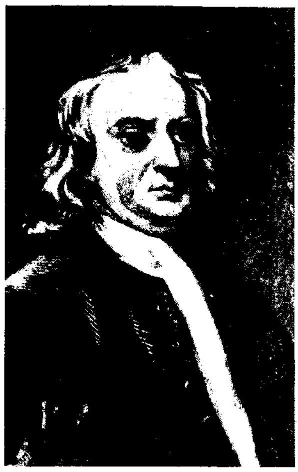
Algebraische Geometrie

Teil I

Dr. Gerhard Pfister und
Dr. Marko Roczen[1]),
Sektion Mathematik
der Humboldt-Universität zu Berlin

1

2



3

4

Von al-Hwârazmî bis Hilbert und E. Noether

Ein Perser namens al-Hwârazmî, der Anfang des 9. Jh. u. Z. in Bagdad lebte, verfaßte ein Buch mit dem arabischen Titel „Hisâb al-jabr w'al-muqâbalah" („Wissenschaft der Reduktion und des gegenseitigen Aufhebens"), eine Aufgabensammlung für Kaufleute und Testamentsvollstrecker. Aus dem Titel entstand durch Kürzung im Laufe der Zeit das Wort „Algebra".

Bis zur Entwicklung der Wissenschaft, die wir heute „Algebraische Geometrie" nennen, war jedoch ein weiter Weg. Beginnen wir ihn an einer Quelle der heutigen Mathematik! Im Gebiet zwischen Euphrat und Tigris lebten im 3. Jahrtausend v. u. Z. die Sumerer. Die Kenntnis ihrer Keilschrift ermöglichte uns Schlüsse auf ihre mathematischen Kenntnisse. So wissen wir, daß ihnen bereits die positiven ganzen und gebrochenen Zahlen bekannt waren. Da sie es noch nicht verstanden, Buchstabensymbole anstelle unbekannter Größen zu verwenden, waren die Autoren der uns bekannten Keilschrifttafeln stets gezwungen, ihre allgemeinen Methoden mit Hilfe von Beispielen darzulegen. Die Texte geben uns jedoch Aufschluß über eine sehr geschickte Behandlung linearer Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten. Wir finden auch viele Verfahren zum Auflösen von quadratischen bzw. biquadratischen Gleichungen, in einem Fall sogar die Auflösung einer speziellen kubischen Gleichung. Die Probleme, die so gelöst wurden, waren natürlich vorwiegend geometrischer Art und standen oft im Zusammenhang mit Fragen des praktischen Lebens wie etwa der Flächenberechnung.

Es verwundert nicht, daß die Entwicklung mathematischer Methoden gerade in der Blütezeit der babylonischen Kultur, in die auch die Dynastie des bekannten Herrschers Hammurapi (Anfang des 2. Jahrtausends v. u. Z.) fällt, besonders stark vorangetrieben wurde.

Für die weitere Entwicklung war es bedeutsam, daß zum Lösen algebraischer Probleme Buchstabensymbole eingeführt wurden. Dieser Schritt gelang aber erst griechischen Mathematikern und ist uns durch Diophant von Alexandria (um 250 u. Z.) überliefert.

Scholastische, dogmatische Auffassungen führten dazu, daß bis zum Anfang des 16. Jh. die Entwicklung auch auf mathematischem Gebiet im wesentlichen stagnierte. Erst die gesellschaftlichen und kulturellen Veränderungen der Renaissance, die in Italien begannen, befruchteten auch wieder die mcthematische Theorie. Geistiges Zentrum dieser Periode war die Universität Bologna, an der Scipio del Ferro arbeitete. Den dort unternommenen Anstrengungen verdanken wir die Lösungen der allgemeinen Gleichungen 3. und 4. Grades. Abgerundet wurden die Untersuchungen durch den Franzosen François Viète (Abb. 1). Nach diesen Erfolgen bemühten sich die Mathematiker des 17. und 18. Jh., auch für Gleichungen höheren Grades eine entsprechende Lösungsformel zu finden. Doch erst im 19. Jh. konnte hier durch Galois, der völlig neue Methoden einführte, eine befriedigende Antwort gefunden werden. Im nächsten Abschnitt werden wir genauer darauf eingehen.

Im 17. Jh. entwickelte sich allmählich eine Formelsprache der Algebra. Eine enge Verbindung von Algebra und Geometrie stellte René Descartes (Abb. 2) her. Durch die Einführung des nach ihm benannten Koordinatensystems (der „kartesischen Koordinaten") wurde man in die Lage versetzt, geometrische und algebraische Probleme mit der gleichen Methode zu behandeln. Hier war der Ansatzpunkt für die Entwicklung dessen, was wir heute algebraische Geometrie nennen. Sie begann mit der Untersuchung algebraischer Kurven und Flächen. Ansätze einer solchen Kurventheorie finden wir bei Isaac Newton (Abb. 3).

[1]) Die Autoren danken Herrn Prof. Dr. H. Grell für freundliche Unterstützung bei der Arbeit an diesem Artikel.

Abb. 1 François Vieta (Viète), 1540—1603
Abb. 2 René Descartes, 1596—1650
Abb. 3 Isaac Newton, 1643—1727
Abb. 4 Évariste Galois, 1811—1832
Abb. 5 Niels Henrik Abel, 1802—1829
Abb. 6 Bernhard Riemann, 1826—1866
Abb. 7 Richard Dedekind, 1831—1916
Abb. 8 David Hilbert, 1862—1943
Abb. 9 Emmy Noether, 1882—1935

9

5

6

7

8

Eine besondere Bedeutung kommt dem schon erwähnten französischen Mathematiker und Revolutionär Évariste Galois (Abb. 4) zu. Er wurde schon im Alter von 20 Jahren in einem von politischen Gegnern provozierten Duell getötet, hatte aber vorher durch die Begründung der Gruppentheorie die Grundlage der modernen Algebra geschaffen. Nachdem viele Versuche fehlgeschlagen waren, eine Lösungsformel für Gleichungen vom 5. Grade an zu finden, und dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (Abb. 5) der Nachweis gelungen war, daß die allgemeine Gleichung 5. Grades nicht durch Wurzelausdrücke auflösbar ist, gelang es Galois durch die Einführung einer neuen Struktur — der Gruppe[2] —, eine Übersicht über alle Gleichungen zu gewinnen, die durch Wurzelausdrücke auflösbar sind.[3] Der für die Gruppentheorie (erstmalig) charakteristische Ganzheitsaspekt war der in dieser Zeit vorherrschenden analytischen Denkweise so weit voraus, daß Galois von den meisten zeitgenössischen Kollegen nicht verstanden wurde.

Neben den vielen Anregungen, die die Galoistheorie für die weitere Entwicklung der Mathematik gegeben hat, ist auch noch zu erwähnen, daß einige klassische Probleme der Geometrie damit gelöst werden konnten, um deren Lösung sich Mathematiker zweier Jahrtausende vergeblich bemüht hatten. Zu diesen gehören die sog. „Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal". Nach der Galoistheorie ist für die Ausführbarkeit einer geometrischen Konstruktion ausschließlich mit Zirkel und Lineal entscheidend, ob bestimmte Gleichungen mit rationalen Koeffizienten allein unter Benutzung der vier Grundrechenarten und des Quadratwurzelziehens auflösbar sind. Damit konnte man z. B. die Dreiteilung eines Winkels, die Quadratur des Kreises (Verwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat) und die Verdopplung eines Würfels (Delisches Problem, Verwandlung eines Würfels in einen anderen mit doppeltem Rauminhalt) als unlösbar erkennen. Beispielsweise führt die Verdopplung des Würfels auf die Gleichung $y^3 = 2x^3$. Da die Auflösung dieser Gleichung eine Kubikwurzel erfordert, ist die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal nicht möglich.

In der Folgezeit trat die Untersuchung von nichtlinearen Gleichungen mit mehreren Unbestimmten immer mehr in den Vordergrund.

Bernhard Riemann (Abb. 6) betrachtete bereits Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in seinen „Untersuchungen über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Die bis dahin kaum ernstgenommenen nichteuklidischen Geometrien, in denen auf die Gültigkeit des Euklidischen Parallelenaxioms verzichtet wird, ergaben sich als Spezialfälle der Riemannschen Geometrie; sie spielen in der modernen Physik eine tragende Rolle, besonders in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Durch die von Max Noether (1844 bis 1926) eigenständig, mit wirklich algebraischen, geometrisch deutbaren Methoden begründete Theorie der algebraischen Funktionen gewann ab 1871 die algebraische Geometrie ein deutlicheres Profil, nachdem schon L. Kronecker (1823–1891)

[2] Eine Gruppe ist eine Menge, die folgende Eigenschaften aufweist:
1. Zwischen den Elementen der Menge ist eine Operation definiert, durch die jedem geordneten Paar von Elementen eindeutig ein Element derselben Menge zugeordnet wird.
2. Diese Operation ist assoziativ; anders ausgedrückt: Wird die Operation mit $\oplus$ bezeichnet, so gilt für alle Elemente a, b, c:
$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
3. Für alle Elemente a, b sind die Gleichungen $a \oplus x = b$ und $y \oplus a = b$ mit Elementen x, y der Menge lösbar (wobei wiederum mit $\oplus$ die Gruppenoperation bezeichnet wurde).
Gilt darüber hinaus für alle Elemente a; b hinsichtlich der Gruppenoperation das kommutative Gesetz — also $a \oplus b = b \oplus a$ — so heißt die Gruppe kommutativ.

[3] Dieser Zusammenhang ist besonders bemerkenswert: Über die Lösbarkeit einer Gleichung durch Wurzelausdrücke (ein kommutatives Problem) entscheidet praktisch die Struktur einer Gruppe (eine im allgemeinen nichtkommutative Struktur).

ab 1858 wesentliche, erst 1881 veröffentlichte Schritte zu einer rein algebraischen Behandlung gefordert und getan hatte. Im gleichen Jahr 1881 veröffentlichten Kronecker sowie 1882 R. Dedekind (Abb. 7) zusammen mit H. Weber (1843–1913) eine 1880 abgeschlossene *arithmetische* Begründung der Theorie der algebraischen Funktionen, die weitreichende Analogien zu der von Kronecker und vor allem Dedekind schon seit einem Jahrzehnt vorher entwickelten Theorie der algebraischen Zahlen zeigt. Und wieder waren es italienische Geometer, die sich um die Entwicklung verdient machten. Unter ihnen sind besonders Federigo Enriques (1871—1946) und Corrado Segre (1863—1924) zu nennen, die sich mit birationalen Transformationen algebraischer Flächen befaßten (Wir werden am Schluß des Artikels darauf eingehen).

Anfang des 20. Jh. setzte eine starke Entwicklung ein, die von der deutschen Schule ausging. Erwähnt werden sollen hier David Hilbert (Abb. 8) mit Untersuchungen auf dem Gebiet der Invariantentheorie sowie Emmy Noether (Abb. 9), die einen starken Einfluß auf die Entwicklung der Idealtheorie hatte.

Auflösen algebraischer Gleichungen mit einer Unbestimmten

Bis heute ist das Problem des Auflösens algebraischer Gleichungssysteme (aus dem sich die algebraische Geometrie entwickelte) noch nicht vollständig gelöst. Für gewisse Spezialfälle aber existiert eine umfangreiche Theorie, die unsere Untersuchungen erleichtert. Der einfachste Fall ist die algebraische Gleichung mit einer Unbestimmten. Die Theorie ihrer Lösung entstand im Zusammenhang mit der Entwicklung des Zahlbegriffs.

Schon in den frühesten Stadien der Menschheitsentwicklung waren die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... bekannt; diese jedoch reichten schon bald zum Lösen der auftretenden praktischen Probleme nicht mehr aus: Wollte man z. B. 3 Säcke Getreide unter 4 Personen aufteilen, so mußte man die Gleichung

$$3 = 4x$$

auflösen, die für natürliche Zahlen x keine Lösung hat. Also suchte und fand man Zahlen, die zwischen den natürlichen Zahlen lagen, die Brüche.

Wir wollen darauf verzichten, den langwierigen historischen Prozeß zu untersuchen, der zur Bildung der negativen Zahl führte. Man stellt aber schnell fest, daß die Gleichung

$$2x + 3 = 1$$

unter den positiven ganzen oder gebrochenen Zahlen keine Lösung hat. Man erkannte, daß zu jeder bisher bekannten Zahl a eine Zahl $-a$ existiert und überdies noch eine Zahl „Null", die sich stets als Summe von a und $-a$ ergibt. Damit hatte man den „Körper" der Rationalzahlen gefunden[4]).

In diesem Körper hat jede Gleichung

$$a_1x + a_0 = 0$$

mit vorgegebenen rationalen „Koeffizienten" a_1, a_0 genau eine Lösung x, falls $a_1 \neq 0$ ist.

Die Unbestimmte x kann in einer algebraischen Gleichung auch in höheren Potenzen $x^2, x^3, \ldots$ auftreten. Den höchsten vorkommenden Exponenten bezeichnet man als den Grad der Gleichung. Allgemein wäre demnach eine algebraische Gleichung zu schreiben:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Das Problem, so allgemein Gleichungen zu lösen, führte auf die Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen. Bereits im antiken Griechenland war bekannt: Aus Strecken, deren Maße rational sind, kann man solche Strecken konstruieren, die keine rationale Länge haben.

Sind beispielsweise a, b die Maßzahlen für die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für die Länge c der Hypotenuse

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (Satz des Pythagoras)}$$

Sei nun $a = b = 1$, dann ist $c^2 = 2$, und man beweist leicht, daß diese Gleichung für keine rationale Zahl c erfüllt sein kann. Nun liegt für die rationale Zahl $c_1 = 1{,}414$ der Wert $c_1^2 = 1{,}999396$ schon sehr dicht bei 2. Das berechtigt zu der Annahme, daß c_1 sehr dicht bei c liegt. Durch systematisches Probieren kann man weitere rationale Zahlen $c_2, c_3, \ldots$ finden, deren Quadrate die Zahl 2 beliebig gut von oben und unten annähern. Die gesuchte Zahl c läßt sich demnach (obwohl selbst keine Rationalzahl) ohne Schwierigkeit als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen auffassen.

In unserem Beispiel bezeichnen wir diesen Grenzwert mit dem Symbol $\sqrt{2}$.

In der gleichen Weise können wir mit allen Folgen rationaler Zahlen mit endlichem Grenzwert verfahren. Die so definierten Grenzwerte lassen sich unter Beibehaltung aller Rechengesetze dem Körper der rationalen Zahlen hinzufügen. Der so entstehende Körper heißt der Körper der reellen Zahlen.

Durch reelle Zahlen lassen sich nun schon alle Punkte einer Geraden arithmetisch erfassen. Aber es gibt immer noch Gleichungen, die durch keine reelle Zahl gelöst werden. Betrachten wir z. B. die Gleichung

$$x^2 = -1\,.$$

Es existiert keine reelle Zahl, für die sie erfüllt ist, da Quadrate reeller Zahlen

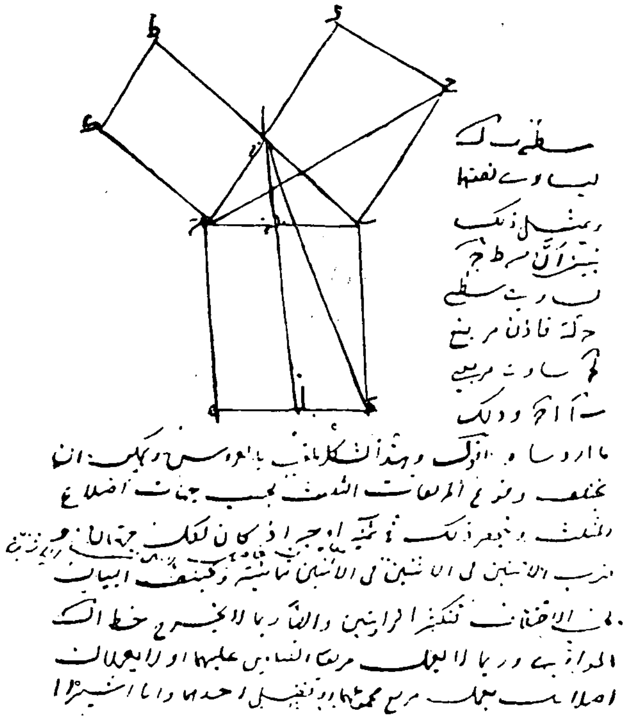


Abb. 10 Satz des Pythagoras in einer arabischen mathematischen Handschrift aus dem 14. Jh.

[4]) Ein Körper ist eine Menge, die folgende Eigenschaften aufweist:

1. Zwischen den Elementen der Menge sind zwei Operationen $\oplus$ und $\odot$ definiert, durch deren jede jedem geordneten Paar von Elementen eindeutig ein Element derselben Menge zugeordnet wird.
2. Hinsichtlich der Operation $\oplus$ bildet die Menge eine kommutative Gruppe, deren neutrales Element man mit 0 bezeichnet.
3. Bezüglich der Operation $\odot$ bildet die Menge eine kommutative Gruppe, wenn man das Element 0 ausnimmt.
4. Es gilt das Distributivgesetz $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ für beliebige Elemente a, b, c.

niemals negativ sind. Wir führen also formal ein Symbol i ein, das wir als Lösung dieser Gleichung definieren. Alle Zahlen $a + ib$ (a, b reell) fassen wir dann zusammen zum Körper der komplexen Zahlen. Dieser hat die gewünschte Eigenschaft, daß jede algebraische Gleichung in ihm (wenigstens) eine Lösung besitzt.

Nichts anderes besagt nämlich der Fundamentalsatz der Algebra: Ist n eine natürliche Zahl und $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ein Polynom n-ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1}, so besitzt $f(x)$ mindestens eine Nullstelle x_0 im Körper der komplexen Zahlen, d. h., es ist $f(x_0) = 0$.

Damit ist gesichert, daß alle algebraischen Gleichungen komplexe Lösungen haben. Man kann auch zeigen, daß ihre Anzahl niemals größer wird als der Grad der Gleichung. Das Problem, wie man diese Lösungen findet, bewegte Mathematiker lange Zeit hindurch; auch die Antwort, die sie fanden, war erstaunlich. Wir alle kennen aus der Schule eine Formel zum Lösen einer beliebigen quadratischen Gleichung. Italienische Mathematiker kannten schon im 16. Jh. das Prinzip der allgemeinen Lösungsformel für die Gleichung 3. Grades; aus dieser Zeit stammt auch eine Formel zum Lösen der Gleichung 4. Grades. Doch weitere Formeln wurden nicht gefunden. Wir haben schon zu Beginn beschrieben, wie sich aus dieser Frage eine der interessantesten Theorien der Algebra, die Galoistheorie, entwickelt hat.

Wenn wir uns nun dem Problem der Lösung algebraischer Gleichungen mit mehreren Unbestimmten zuwenden, so müssen wir uns von vornherein darüber im klaren sein, daß dabei die Verhältnisse ungleich komplizierter sind. Auch heute kann man numerische Lösungen meist nur dann angeben, wenn man das Problem auf lineare Gleichungen zurückführen kann. Die Anfänge solcher Untersuchungen liegen jedoch schon sehr weit zurück. Abb. 11 zeigt eine etwa 5000 Jahre alte babylonische Keilschrifttafel, auf der das folgende Problem behandelt wird:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, das durch die Strecke EF in zwei Parallelstreifen zerlegt wird (Abb. 12). Wir setzen $CD = b_1$, $EF = b_2$, $AB = b_3$, $BF = l_2$, $CF = l_1$ und bezeichnen mit F_1 die Fläche des Trapezes $EFCD$, mit F_2 die Fläche des Trapezes $ABFE$.

Abb. 11 Babylonische Keilschrifttafel mit Flächeninhaltsberechnungen

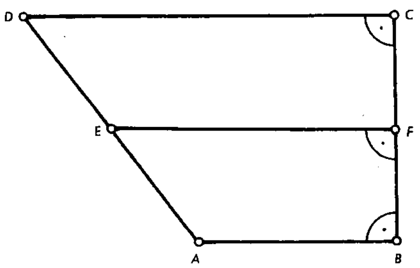


Abb. 12

Gegeben sind

$$F_1, F_2, l_1 : l_2 = a, b_1 - b_3 = c .$$

Gesucht sind

$$b_1, b_2, b_3, l_1, l_2 .$$

Das Problem führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem mit den 5 Unbestimmten b_1, b_2, b_3, l_1, l_2:

$$F_1 = \frac{1}{2} l_1(b_1 + b_2) \qquad (I)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} l_2(b_2 + b_3) \qquad (II)$$

$$l_1 = al_2 \qquad (III)$$

$$b_1 - b_3 = c \qquad (IV)$$

$$l_2(b_1 - b_2) = l_1(b_2 - b_3) \qquad (V)$$

Dieses System ist mittels einiger elementarer Substitutionen lösbar. Aber nicht alle Gleichungen, die ein harmloses Aussehen haben, lassen auch eine einfache Lösung zu. So hat z. B. die Gleichung

$$x^n + y^n = 1$$

im Körper der reellen Zahlen offenbar unendlich viele Lösungen. Welcher Teil dieser Lösungsmenge liegt aber im Körper der rationalen Zahlen vor?

Sei zunächst $n = 2$. Dann ist etwa das Zahlenpaar $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ eine Lösung. Nun sei aber n eine natürliche Zahl, die größer als 2 ist. Gibt es dann auch für ein solches n eine Lösung? Das ist bis heute ungeklärt. Der französische Mathematiker Fermat hinterließ einen Hinweis, er hätte gezeigt, daß es für $n > 2$ keine Lösung mehr gäbe. Für viele Spezialfälle (etwa für $n = 3, 4, \cdots, 1000$) konnte Fermats Behauptung bewiesen werden; die allgemeine Lösung steht aber noch aus.

Es erscheint also sinnvoll, die Fälle systematisch zu studieren, in denen mehr als eine Unbestimmte auftritt. Während algebraische Gleichungen mit einer Unbestimmten immer nur endlich viele Lösungen haben, wächst deren Zahl bei mehreren Unbestimmten über alle Grenzen, was ihre geometrische Deutung beträchtlich an Gewicht gewinnen läßt. Damit wollen wir uns im Teil II befassen.