Algebraische Räume und ihre geometrische Realisierung

Herrn Prof. Dr. H. GRELL zum 70. Geburtstag gewidmet

Von GERHARD PFISTER in Berlin

(Eingegangen am 3. 2. 1972)

In diesem Artikel soll die Stellung des algebraischen Raumes als geometrisches Objekt untersucht werden.

Sei X *ein* algebraischer Raum *definiert durch die etale Äquivalenzrelation* $R \rightrightarrows U$. *Unter der* geometrischen Realisierung X_* *von* X *wollen wir den Quotienten von* $R \rightrightarrows U$ *in der Kategorie der lokal geringten Räume verstehen.* Wir wollen nun die Beziehung von X und X_* untersuchen.

1. Etalmorphismen in der Kategorie der lokal geringten Räume

Definition 1. *Seien X und Y lokal geringte Räume, f ein Morphismus von X in Y. f heißt* etaliert, *wenn es für jeden Punkt x aus X und $y = f(x)$ Umgebungen U und V gibt mit $f^{-1} V \supseteqq U$, daß sich die Einschränkung von f auf U wie folgt faktorisieren läßt:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & V \\ & (V[T]/F)_{F'} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist g eine offene Einbettung, F ein normiertes Polynom aus $\Gamma(Y)$ $[T]$und $F' = \dfrac{dF}{dT}$ und $(V[T]/F)_{F'}$ die lokal abgeschlossene Menge $D(F') \cap V)$ von

$$V \times_{\operatorname{Spec} Z} \operatorname{Spec} Z[T].$$

Bemerkung 1. *Der Morphismus f ist* etaliert *genau dann, wenn er*

(1) *flach,*

(2) *unverzweigt,*

(3) *lokal von endlicher Darstellung ist (d. h. X ist lokal gegeben durch $Y[T_1, \ldots, T_n]/(F_1, \ldots, F_m)$).*

Wir wollen auf den Beweis dieser Bemerkung nicht weiter eingehen, da wir sie im folgenden nicht benötigen. Man kann ihn in [3] nachlesen. Ebenso die

Bemerkung 2. *Etalmorphismen sind offen.*

Satz 1. *Jeder lokal geringte Raum definiert durch die* Yoneda-*Einbettung bezüglich der kanonisch definierten Etaltopologie eine Etalgarbe.*

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, daß, falls $f\colon X \to Y$ etaliert und surjektiv ist (X, Y lokal geringte Räume), dann

$$X \times_Y X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} X$$

exakt ist.

Dazu genügt es zu zeigen, daß

(1) das entsprechende Diagramm der zugrunde liegenden topologischen Räume und

(2) das entsprechende Diagramm der Strukturgarben exakt ist.

Man kann nun (1) analog zum Fall der Schemata beweisen (vgl. [1] oder [3]).

Um (2) zu zeigen, nutzt man die in der Definition gegebene lokale Struktur der Etalmorphismen aus.

Wir wissen, daß $X \to Y$ lokal durch $(Y[T]/F)_G \to Y$ gegeben ist, dabei ist F ein normiertes Polynom aus $\Gamma(y)[T]$ und $G = G_0 F'$ mit $G_0 \in/(F)$.

Wir erhalten somit für das uns interessierende Diagramm der Strukturgarben

$$\mathcal{O}_{Y,y} \to (f_* \mathcal{O}_X)_y \rightrightarrows ((f \circ g)_* \mathcal{O}_{X \times_Y X})_y$$

$$\mathcal{O}_{Y,y} \to (\mathcal{O}_{Y,y}[T]/F)_{(G^v + m_{Y,y}\mathcal{O}_{Y,y}[T]/F)} \rightrightarrows L,$$

wobei $L = (\mathcal{O}_{Y,y}[T_1, T_2]/(F(T_1), F(T_2)))_{(G(T_1)^v G(T_2)^w + m_{Y,y}\mathcal{O}_{Y,y}[T_1 T_2])}$ ist (mit $\mathcal{O}_{Y,y}$ bezeichnen wir wie üblich den Halm der Strukturgarbe im Punkt y, mit $m_{Y,y}$ das Maximalideal von $\mathcal{O}_{Y,y}$). Wir tensorieren diese Folge nun mit der strengen Henselisierung A von $\mathcal{O}_{Y,y}$ (d. h. A ist eine Henselsche lokale treuflache $\mathcal{O}_{Y,y}$-Algebra mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper). Dann ist, da über $A[T]$ F in Linearfaktoren zerfällt (A ist Henselsch mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper),

$$(A[T]/F)_{F'} \cong A \times \cdots \times A.$$

Wir erhalten somit die folgende Sequenz

$$A \to \underbrace{A \times \cdots \times A}_{r\text{mal}} \rightrightarrows \underbrace{A \times \cdots\cdots \times A}_{r^2\text{mal}},$$

wobei r der Grad von F ist.

Nun sieht man sofort, daß diese Folge exakt ist und damit auch (wegen der Treuflachheit von A über $\mathcal{O}_{Y,y}$) auch die uns interessierende.

Satz 2. *Seien X und Y lokal geringte Räume, $f\colon X \to Y$ ein Etalmorphismus, $Y' = f(X)$. Dann ist X ein Schema genau dann, wenn Y' ein Schema ist.*

Beweis. Wenn Y' ein Schema ist, folgt aus der Definition des Etalmorphismus, daß X ein Schema ist (vgl. lokale Charakterisierung der Etalmorphismen!).

Sei nun X ein Schema. Wir müssen zeigen, daß jeder Punkt y aus Y' eine affine Umgebung besitzt. Nun können wir, da unsere Frage lokaler Natur ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$X = \operatorname{Spec} A$$

ist und $X = (Y[T]/F)_G$ ist, $X \to Y$ surjektiv ist und $G(y) \neq 0$ (Etalmorphismen sind ja offen und lokal von dieser Gestalt). Wir haben nun eine kanonische Abbildung $\Gamma(Y) \to A$. Wegen der speziellen Gestalt von $\operatorname{Spec} A$ (und da wir Y so klein wählen können, daß T Einheit in

$$\Gamma(Y)\,[T]/F$$

ist und $G(y) \neq 0$ ist) erhalten wir wegen der Normiertheit von F

$$A \xrightarrow{\sim} (\Gamma(Y)\,[T]/F)_G.$$

Dann ist aber die kanonische Abbildung $\Gamma(Y) \to A$ etaliert. Sei D das offene Unterschema von $\operatorname{Spec} \Gamma(Y)$, das durch den offenen (etalierten) Morphismus $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \Gamma(Y)$ definiert ist. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & Y \\ & D \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

mit surjektiven Etalmorphismen f und k. Es ergibt sich das folgende exakte Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \times_Y \operatorname{Spec} A \arrow[rr, shift left, "a"] \arrow[rr, shift right, "b"'] \arrow[d, "h"'] & & \operatorname{Spec} A \arrow[rr] \arrow[drr] & & Y \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A \times_D \operatorname{Spec} A \arrow[urr, shift left, "c"] \arrow[urr, shift right, "d"'] & & & & D \end{tikzcd}$$

Dabei ist h etaliert, da a und c etaliert sind, und surjektiv, da p surjektiv ist und (a, b) bzw. (c, d) eine etale Äquivalenzrelation bilden. Aus diesem exakten Diagramm erhalten wir, da Y eine Etalgarbe ist, das folgende exakte Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Y(D) \arrow[r] & Y(\mathrm{Spec}\,A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & Y(\mathrm{Spec}\,A \times_D \mathrm{Spec}\,A) \arrow[d, "Y(h)"] \\
 & & Y(\mathrm{Spec}\,A \times_Y \mathrm{Spec}\,A)
\end{tikzcd}$$

Da h etaliert und surjektiv ist, ist $Y(h)$ injektiv. Spec $A \to Y$ definiert also ein kanonisches Element aus $Y(D)$, das heißt ein $D \to Y$, das zu p invers ist. Damit ist der Satz bewiesen.

2. Die geometrische Realisierung

Aus 1. können wir entnehmen, daß für einen algebraischen Raum X, definiert durch die etale Äquivalenzrelation $R \rightrightarrows U$, X_* eine Etalgarbe ist. Da aber X der Quotient von $R \rightrightarrows U$ in der Kategorie der Etalgarben ist, gibt es einen kanonischen Morphismus $\mathsf{X} \to \mathsf{X}_*$. In der Arbeit von Knutson [2] kann man ein Beispiel finden, in dem dieser kanonische Morphismus kein Isomorphismus ist, obwohl dort X_* ein Schema ist. Wir wollen nun hier untersuchen, wann $\mathsf{X} \to \mathsf{X}_*$ ein Isomorphismus ist.

Satz 3. *Ein algebraischer Raum X, definiert durch die etale Äquivalenzrelation $R \rightrightarrows U$, ist zu seiner geometrischen Realisierung X_* kanonisch isomorph genau dann, wenn der kanonische Morphismus $U \to \mathsf{X}_*$ etaliert ist.*

Korollar. *Wenn X zu X_* kanonisch isomorph ist, ist X ein Schema.*

Der Beweis des Korollars folgt aus Satz 2.

Beweis von Satz 3. Wir können nach Satz 2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X auch Etalgarbe auf der Kategorie der lokal geringten Räume ist (es ist ja nach Satz 2 die Einschränkung der Etaltopologie auf der Kategorie der lokal geringten Räume auf die Kategorie der Schemata gerade die Etaltopologie auf der Kategorie der Schemata). Wenn dann X mit seiner geometrischen Realisierung übereinstimmt, ist der kanonische Morphismus $U \to \mathsf{X}_*$ nach Definition des algebraischen Raumes etaliert.

Wir wollen nun annehmen, daß $U \to \mathsf{X}_*$ etaliert ist. Dann betrachten wir das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "a"'] & U \arrow[r] & X_* \\
U \times_{X_*} U \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & &
\end{tikzcd}$$

(a existiert aus Faserprodukteigenschaften, da X_* Quotient von $R \rightrightarrows U$ ist.)

Da $U \to \mathsf{X}_*$ etaliert ist (und natürlich surjektiv), ist

$$U \times_{\mathsf{X}_*} U \overset{b}{\underset{c}{\rightrightarrows}} U \to X$$

exakt, und (b, c) ist eine etale Äquivalenzrelation. Außerdem ist natürlich nach Definition $R \rightrightarrows U$ eine etale Äquivalenzrelation, somit ist a etaliert. Weiterhin ist a surjektiv (das folgt aus der Quotienteneigenschaft von X_*). Wir wenden nun auf das Diagramm X an und erhalten das folgende exakte Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X(X_*) \arrow[r] & X(U) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & X(R) \\
& & X(U \times_{X_*} U) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Das kanonische Element $U \to \mathsf{X}$ (aus der Definition des algebraischen Raumes) hat bei $\mathsf{X}(U) \rightrightarrows \mathsf{X}(R)$ bei beiden Abbildungen das gleiche Bild, denn X war ja Quotient von $R \rightrightarrows U$. Da nun nach dem Garbenaxiom $\mathsf{X}(\mathsf{X}_*) \to \mathsf{X}(U) \rightrightarrows \mathsf{X}(U \times_{\mathsf{X}_*} U)$ exakt ist und $\mathsf{X}(U \times_{\mathsf{X}_*} U) \to \mathsf{X}(R)$ injektiv (a war ja etaliert und surjektiv), hat $U \to \mathsf{X}$ ein Urbild in $\mathsf{X}(\mathsf{X}_*)$. Dieses definiert gerade die zur kanonischen Abbildung $\mathsf{X} \to \mathsf{X}_*$ inverse. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. *Sei* X *ein algebraischer Raum, definiert durch die Äquivalenzrelation* $R \rightrightarrows U$, *dann existiert ein größter offener Unterraum* W *von* X *mit* $\mathsf{W} = \mathsf{W}_*$. *Wenn* U *normal und von endlichem Typ über einem Körper ist, dann ist* W *charakterisiert durch die Bedingung* $\Omega^1_{U|\mathsf{X}_*} = 0$.

Der erste Teil der Bemerkung ist klar, da die Menge der Punkte, in denen eine Abbildung etaliert ist, offen ist. Zum zweiten Teil überlegt man sich nun leicht, wenn U normal und von endlichem Typ über einem Körper ist, daß dann auch X_* normal und von endlichem Typ über einem Körper ist (X_* ist ja Quotient der Äquivalenzrelation in der Kategorie der lokal geringten Räume). Die betrachtete Abbildung ist also in einem Punkt etaliert genau dann, wenn sie unverzweigt ist, d. h. genau dann, wenn $\Omega^1_{U|\mathsf{X}_*} = 0$ ist.

Literatur

[1] P. Gabriel, Construction de preschemas puotient, SGA **3**, Springer Lecture notes **151.**
[2] D. Knutson, Algebraic spaces, Springer Lecture notes Nr. 202.
[3] H. Kurke, G. Pfister und M. Roczen, Henselsche Ringe und algebraishe Geometrie, Verlag der Wissenschaften Berlin, erscheint.