Algebraische Geometrie

Teil II: Algebraische Kurven in der reellen Ebene — Singularitäten

Dr. Gerhard Pfister
Dr. Marko Roczen
Sektion Mathematik
der Humboldt-Universität zu Berlin

Die folgenden Betrachtungen sollen dem Studium algebraischer Kurven gewidmet sein. Zum besseren Verständnis beschränken wir uns dabei auf solche, die in einer Ebene liegen.

Bekanntlich kann man eine Kurve mit Hilfe eines Koordinatensystems beschreiben. Die Wahl eines derartigen Systems hat jedoch stets etwas Willkürliches an sich; dennoch werden auch wir zunächst davon ausgehen. Der Leser wird im Verlauf dieses Artikels erkennen, wie die moderne algebraische Geometrie sich ein Instrumentarium geschaffen hat, algebraische Gebilde auch unabhängig von Koordinatensystemen zu beschreiben.

Mit Hilfe eines ebenen kartesischen Koordinatensystems kann man jeden Punkt der Ebene durch ein reelles Zahlenpaar (X_0, Y_0) (seine Koordinaten) umkehrbar eindeutig charakterisieren. Betrachten wir nun ein nichtkonstantes Polynom $P = F(X, Y)$ in den Variablen X und Y. Jeder Nullstelle (X_0, Y_0) unseres Polynoms ist durch das Koordinatensystem ein Punkt der Ebene zugeordnet, und die Menge aller dieser Punkte (kurz: die Nullstellenmenge) bezeichnen wir als die durch P definierte algebraische Kurve. Natürlich kann es uns passieren, daß diese „Kurve" eine leere Menge ist[1], etwa für das Polynom $P = 1 + X^2 + Y^2$. In der algebraischen Geometrie verwendet man daher meist Koordinatensysteme, in denen beliebig komplexe Werte zugelassen sind; damit können nach dem Fundamentalsatz der Algebra solche Fälle nicht auftreten. Der Anschaulichkeit halber beschränken wir uns jedoch auf den Bereich der reellen Zahlen.

Sei nun etwa $P = X^2 - Y$. Die Nullstellenmenge dieses Polynoms ist durch die Bedingung $F(X, Y) = 0$ gegeben, dies ist äquivalent mit $Y = X^2$, d. h., wir erhalten die Normalparabel (Abb. 1). Eine besondere Eigenschaft dieser Kurve besteht darin, daß sie überall „glatt" ist, d. h., wir können durch jeden ihrer Punkte eine eindeutig bestimmte Tangente[2] legen. Nicht jede Kurve hat diese Eigenschaft. Es wird sich aber zeigen, daß algebraische Kurven diesbezüglich stets nur endlich viele Ausnahmepunkte (sog. singuläre Punkte) haben. Bevor wir

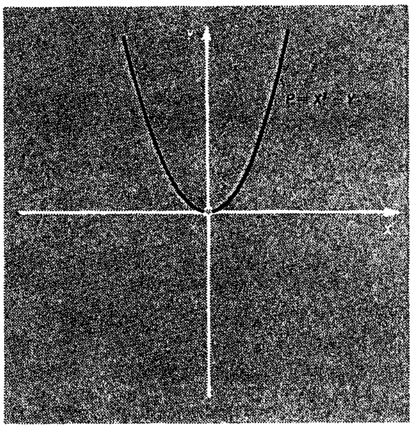


Abb. 1

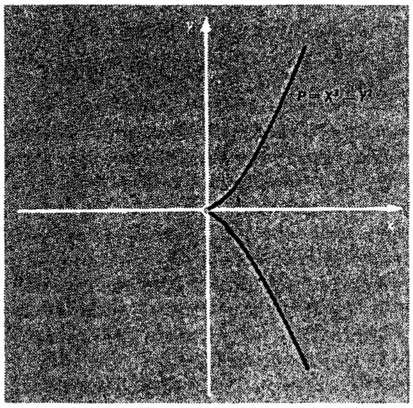
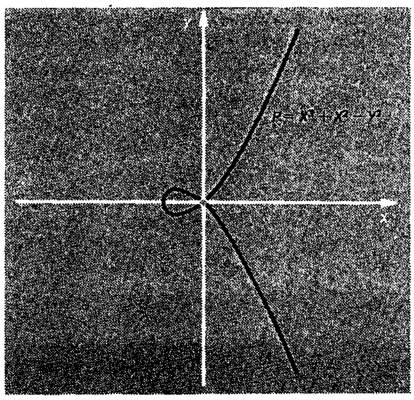


Abb. 2

Abb. 3



den Begriff „glatt" präzisieren, wollen wir einige Gegenbeispiele betrachten[3]).

Beispiel 0: $P = X^3 - Y^2$

Der Punkt (0, 0) ist eine „Spitze" der durch P definierten Kurve (Abb. 2).

Beispiel 1: $P = X^3 + X^2 - Y^2$

Die Kurve hat im Punkt (0, 0) einen „Doppelpunkt". In ihm kann man offenbar zwei verschiedene Tangenten an die Kurve legen (Abb. 3).

Beispiel 2: $P = Y^2 + 2X^2 - X^3$

Der Punkt (0, 0) ist ein Kurvenpunkt, obwohl in einer gewissen Umgebung kein weiterer Punkt der Kurve liegt. Wir bezeichnen ihn als „Einsiedlerpunkt" (Abb. 4).

Beispiel 3:
$P = -X^5 + X^4 + Y^2 - 2X^2Y$

In diesem Fall liegt im Punkt (0, 0) eine „Schnabelspitze" (auch „Rückkehrpunkt" genannt) (Abb. 5).

Beispiel 4:
$P = Y^4 + X^6 - X^5 - 2X^3Y^2$

Hier treten zwei Spitzen auf (Abb. 6).

Nach diesen Beispielen wollen wir klären, woran man erkennt, ob ein singulärer Punkt vorliegt. Dabei untersuchen wir die Gleichungen der Kurven. Unwesentlich ist, daß in unseren Beispielen stets ein singulärer Punkt im Koordinatenursprung lag. (Trifft dies nämlich nicht zu, so kann man es durch Verschieben der Koordinatenachsen stets erreichen;

[1]) Unter einer „leeren Menge" versteht man eine Menge, die kein Element enthält.

[2]) Dabei wollen wir hier unter einer Tangente jede Grenzlage einer beliebigen Folge von Sekanten verstehen. Diese Auffassung hat den Vorteil, daß wir bei Punkten, in denen diese Grenzlage nicht eindeutig bestimmt ist, immer noch von Tangenten sprechen können. Im Gegensatz hierzu steht die aus der Schule bekannte Auffassung, nur dann von einer Tangente zu sprechen, wenn diese Grenzlage eindeutig bestimmt ist. Es handelt sich hier um eine Definitionsfrage; beide Auffassungen sind gleichberechtigt. Für die Untersuchung von Singularitäten ist die hier verwendete Definition besser geeignet.

[3]) Wir weisen darauf hin, daß der Leser die angeführten Beispiele und die folgenden Aussagen sehr leicht selbst überprüfen kann. Erforderlich ist nur die Kenntnis einfachster Rechenregeln und einiger Grundbegriffe der Differentialrechnung.

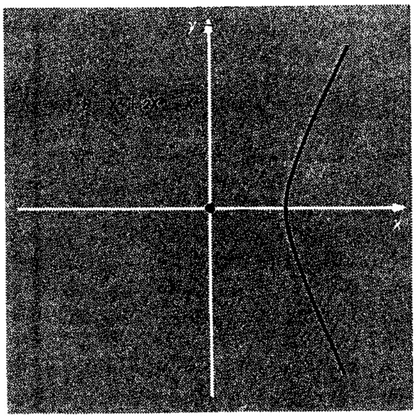


Abb. 4

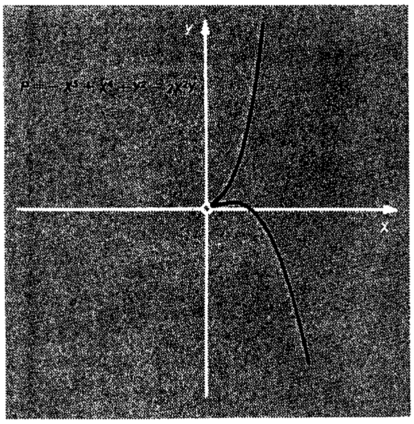
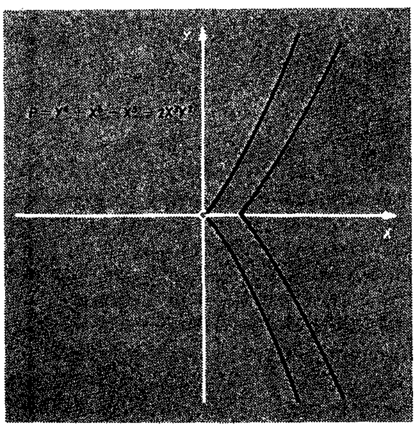


Abb. 5

Abb. 6



damit können wir es als gegeben annehmen.) Zweierlei ist nun bemerkenswert:
1. In dem Polynom $F(X, Y)$ kommt genau dann kein konstanter Summand vor, wenn (0, 0) zur durch F definierten Kurve gehört. Man überlegt nämlich leicht, daß genau dann $F(0, 0) = 0$ ist.
2. In allen betrachteten Beispielen fehlen in den Kurvengleichungen die linearen Glieder; d. h. die Glieder der Form $AX + BY$ (A, B reelle Zahlen).

Diese beiden Feststellungen liefern das algebraische Kriterium dafür, daß der Punkt (0, 0) singulärer Punkt der durch $F(X, Y)$ definierten Kurve ist. P hat dann also die Gestalt

$$F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2 + \text{Terme höherer Ordnung}$$

(A, B, C reelle Zahlen, die zunächst nicht gleichzeitig null sein sollen).

Durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems um den Punkt (0, 0) kann man erreichen, daß der Koeffizient B (bezüglich der neuen Koordinaten) zu Null wird. Das Polynom P wird dadurch zu

$$F(X, Y) = \bar{A}X^2 + \bar{C}Y^2 + \text{Terme höherer Ordnung}$$

(mit $C \neq 0$)

Nach Division von P durch C (dies ändert die Nullstellenmenge ja nicht) folgt daraus

$$F(X, Y) = LX^2 + Y^2 + \text{Terme höherer Ordnung}$$

mit $L = \frac{\bar{A}}{\bar{C}}$.

Wir erhalten so folgende Klassen von Singularitäten:

1. $L < 0$
Hier liegt ein Doppelpunkt vor (vgl. Beispiel 1).

2. $L > 0$
In diesem Fall liegt ein Einsiedlerpunkt vor (Beispiel 2).

3. $L = 0$
Hier liegt ein Rückkehrpunkt vor (Beispiel 3).

4. In der Ausgangsgleichung ist $A = B = C = 0$; in diesem Fall handelt es sich um eine sog. Singularität höherer Ordnung (Beispiel 4).

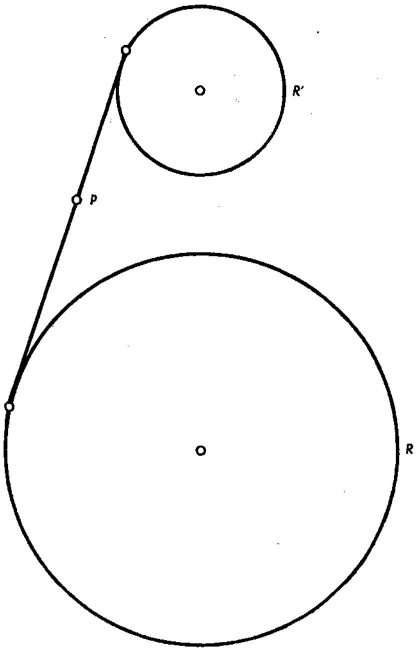


Abb. 7

Auf diese Weise hat man eine einfache Einteilung der Singularitäten gewonnen.

Wir haben gezeigt, wie man die Nullstellenmenge der Polynome zweier Veränderlicher qualitativ untersuchen kann. Unsere Art des Herangehens trägt natürlich nur einem von vielen Gesichtspunkten Rechnung. Ein Beispiel soll zeigen, daß auch in der Praxis algebraische Kurven mit singulären Punkten auftreten können.

Die Bewegung von Maschinenteilen kann häufig durch eine algebraische Kurve ausgedrückt werden.

Für die Konstruktion einer Maschine ist es wichtig zu wissen, wie welche Räder, Hebel und Kopplungsstangen in welcher Anordnung gewählt werden müssen, damit ein bestimmter Punkt, etwa der Punkt P auf der Kopplungsstange (Abb. 7), einen für die Herstellung eines Erzeugnisses notwendigen Weg beschreibt. Das Studium der durch den Punkt P beschriebenen Kurve ist also von großem Interesse; diese ist eine algebraische Kurve, die sog. Koppelkurve. Es kann vorkommen, daß eine bestimmte Arbeit nach einigen Zwischenschritten an dem Werkstück nochmals ausgeführt werden muß; d. h., es wird nötig, daß sich die Kurve, die der Punkt P beschreibt, überschneidet, also einen Doppelpunkt hat. Derartige singuläre Punkte können demnach tatsächlich auftreten. Ebenso kann es sein, daß ein Punkt P nach einem „Vorlauf" an bestimmter Stelle „zurückkehren" muß, die Kurve also einen Rückkehrpunkt hat. Das Problem, eine Übersicht über alle möglichen Bahnen des Punktes P zu finden, ist somit keineswegs trivial und die praktische Bedeutung seiner Lösung offensichtlich.