REVISTA CIENCIAS MATEMÁTICAS Vol. V, Nº 3, 1984

Anillos locales HENSELIANOS y excelentes

Mario Estrada, IMACC, Academia de Ciencias de Cuba
Gerhard Pfister, Universidad de Humboldt, Berlín, RDA

RESUMEN

Se presenta una revisión actual de los anillos locales henselianos y excelentes, enunciándose los resultados más relevantes y presentándose algunos problemas abiertos. Se establece la relación con los anillos con la Propiedad de Aproximación en el caso local y se concluye con un teorema que ilustra las técnicas usuales de demostración de propiedades de aproximación.

ABSTRACT

An actual review of local rings which are henselians and excellents is presented. The most relevants results are stated and some open problems are mentioned. The relation with the rings whith the Property of Approximation is established in the local case. The paper concludes with a theorem showing the usual techniques used proving approximation properties.

INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta una revisión actualizada de algunos de los problemas resueltos y pendientes de solución concernientes a los anillos locales henselianos y excelentes. Ha motivado la presentación de esta revisión la conferencia dictada sobre el tema por el Dr. Gerhard Pfister de la Universidad de Humboldt en Berlín, durante su estancia en la Academia de Ciencias de Cuba. Para las definiciones y demostraciones cuya referencia no se señala, remitimos al lector a las obras fundamentales [7] y [8].

Todos los anillos considerados son conmutativos, noetherianos y unitarios.

1. ANILLOS HENSELIANOS

Definición: El par (A,J), J un ideal de A, se denomina Henseliano cuando para todo polinomio mónico $F(T) \in A[T]$, si:

$$a)\ F(O) \equiv O \pmod{J}$$

b) $\frac{\partial F}{\partial T}$ (O) $\equiv$ Unidad (mod J)

entonces $\exists$ a $\in$ J, tal que F(a) = O

Existen muchas propiedades equivalentes a la definición. Cuando esta se generaliza al caso de n variables $(T_1,\ldots,T_n)$, se obtiene el Teorema de las Funciones Implícitas (T.F.I.)

2.2. *Teorema* (T.F.I.)

Sea (A,J) henseliano, $F = (F_1,\ldots,F_r)$, $F_i \in A[T_1,\ldots,T_n]$, $r \leq n$, r polinomios sobre A tales que:

a) $F_i(O) \equiv O$ (mod J), i=1, ,r

b) $\Delta F(O) + J = A$, donde ΔF = ideal engendrado por los rxr -menores de la matriz- $\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}\right)$

Existe entonces $a = (a_1,\ldots,a_n)$, $a_j \in J$, $j = 1,\ldots,n$; tal que F(a) = O.

2.3. ***Lema de Newton***

Sea (A,J) henseliano; $F_1,\ldots, F_r \in A[T_1,\ldots,T_n]$, $r \leq n$ r polinomios sobre A, Sea $\Delta(F)$ el ideal engendrado por los rxr menores de la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}\right)$ $\begin{matrix} i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n \end{matrix}$

Cuando para $\bar{a} = (\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n) \in A^n$, se tiene $F(\bar{a}) \equiv O \bmod (\Delta(F)(\bar{a}))^2 J^c$ $c \geq 1$; existe entonces un $a = (a_1,\ldots,a_n) \in A^n$ con:

(1) F(a) = O

(2) $a_i \equiv \bar{a}_i \bmod (\Delta(F)(\bar{a}).J^c$

2.4. *Teorema* (Elkik) (ver [31])

Sea (A,J) henseliano; $F = (F_1,\ldots,F_r)$, $F_i \in A[T_1,\ldots,T_n]$, i=1,...,r; polinomios sobre A. Sea Λ un ideal que describe el lugar singular de $A[T_1,\ldots,T_n] / (F_1,\ldots,F_r)$ sobre A (este ideal debe, por razones técnicas escogerse especialmente).

Entonces existe una función $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, con las siguientes propiedades: cuando para un $\bar{a} = (\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$, $\bar{a}_i \in \bar{A}$, se tiene:

i) $F_i(\bar{a}) \equiv O \bmod J^{\varphi(r,s)}$

ii) $\Delta(\bar{a}) \supseteq J^r$

existe entonces $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in A$, tal que

$$F_i(a) = 0 \text{ y } a_i \equiv \bar{a}_i \pmod{J^s}$$

3. ANILLOS EXCELENTES (ver [9])

Nos referimos solamente al caso local.

Primeramente dos definiciones necesarias

3.1. Definición: Un anillo A se denomina *catenario* cuando dados los ideales primos $p \subsetneq q$ de A, todas las cadenas de ideales primos, que comienzan con p y terminan con q, tienen la misma longitud.

A es *universalmente catenario* cuando toda A - álgebra de tipo finito es catenaria.

3.2. Definición: Un anillo A se denomina un *G. anillo* cuando sus fibras formales son geométricamente regulares.

Es decir para todo $p \in \operatorname{Spec} A$, la fibra $\hat{A} \otimes_{A/p} Q(A)$ es un anillo regular y permanece regular para toda extensión finita de $Q(A)$. Equivalentemente si $\bar{p} \in \operatorname{Spec} \hat{A}$ y $p = \bar{p} \cap A$, el anillo $\hat{A}_{\bar{p}} / p \hat{A}_{\bar{p}}$ es geométricamente regular.

3.3. Definición: Un anillo local A se denomina *excelente* cuando:

1) Es universalmente catenario
2) es un G - anillo.

Otra definición importante, en el marco de la temática que estamos analizando es la correspondiente a los anillos con la propiedad de aproximación.

3.4. Definición: Un anillo local A con ideal maximal m se denomina anillo con la Propiedad de Aproximación, (se escribe $A \in AE$) cuando se cumple lo siguiente:

Sean $F_1, \ldots, F_r \in A[T_1, \ldots, T_n]$ r polinomios, tales que $F_i(\bar{y}) = 0$, $\bar{y} \in \hat{A}^n$, $i=1,\ldots,r$. ($\hat{A}$ el completado de A). Entonces para todo número natural c, $\exists\, y_c \in A^n$, tales que $F_i(y_c) = 0$ e $y_c \equiv \bar{y} \pmod{m^c}$.

Las propiedades fundamentales de los anillos con AE se pueden resumir en el siguiente teorema.

3.5. Teorema: Sea $A \in AE$, entonces:

1) A es henseliano
2) A es universalmente catenario
3) Las fibras formales de A son geométricamente

normales, es decir: $\bar{p} \in \operatorname{Spec} \hat{A}$ y $p = \bar{p} \cap \hat{A}$ implican que $\hat{A}_{\bar{p}} / p\hat{A}_{\bar{p}}$ es geométricamente normal

4) Si $B|A$ es una extensión finita, entonces $B \in AE$

Problemas: entre los problemas que están en estudio citamos los siguientes:

P.1. Si $A \in AE$ ¿es A excelente?

Esta conjetura viene sugerida por ser excelentes todos los anillos conocidos con la propiedad AE, y puede reducirse a demostrar que: Dado $A \in AE$ y $\bar{p} \in \operatorname{Spec} \hat{A}$ con $\bar{p} \cap \hat{A} = 0$ entonces $\hat{A}_{\bar{p}}$ es regular. La respuesta a P.1 es afirmativa para dim ≤ 2 y está en estudio para dimensiones mayores.

Un problema más débil es el siguiente:

P2. ¿Es $\operatorname{Reg} A = \{p \in \operatorname{Spec} A : A_p \text{ regular}\}$, abierto en Spec A?

La solución de P.1 implica P.2, pues cuando A excelente es siempre Reg A abierto en Spec A. La respuesta es afirmativa al menos para dim $A \leq 3$.

Un problema aún más importante lo constituye:

P3. ¿Qué anillos poseen la propiedad AE?

En este sentido mencionamos a continuación los resultados obtenidos más importantes.

1) Greemberg, 1966, (ver [5]): si R es un anillo de valoración discreta, henseliano y excelente, entonces $R \in AE$.

2) Artin, 1968 (ver [1]): sea k un cuerpo valorado de característica 0, entonces $A = k\{X_1,\ldots,X_n\}$ (series de potencias convergentes) posee la propiedad AE.

3) Artin, 1969 (ver [2]): sea R un anillo de valoración discreta excelente y henseliano, entonces $A = R\langle X_1,\ldots,X_n\rangle$ (series de potencias algebraicas) posee la propiedad AE.

4) Sea $\mathbb{K}$ la categoría de los W-anillos (ver [8] y [10]), es decir cuyos objetos son anillos locales regulares A, con las propiedades siguientes:

- A es excelente
- A satisface el Teorema de preparación de Weiertrass (WVS)

Se demuestra que $A \in \mathbb{K} \longrightarrow A \in AE$

Cuando k es un cuerpo valorado completo de características $p > 0$, entonces $K\{K_1,\ldots,K_n\}$ cumple el WVS y se demuestra su excelencia (ver [6]), es decir también en este caso $k\{X_1,\ldots,X_n\} \in AE$.

El problema, cuando K es un cuerpo valorado no completo tiene la siguiente solución (ver[13]):

K se denomina casi completo cuando la extensión $\hat{K}/K$ es separable.
$K\{X_1,\ldots,X_n\}$ es excelente (y por tanto con AE) si y sólo si K es casi completo.

5) Otro problema de interés es: $A \in AE \xrightarrow{?} A^{sh} \in AE$. Es decir, ¿posee la henselización estricta de anillos con AE, también esta propiedad?. Informalmente, la henselización estricta de un anillo local (A,m) viene dada por el "menor" anillo local henseliano que lo contiene y cuyo cuerpc residual es la clausura separable del cuerpo residual $k = A/m$ de A. Respuesta a este problema viene dada parcialmente en [4].

6) D. Popescu ha anunciado recientemente, el siguiente muy interesante resultado, aún no publicado:

Si A es henseliano y excelente, entonces $A \in AE$.

En el caso en que A es local, son conocidos los resultados siguientes:

dim A = 1 , $A \in AE \Leftrightarrow$ A es henseliano y excelente (ver [6] y [11]).

dim A = 2 , $A \in AE$ y factorial $\Leftrightarrow$ A es henseliano y excelente (ver [12])

dim A = 3 , La afirmación de Popescu se ha demostrado para algunos ejemplos de anillos henselianos y excelentes (ver [11])
Está pendiente de demostrar $A \in AE \Rightarrow$ A es henseliano y excelente.

4. Anillos con la Propiedad Fuerte de Aproximación

4.1. Definición: Un anillo local (A,m) posee la Propiedad Fuerte de Aproximación (se escribe $A \in SAE$) cuando se tiene: Sean $F_1,\ldots,F_r \in A[T_1,\ldots,T_n]$ r polinomios sobre A. Entonces existe una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que cuando $F_i(\bar{t}) = 0 \pmod{m^{\varphi(c)}}$ $c \in \mathbb{N}, \bar{t} \in \hat{A}^n$ $i=1,\ldots,r$, existe $t \in A^n$, con $F_i(t) = 0$ y $t \equiv \bar{t} \pmod{m^c}$

La condición SAE es sólo aparentemente más fuerte, lo que demuestra el teorema siguiente.

4.2 Teorema (Pfister y Popescu [8])

$$A \in AE \longrightarrow A \in SAE$$

Es necesario observar que en general se desconoce la función φ, sólo se conoce en casos simples (ver [2]). Su determinación es de interés por las posibles aplicaciones.

Con el objetivo de mostrar una técnica usual de demostración de propiedades de aproximación enunciamos y demostramos el próximo teorema

4.3. Teorema

Sean $f = (f_1,\ldots,f_n)$; $f_1,\ldots,f_m \in \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_N\} = \mathbb{C}\{X,Y\}$ tales que $f(\bar{y}) = 0$, $\bar{y} \in (\mathbb{C}[[x]])^N$. Entonces existen para todo $c \in \mathbb{N}$

$y_c \in (\mathbb{C}\{x\})^N$, tales que $f(y_c) = 0$, con $y \underset{c}{\equiv} y \pmod{(X)^c}$, $X = (X_1,\ldots,X_n)$.

Demostración:

Primeramente, sin restricción de la generalidad, podemos tomar $(f_1,\ldots,f_m) = \mathfrak{p} = \operatorname{Ker}(\mathbb{C}\{X,Y\} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[[X]])$, ψ definida por $Y_i \mapsto \overline{y_i}$, por el carácter noetheriano de $\mathbb{C}\{X,Y\}$.

Sea ht $\mathfrak{p} = r$ (altura de $\mathfrak{p}$). Entonces, sin restricción de la generalidad podemos considerar -mediante la aplicación del **W.V.S.** y el criterio de Jacobi- que existe un rxr -Menor d de la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)$ tal que $d \notin \mathfrak{p}$, o sea tal que $d(\bar{y}) \neq 0$ y $d = \left|\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|$ $i,j=1,\ldots,r$.

Afirmamos ahora que dados y_c, con $y_c \equiv \bar{y} \pmod{(X)^c}$, si tomamos $c \gg 1$ de $f_1(y_c) = \ldots\ldots = f_r(y_c) = 0$ resulta $\mathfrak{p}(y_c) = 0$.

Efectivamente, considerando $\sqrt{(f_1,\ldots,f_r)} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ podemos tomar $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}_i(\bar{y}) \neq 0$ para $i > 1$. Escogiendo $c >$ ord $\mathfrak{p}_i(\bar{y})$, $i>1$, como $\mathfrak{p}_i(y_c) \equiv \mathfrak{p}_i(\bar{y}) \pmod{m^c}$ y por tanto ord $\mathfrak{p}_i(y_c) =$ ord $\mathfrak{p}_i(\bar{y})$, resulta $\mathfrak{p}_i(y_c) \neq 0$ para $i > 1$. Ahora $\sqrt{(f_1,\ldots,f_r}\ (y_c) = 0$ implica $\mathfrak{p}(y_c)$, $\mathfrak{p}_2(y_c) \ldots \mathfrak{p}_r(y_c) = 0$, de donde nuestra afirmación.

El resto de la demostración consiste en la aplicación del Lema de Newton, y para ello, dado $\bar{y}$ tal que $f(\bar{y})=0$, y por tanto $f(\bar{y}) \equiv 0 \pmod{d^2(\bar{y})(X)^c}$, encontrar, para todo $c \in \mathbb{N}$, un $y_c \in \mathbb{C}\{X\}$, con $y_c \equiv \bar{y} \pmod{(X)^c}$ tal que $f(y_c) \equiv 0 \pmod{d^2(y_c)\ (X)^c}$.

Se aplica para ello inducción en el número n de variables X_i.

Para n=0 la afirmación es trivial.

Podemos ahora suponer, sin restricción de la generalidad que $d^2(\bar{y})$ es X_n - regular (i,c. $d^2(\bar{y})\ (0,\ldots,0,X_n) \neq 0$)

Aplicando el W.V.S. a $d^2(\bar{y})$ resulta:

$d^2(\bar{y}) = \text{Unidad}\cdot\left(X_n + \bar{a}_{n-1} X_n^{s-1} + \ldots + a_0\right)$, donde $\bar{a}_i \in \mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$

y $\bar{P}(X_n) = X_n + \bar{a}_{n-1} X_n^{s-1} + \ldots + \bar{a}_0$

Dividiendo los $\bar{y}_i$ por $\bar{P}(X_n)$ resulta:

$\bar{y}_i = \bar{P}(X_n)\,\bar{\bar{y}}_i + \sum_{\nu=0}^{s-1} y_{i_\nu} X_n^\nu$, $\bar{y}_{i_\nu} \in \mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_{n-1}]]$, $i=1,\ldots,N$

Introducimos ahora las variables $Z_i = \sum_{\nu=0}^{s-1} Z_{i_\nu} X_n^\nu$, $i=1,\ldots,N$ y definimos $q_k(Z_{i_\nu}) = f_k\left(Y_i = \sum_{\nu=0}^{s-1} (Z_{i_\nu} X_n^\nu)\right)$; $k = 1,\ldots,r$.

Ahora, $g_k(\bar{y}_{i_\nu}) \equiv f_k(\bar{y}_i) \equiv 0 \pmod{\bar{P}(X_n)} \equiv 0 \pmod{d^2(\bar{y})}$

Consideremos el Polinomio $\bar{P}' =: X_n + A_{s-1} X_n^{s-1} + \ldots + A_j$ donde los A_i, $i=0, \ldots, s-1$ son nuevas variables, y dividamos $g_k(Z_{i_\nu}) = \bar{P}' \cdot q + \sum_{j=0}^{s-1} q_{k_j} X_n^j$, donde $q \in C\left\{\{X_1, \ldots, X_n\}, \{Z_{i_\nu}\}, \{A_j\}\right\}$ y $q_{k_j} \in C\left\{X_1, \ldots, X_{n-1}\right\}, \{Z_{i_\nu}\}\{A_j\}$ $i=1, \ldots, N$; $j=0, \ldots s-1$

Ahora bien, sustituyendo $\begin{cases} \bar{y}_{i_\nu} = Z_{i_\nu} \\ A_j = \bar{a}_j \end{cases}$, resulta una ecuación del tipo

$$\bar{P}(X_n).h = \bar{P}(X_n).h' + \sum q_{k_j}\left(X_1, \ldots, X_{n-1}, \bar{v}_{i_\nu}, \bar{a}_j\right)$$

Por la unicidad de los términos, según el WVS, resulta $g_{k_j}(X_1, \ldots, X_{n-1}$ $\bar{y}_i, \bar{a}_j) = 0$ Aplicando por tanto la hipótesis de inducción o esta ecuación encontramos para todo $c \in \mathbb{N}$, solución en A de la ecuación $g_{k_j} = 0$, con $a_i \equiv a_i \pmod{(X)^c}$; $y_{i_\nu} \equiv \bar{y}_{i_\nu} \pmod{(X)^c}$. Si ahora recorremos el camino inverso de las sustituciones realizadas obtenemos la solución requerida $y_c \equiv \bar{y} \pmod{(X^c)}$ del sistema $f_i \equiv 0 \bmod \Delta^2(y_c)(X^c)$, qed.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Artin, M.
On the solution of analytic equations, Inv. math. 5 (1969), 277-281

[2] Artin, M.
Algebraic approximations of structure over complete local rings, Publ. math IHES 36 (1969), 23-58.

[3] Elkik, R.
Solutions d'equations a coefficionsts dans un anneau Henselian, Ann Sc. Ec. Norm. Sup 4° serie, t6 (1973), 533-604

[4] Estrada, M.
Einige Bemerkungen uber Ringe mit Approximationseigenschaft II, Math Nachrichten (próxima aparición)

[5] Greenberg, M.J.
Rational points in Henselian discrete valuation rings, Publ math IHES 31 (1966), 59-64.

[6] Kiehl, R.
Ausgezeichnete Ringe in der nicharchimedischen analytischen Geometrie, J. ·reineu. angew. Math. 234 (1969), 19-98.

[7] Kurke, H.; G. Pfister; M. Roczen
Henselsche Ringe und algebraische Geometrie, Berlin 1974.

[8] Kurke, H.; T. Mostowski; G. Pfister; D. Popescu; M. Roczen
Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, Lecture Notes, 634, Berlin, 1978.

[9] Matsumura, H.
Commutative Algebra, New York, 1970.

[10] Pfister, G.
Die Approximationseigenschaft lokaler Hanselscher Ringe, Dissertation zur Erlangung des akademischen grades doctor scientiae naturalis, Berlin, 1976.

[11] Pfister, G.; D. Popescu
On three dimensional local rings with the property of approximation, Revue Roumaine de Math Pures et Appl. Tome XXVI, No. 2, 1981, 301-307.

[12] Popescu, D.; M. Cipu
Some extensions of Neuron's Desingularization and Approximation, INCREST Preprint Series in Mathematics, No. 27/1980.

[13] Schemmel
Dissertation, Humboldt Universitaet, 1981.

Recibido: 14 de septiembre de 1982.