = 0$. Um (4) zu zeigen, nehmen wir uns ein Element a aus A_I^k, das algebraisch über A ist, d. h. Nullstelle des Polynoms $G(T)$ aus $A[T]$. Da G wegen der Approximationseigenschaft eine Nullstelle in A hat, kann man den Grad von G sukzessive erniedrigen, und somit muß a aus A sein. Um (5) zu zeigen, nehmen wir uns ein a aus A_I^k mit $a^n = 0$. Dann ist a Nullstelle von $T^n = 0$. Sei also c eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl, dann existiert ein a_c aus A mit $a_c^n = 0$ und $a \equiv a_c \bmod I^c$. Dann muß aber $a_c = 0$ sein, und somit ist a aus I^c für alle c, d. h. $a = 0$. Analog zeigt man nun (6) und (7). Um (8) zu zeigen, nehmen wir an, daß $J = (j_1, \ldots, j_r)$ ist. Sei nun $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ein Gleichungssystem aus $A/J\,[Y_1, \ldots, Y_N]$ und $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ eine formale Lösung aus $(A/J)_{I/J}^k$, d. h. $f(\bar{y}) = 0$.

Sei $g = (g_1, \ldots, g_m)$ Repräsentant von f in $A[Y_1, \ldots, Y_N]$, $\bar{z}$ Repräsentant von $\bar{y}$ in A_I^k, dann ist $g_r(\bar{z}) = \sum_j l_{ri} j_i$, $l_{ri} \in A_I^k$. Wir betrachten nun das Gleichungssystem, das durch die $h_r = g_r - \sum_i L_{ri} j_i$ aus

$$A[Y_1, \ldots, Y_N, L_{11}, \ldots, L_{mr}]$$

definiert wird. Dieses System hat eine formale Lösung aus A_I^k, nämlich $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N, l_{11}, \ldots, l_{mr})$, und somit für jedes $c > 0$ eine modulo I^c mit dieser Lösung übereinstimmende Lösung aus A. Diese definiert, wenn wir wieder zu den Restklassen übergehen, die gesuchte Lösung aus A/J. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann nun noch weitere Folgerungen dieser Art ziehen, bzw. die Aussagen verfeinern und viele Beziehungen zwischen dem Ring und seiner Komplettierung, die durch Gleichungen definiert sind, aus der Approximationseigenschaft folgern. Wir wollen jedoch hier nicht in aller Ausführlichkeit darauf eingehen. Man kann genaueres in [5] nachlesen.

Wir wollen nun noch eine weitere Folgerung ziehen, die schon bei RAYNAUD [7] genannt ist.

Satz 2. *Sei A ein semilokaler* NOETHER*scher Ring und I ein Ideal, dessen Radikal das* JACOBSON-*Radikal des Ringes ist. Wenn $(A, I) \in \mathsf{AE}$ ist, dann ist A universell japanisch.*

Bemerkung. *Es ist klar, daß allein aus der* Approximationseigenschaft *nicht universell japanisch folgen kann. Man betrachte z. B. einen Ring A, dessen ganze Abschließung nicht endlich über A ist (vgl.* NAGATA [6]), *dann ist* $(A, (0)) \in \mathsf{AE}$.

Beweis von Satz 2. Da (A, I) aus AE ist, ist auch für jedes Primideal p von A $(A/p,\ p + I/p) \in \mathsf{AE}$ und für jede endliche freie A-Algebra B

$$(B, IB) \in \mathsf{AE}.$$

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A ein Integritätsbereich ist (wir ersetzen A durch A/p), und es genügt zu zeigen, daß die ganze Abschließung von A endlich über A ist. (Denn wenn wir eine endliche Erweiterung K von $Q(A)$ dem Quotientenkörper von A haben und B die ganze Abschließung von A in K ist, enthält B eine über A endliche freie Algebra B', deren Quotientenkörper K ist. Wir können dann A durch B' ersetzen.) Um nun zu zeigen, daß die ganze Abschließung von A endlich über A ist, genügt es, dies für die Komplettierung A_I^k zu zeigen, da A_I^k eine treuflache A-Algebra ist und die ganze Abschließung von A_I^k das Tensorprodukt der ganzen Abschließung von A mit A_I^k über A enthält. Da nun $(A, I) \in \mathsf{AE}$ ist und ein Integritätsbereich ist, ist A_I^k ein Integritätsbereich.

Wir können schließlich annehmen, daß A_I^k ein lokaler kompletter noetherscher Integritätsbereich ist. Dann folgt aber aus dem Theorem von NAGATA ([4], s. 215), daß die ganze Abschließung von A_I^k endlich über A_I^k ist.

2. Beispiele

Satz 3. *Die folgenden Ringe sind aus* AE:

(1) $(k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle,\ (X_1, \ldots X_n))$, *$k$ ein Körper ($k\langle X\rangle$ ist dabei der Ring der algebraischen Potenzreihen)* [1]),

(2) $(\mathsf{C}\{X_1, \ldots, X_n\},\ (X_1, \ldots, X_n))$, *$\mathsf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ($\{\ \}$ bedeutet konvergente Reihen),*

(3) $(R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle,\ (X_1, \ldots, X_n))$, *$R$ ein exzellenter diskreter Bewertungsring,*

(4) (3), *wobei R ein kompletter noetherscher lokaler Ring ist,*

(5) (A, I), *A ein in I kompletter Ring.*

---

[1]) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ seien n Unbestimmte. Unter $R\langle X\rangle$ wollen wir die HENSELsche Abschließung von $R[X]$ bezüglich (X) verstehen (vgl. [5] oder H. KURKE, HENSELsche Schemata, Habilitationsschrift). In den von uns betrachteten Fällen (R ist von endlichem Typ über einem Körper k oder über dem Ring der ganzen Zahlen Z, oder R ist von der Gestalt $k[[t_1, \ldots, t_n]]$, allgemeiner R ist universell japanisch (vgl. [4])) ist $R\langle X\rangle$ die algebraische Abschließung von $R[X]$ in $R[[X]]$.

Zum Beweis wollen wir nun folgendes bemerken:

(5) ist trivial, (1) und (3) findet man bei ARTIN in [2], (2) findet man in M. ARTINS Arbeit [1], (4) findet man in [5]; wir werden in 3. noch darauf eingehen.

Satz 4. *Folgende Ringe haben nicht die* Approximationseigenschaft:

(1) *Beispiel von* NAGATA.

Sei k ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$ und $[k: k^p] = \infty$.

$$R = k^p [\![X_1, \ldots, X_n]\!] [k]$$

ist ein regulärer lokaler Integritätsbereich mit Maximalideal m, der bezüglich m nicht komplett ist. R^k_m ist rein inseparabel über R, und deshalb hat (R, m) nicht die Approximationseigenschaft.

Sei $\{b_1, \ldots\}$ eine Basis von $k: k^p$, $d = \sum_i b_i X_1^i$. Dann ist die ganze Abschließung von $R[d]$ nicht endlich über $R[d]$. ($R[d]$, JACOBSON-*Radikal von $R[d]$) ist somit nicht aus* AE.

(2) *Beispiel von* GRECO *und* SALMON.

Sei $R = k[X_0, X_1, \ldots][Y]$ ein Polynomenring in unendlich vielen Unbestimmten über dem Körper k und a das folgende Ideal:

$$a = (X_0 Y, X_0 - X_1 Y, X_1 - X_2 Y, \ldots).$$

Dann hat $(R/a \langle T \rangle, (T))$ nicht die Approximationseigenschaft.

Beweis. (1) ist schon bei RAYNAUD [7] erwähnt. Der Beweis folgt aus Satz 1. Das Beispiel findet man bei NAGATA in [6]. (2) ist ein Beispiel von GRECO und SALMON in [3] für einen Ring, dessen Komplettierung nicht flach über ihm ist.

Es ist klar, daß $T - Y$ Nichtnullteiler in $R/a\,[T]$ und somit, da $R/a \langle T \rangle$ flach über $R/a\,[T]$ ist, auch in $R/a \langle T \rangle$ ist. Auf der anderen Seite ist aber $\sum X_i T^i (T - Y) = 0$ in $R/a [\![T]\!]$, d. h. $T - Y$ ist Nullteiler in $R/a [\![T]\!]$. Das ist aber ein Widerspruch zur Approximationseigenschaft in Analogie zu (5) von Satz 1.

Aus Satz 3 und Satz 4 ergibt sich das folgende Problem: Sei R ein Ring, $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Wann ist $(R\langle X \rangle, (X))$ aus AE? Wir haben an einem Beispiel gesehen, daß dies nicht immer der Fall sein muß, doch war R im Beispiel nicht noethersch.

Interessant ist das Problem, ob für $R = k[T_1, \ldots, T_n]$, k ein Körper und n beliebig, $(R \langle X \rangle, (X)) \in$ AE ist. Die folgende Bemerkung zeigt uns, daß die Approximationseigenschaft von $R \langle X \rangle$ bezüglich (X) nicht von der Bedingung „NOETHERSCH" abhängt.

Bemerkung. *Wenn für jedes n stets* $(k[T_1, \ldots, T_k]\langle X\rangle, (X))$ *aus* AE *ist (die* T_i *sind Unbestimmte), dann ist auch* $(R\langle X\rangle, (X))$ *aus* AE, *wobei* R *ein Polynomenring in unendlich vielen Unbestimmten ist.*

Beweis. Sei $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in R\langle X\rangle[Y_1, \ldots, Y_N]$ und

$$\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N), \quad \bar{y}_i \in R[\![X]\!] \quad \text{mit} \quad f(\bar{y}) = 0$$

gegeben. Aus der Definition von $R\langle X\rangle$ folgt, daß die f_i schon über einem endlichen Polynomenring definiert sind, etwa über

$$k[T_1, \ldots, T_s]\langle X\rangle[Y_1, \ldots, Y_N].$$

Wir geben uns nun ein $c > 0$ vor und adjungieren zu $k[T_1, \ldots, T_N]$ noch diejenigen Unbestimmten aus R, die bei den Formen von $\bar{y}_i$ vom Grad bezüglich $(X) \leqq c$ vorkommen. Die restlichen Unbestimmten aus R setzen wir Null, und die so erhaltenen formalen Reihen bezeichnen wir mit

$$\bar{y}^{(0)} = (\bar{y}_1^{(0)}, \ldots, \bar{y}\, N^{(0)}).$$

Dann ist $\bar{y}_i \equiv \bar{y}_i^{(0)} \bmod (X)^c$ und $f(\bar{y}^{(0)}) = 0$.

Wir haben somit das Problem auf einen endlichen Polynomenring $k[T_1, \ldots, T_k]$ reduziert. Es gibt also nach Voraussetzung eine Lösung aus $k[T_1, \ldots, T_k]\langle X\rangle$, die mit $\bar{y}^{(0)}$ und somit auch mit $\bar{y}$ modulo $(X)^c$ übereinstimmt.

Wir können diese Bemerkung nicht so ohne weiteres mit Beispiel (2) in Beziehung bringen, da in diesem Beispiel $R/a[\![T]\!]$ über $R/a\langle T\rangle$ nicht flach ist und somit die Voraussetzung von (8) von Satz 1 nicht erfüllt ist.

3. Ringe mit schwacher Approximationseigenschaft

Wir können in dieser Arbeit für das eben aufgeworfene Problem nur eine schwächere Aussage machen.

Satz 5. *Sei* R *eine Algebra von endlichem Typ über einem Körper,*

$$X = (X_1, \ldots, X_n), \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$$

seien Unbestimmte, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ *sei ein Gleichungssystem aus*

$$R\langle X\rangle[Y], \quad \bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$$

sei eine formale Lösung, d. h. $\bar{y}_i \in R[\![X]\!]$ *und* $f(\bar{y}) = 0$. *Sei* $c > 0$ *eine ganze Zahl, dann gilt:*

(1) *Es existiert ein* d *aus* R, *das nicht von* c *abhängt und algebraische Potenzreihen* $y = (y_1, \ldots, y_N)$, *über* R_d, *d. h.* $y_i \in R_d\langle X\rangle$, *mit* $f(y) = 0$ *und* $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod (X)^c$.

(2) *Es existieren Ringhomomorphismen* l_s *von* $R\langle X\rangle$ *auf* $R\langle X\rangle$, *deren Fortsetzung auf* $R\langle X\rangle_{X_s}$ *Isomorphismen sind, so daß für das induzierte Gleichungssystem* $g = l_s(f) = (l_s(f_1), \ldots, l_s(f_m))$ (*dabei ist hier mit* l_s *die kanonische Fortsetzung von* l_s *auf* $R\langle X\rangle\,[Y]$ *gemeint*) *und die induzierte formale Lösung* $l_s(\bar{y})$ *eine Lösung*

$$y = (y_1, \ldots, y_N), \quad y_i \in R\langle X\rangle,$$

existiert, d. h. $l_s(f)\,(y) = 0$, *und* $y_i \equiv l_s(\bar{y}_i) \bmod (X)^c$.

Wir sagen nun, daß ein Ring R die schwache Approximationseigenschaft hat (und schreiben kurz $R \in \mathsf{SAE}$), wenn für R (1) von Satz 5 gilt.

Bemerkung. *Es ist klar, daß ein analoger Satz für die* SAE *wie Satz* 1 (8) *gilt.*

Beweis von Satz 5. Den Beweis von Satz 5 kann man in Analogie zum Beweis von M. ARTINS Approximationssatz (Satz 3 (3), vgl. [1]) führen. Die Reduktion auf den Fall, daß die Anzahl der Gleichungen gleich der Höhe des von ihnen erzeugten Ideals ist, kann man übertragen. Das NEWTONsche Lemma kann man analog auf der Grundlage des von H. KURKE für $R\langle X\rangle$ bewiesenen Satzes über implizite Funktionen (vgl. [5] oder H. KURKE, HENSELsche Schemata, Habilitationsschrift) beweisen. Im weiteren Beweis wird dann für den Induktionsschritt der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz verwendet. Wir können ihn für unsere Zwecke wie folgt verallgemeinern und den Rest von ARTINS Beweis dann übertragen:

WEIERSTRASSscher Vorbereitungssatz. *Sei* R *ein* NOETHER*scher Integritätsbereich, und seien* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *Unbestimmte, sei weiterhin* $f \in R[\![X]\!]$ *mit* $f(0, \ldots, 0, X_n) = dX_n^s + \cdots$ *und* $d \neq 0$, *dann ist* $R_d[\![X]\!]/f$ *zu dem folgenden Ring isomorph:*

$$R_d[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!] + R_d[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!]\,X_n + \cdots + R_d[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!]\,X_n^{s-1}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, kann man den Beweis von ZARISKI-SAMUEL [8] für den Fall, daß R ein Körper ist, übertragen, denn man benötigt lediglich, daß d eine Einheit ist.

Man kann auch analog zu [8] durch Koordinatentransformationen ein gegebenes f aus $R[\![X]\!]$ auf eine solche Form bringen, wie sie im WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz gefordert ist.

Wenn R nun von der Form $k[T_1, \ldots, T_s]$ ist, k ein Körper, dann kann man durch zusätzliche Transformationen der Art $T_i \rightsquigarrow T_i X_r^l$ erreichen, daß d eine Einheit ist. Diese Transformationen definieren dann die l_r in Satz 5.

Wir können nun den Rest von ARTINS Beweis übertragen und sehen wie durch den WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz die Ringerweiterung bzw. die Homomorphismen hereinkommen.

Bemerkung. (1) *Wenn R Restklassenring eines noetherschen Integritätsbeichs ist, ist R aus* SAE. (2) *Wenn R speziell Restklassenring von*

$$k[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$$

ist, k ein Körper, dann ist $(R\langle X\rangle, (X))$ aus AE.

Beweis. (1) Wir haben bei der Aussage von Satz 5 (1) vom WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatz nur die allgemeine Aussage benötigt. Bei (2) führt man den Beweis mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der T_i und überträgt ARTINS Beweis.

Literatur

[1] M. ARTIN, On the Solutions of Analytic Equations, Inventiones math. **5**, 277–291 (1968).

[2] —, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES **36** (1969).

[3] S. GRECO and P. SALMON, Topics in m-adic Topologies, Berlin, Heidelberg, New York 1971.

[4] A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. IHES **20** (1964).

[5] H. KURKE, G. PFISTER und M. ROCZEN, HENSELsche Ringe und algebraische Geometrie, erscheint beim Verlag der Wissenschaften.

[6] M. NAGATA, Local Rings, New York 1962.

[7] M. RAYNAUD, Travaux récents de M. ARTIN, Sém. BOURBAKI 1968/69, **363**.

[8] O. ZARISKI and P. SAMUEL, Commutative algebra II, Princeton 1960.