Beiträge zur Algebra und Geometrie
3 (1974), 123 – 130

Treuflache Äquivalenzrelationen in der Kategorie der lokal geringten Räume

GERHARD PFISTER

Anregung zu diesem Artikel gab der von M. RAYNAUD auf der Konferenz über lokale Körper in Driebergen gehaltene Vortrag „Passage au quotient par une relation d'équivalence plate". M. RAYNAUD untersuchte in seinem Vortrag im wesentlichen treuflache und quasikompakte Äquivalenzrelationen. Die zusätzliche Bedingung „quasikompakt" benötigt man unter anderem, um zeigen zu können, daß jedes Schema bezüglich der treuflachen und quasikompakten Topologie eine Garbe ist.
Wir wollen hier unsere Untersuchungen auf die Kategorie der lokal geringten Räume ausdehnen. Dabei werden wir eine Bedingung hinzunehmen, die „quasikompakt" ersetzt und für unsere Zwecke schwächer ist. Wir können dann zeigen, daß jeder lokal geringte Raum bezüglich dieser Topologie eine Garbe ist. Das gibt uns dann eine Möglichkeit, zu untersuchen, wann der Quotient einer treuflachen Äquivalenzrelation ein Schema ist.
Zunächst wollen wir einige sicher schon allgemein bekannte Techniken zum besseren Verständnis noch einmal zusammenstellen.

1. Das relative Spektrum in der Kategorie der lokal geringten Räume

Wir benötigen den folgenden Satz und werden seinen Beweis kurz skizzieren:

1.1. Satz. *Sei X ein lokal geringter Raum, A eine O_X-Algebra. Dann existiert ein lokal geringter Raum* $\mathrm{Spec}_X\, A$, *daß für alle p: $Y \to X$ stets* $\mathrm{Hom}_{O_X}(A, pO_Y) \cong \mathrm{Hom}_X(Y, \mathrm{Spec}_X A)$ *ist. Wenn q der dadurch kanonisch gegebene Morphismus von* $\mathrm{Spec}_X\, A$ *in X ist, dann ist $q_* \, O_{\mathrm{Spec}_X A}$ zu der folgenden Garbe kanonisch isomorph, die zur Prägarbe*

$$U \mapsto A(U)_{S(U)}$$

assoziiert ist, wobei $S(U) = \{f,\ f \in A(U),\ f_x$ Einheit in $A_x/m_x A_x$ für alle x aus U, m_x das Maximalideal von $O_{X,x}\}$.

Beweis. Wir werden $\operatorname{Spec}_X A$ konstruieren. Der zugrunde liegende Raum sei

$$\bigcup_{x \in X} \operatorname{Spec} A_x/m_x A_x \,.$$

Sei q die kanonische Projektion von dieser Menge in den zugrundeliegenden Raum von X. Wir führen die folgende Topologie ein: Sei U eine offene Teilmenge von X, $f \in A(U)$. Dann soll $D(U, f)$ die folgende Menge sein: $\{p \in q^{-1}(U)$ mit $f_p \notin p\}$. Diese Mengen seien eine Basis der offenen Mengen unseres $\operatorname{Spec}_X A$. $A^{\sim}$ sei nun die zur Prägarbe

$$W \subseteqq \operatorname{Spec}_X A \to \big((q^{-1}A)\,(W)\big)_{S(W)}$$

assoziierte Garbe, wobei $S(W) = \{f, f \in (q^{-1}A)(W)$ mit $f_p \notin p$ für alle p aus W, $f_p =$ Keim von f in $(q^{-1}A)_p = A_{q(p)}\}$. Wir definieren nun

$$\operatorname{Spec}_X A =: (\operatorname{Spec}_X A, A^{\sim}) \,.$$

Man kann sich nun durch eine leichte Rechnung überzeugen, daß der so definierte lokal geringte Raum $\operatorname{Spec}_X A$, versehen mit der kanonischen Abbildung q, die Behauptungen der Satzes erfüllt.

1.2. Bemerkung. *Mit den Bezeichnungen von* 1.1 *ist* $\operatorname{Spec}_X q_* O_{\operatorname{Spec}_X A} = \operatorname{Spec}_X A$. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Kotstruktion des relativen Spektrums.

1.3. Bemerkung. *Wenn mit den Bezeichnungen von* 1.1 *A eine treuflache O_X-Algebra ist, ist* $q_* O_{\operatorname{Spec}_X A} = A$.

Hilfssatz. *Sei A ein lokaler Ring. B eine treuflache A-Algebra, J ein Ideal von B, m das Maximalideal von A, dann ist $J + mB$ echt in B enthalten.*

Beweis. Wir können zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß J ein Maximalideal von B ist. Sei p der Durchschnitt von J und A. Wenn $p = m$ ist, sind wir fertig. Wenn p echt in m enthalten ist, gehen wir zum Restklassenring über: B/pB ist dann eine treuflache A/p-Algebra. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die folgende Situation voraussetzen:
A ist ein lokaler Integritätsbereich mit Maximalideal m, B ist eine treuflache A-Algebra und J ein Maximalideal von B, das, mit A geschnitten, das Nullideal ergibt. Wir müssen zeigen, daß dann $m = 0$ ist.
Da $J \cap A = 0$ ist, läßt sich der flache Morphismus $A \to B_J$ über den Quotientenkörper von $AQ(A)$ faktorisieren. Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B_J \arrow[r, two heads] & B/J =: K \\
& Q(A) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

mit flachen Morphismen $A \to B_J$ und $A \to Q(A)$.
Nun ist $K|Q(A)$ als Körpererweiterung flach und damit $K|A$ flach. Da B eine treuflache A-Algebra ist, folgt daraus, daß K über B flach ist, d. h., B/J ist flach über B. Dann muß aber J das Nullideal sein, also B ein Körper und damit $m = 0$ (wegen der Treuflachheit). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung. *Sei A ein lokaler Ring, B eine treuflache A-Algebra, m das Maximalideal von A, dann ist mB im Jacobsonradikal von B enthalten.*

Beweis von 1.3. Nach 1.1 ist $(q_* O_{\mathrm{Spec}_X A})_x = A_{xS_x}$ in einem Punkt x aus X, wobei $S_x = 1 + m_x A_x$ ist. Da A treuflach ist, ergibt sich aus der Folgerung, daß S_x nur aus Einheiten aus A_x besteht, d. h. $A_{xS_x} = A_x$. Damit ist die Bemerkung 1.3 bewiesen.

2. Die geometrische Realisierung eines Funktors

Wir wollen die Kategorie der kontravarianten Funktoren der Kategorie der lokal geringten Räume in die Kategorie der Mengen mit $\boldsymbol{F}$ bezeichnen. Es ist klar, daß jeder lokal geringte Raum X durch die Yonedaeinbettung aus $\boldsymbol{F}$ ist. Sei i der dadurch gegebene Einbettungsfunktor.

2.1. Satz. *Es existiert ein Funktor a von $\boldsymbol{F}$ in die Kategorie der lokal geringten Räume, der zu i linksadjungiert ist und $a \circ i =$ Identischer Funktor.*

Wir nennen diesen Funktor a die geometrische Realisierung und schreiben auch oft $a(L) =: L_*$.

Wir wollen zum Beweis nur die Konstruktion angeben. Sei $F \in \boldsymbol{F}$. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{F}$ den induktiven Limes über das gefilterte System der $F(\mathrm{Spec}\, k)$, wobei k alle Körper durchläuft. In $\boldsymbol{F}$ definieren wir nun die folgende Äquivalenzrelation: Es seien (l, K) und (l', K') aus $\boldsymbol{F}$ definiert durch $l\colon K \to F$ und $l'\colon K' \to F$. Es sei $(l, K) \sim (l', K')$, wenn

$$\begin{aligned}&\text{lim-ind}\,\{\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Spec}\, Z[T]), G \subseteqq F \text{ ein offener Subfunktor, so daß}\\ &\qquad (l, K) \in G \text{ ist}\}\\ &= \text{lim-ind}\,\{\mathrm{Hom}(G', \mathrm{Spec}\, Z[T]), G' \subseteqq F \text{ ein offener Subfunktor, so daß}\\ &\qquad (l', K') \in G' \text{ ist}\}\end{aligned}$$

ist (dabei ist Z der Ring der ganzen Zahlen).
Wir definieren nun als zugrundeliegenden Raum von $a(F)$ $F/\sim$ und führen die folgende Topologie ein: $U \subseteqq F/\sim$ heißt offen, wenn es einen offenen Subfunktor G von F gibt mit $G/\sim = U$. Es ist klar, daß es, wenn es einen solchen Subfunktor gibt, dann auch einen größten mit dieser Eigenschaft gibt, den wir mit G_U bezeichnen wollen. Jetzt können wir unsere Strukturgarbe definieren. Sei $U \subseteqq F/\sim$ offen,

$$O_{F/\sim}(U) =: \mathrm{Hom}(G_U, \mathrm{Spec}\, Z[T]).$$

Als $a(F)$ setzen wir nun $(F/\sim, O_{F/\sim})$.
Man überlegt sich leicht, daß $a(F)$ ein lokal geringter Raum ist und eine kanonische Abbildung $F \to a(F)$ existiert, die dann die Adjungiertheit ergibt.

Wir wollen aus dem Satz noch eine leichte Folgerung ziehen, die wir im folgenden benötigen werden.

2.2. Folgerung. *Sei $X_0 \rightrightarrows X_1$ eine Äquivalenzrelation (X_i lokal geringte Räume) und X der Quotient dieser Äquivalenzrelation in einer Kategorie von Funktoren, die die Kategorie der lokal geringten Räume umfaßt, dann ist $a(X)$ gleich dem Quotienten dieser Äquivalenzrelation in der Kategorie der lokal geringten Räume.*

3. Streng treuflache Morphismen

3.1. Definition. *Seien X und Y lokal geringte Räume. Ein treuflacher Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt streng treuflach, wenn für jeden Punkt y aus Y eine Umgebung U existiert und eine O_U-Algebra A, so daß sich der kanonische Morphismus* $\operatorname{Spec}_U A \to U$ *über $f^{-1}(U)$ faktorisieren läßt*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}_U A \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "l"'] & & U \\ & f^{-1}(U) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

und l treuflach ist.

3.2. Bemerkung.

(1) *Sei $X \to Y$ treuflach und lokal von endlichem Typ, dann ist $X \to Y$ streng treuflach.*

(2) *Seien X und Y Schemata, $X \to Y$ treuflach und quasikompakt, dann ist $X \to Y$ streng treuflach.*

Wir wollen hierzu nur bemerken, daß wenn X über Y lokal von endlichem Typ ist, dann nach Definition X lokal von der Gestalt $\operatorname{Spec}_Y O_Y[T_1, \dots, T_n]/J$ ist; damit ist (1) klar. Um (2) zu zeigen, wählen wir eine affine Teilmenge $U = \operatorname{Spec} A$ von Y, dann läßt sich wegen der Quasikompaktheit das Urbild von U durch endlich viele $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ überdecken. Die disjunkte Vereinigung dieser U_i ist gleich dem Spektrum des direkten Produkts des A_i und eine treuflache Überlagerung vom Urbild von U.

3.3 Bemerkung. *Ein treuflacher Morphismus f der lokal geringten Räume $X \to Y$ ist streng treuflach genau dann, wenn für jedes $y \in Y$ eine Umgebung U existiert und eine treuflache O_U-Algebra A, so daß sich der kanonische Morphismus* $\operatorname{Spec}_U A \to U$ *über f faktorisieren läßt, d. h. ein a existiert, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}U \arrow[rr] & & U \\ & \operatorname{Spec}_U A \arrow[ul, dashed, "a"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ wird.

Beweis. Wenn A treuflach ist, ist trivialerweise f streng treuflach, da q treuflach ist.
Wenn f streng treuflach ist, ist $q_* O_{\operatorname{Spec}_U A}$ eine treuflache O_U-Algebra, und wir können, wenn A nicht treuflach ist, nach 1.2. A durch $q_* O_{\operatorname{Spec}_U A}$ ersetzen.

Wir wollen nun zeigen, daß jeder lokal geringte Raum bezüglich der streng treuflachen Topologie eine Garbe ist.
Dazu ist offenbar folgender Satz zu zeigen:

3.4. Satz. *Seien X und Y lokal geringte Räume und $f\colon X \to Y$ ein streng treuflacher Morphismus, dann ist für jeden lokal geringten Raum Z das Diagramm*

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(X \times_Y X, Z)$$

exakt.

Um 3.4. zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß das Diagramm

$$X \times_Y X \rightrightarrows X \to Y$$

exakt ist, d. h. daß

(1) das entsprechende Diagramm der zugrunde liegenden Räume in der Kategorie der topologischen Räume exakt ist,

(2) das entsprechende Diagramm der Strukturgarben in der Kategorie der abelschen Garben exakt ist.

Man überzeugt sich sofort, daß bezüglich (1) das Diagramm der zugrunde liegenden Mengen in der Kategorie der Mengen exakt ist. Wir brauchen, um (1) zu zeigen, also nur noch nachzuweisen, daß eine Menge U in Y offen ist genau dann, wenn ihr Urbild $f^{-1}U$ in X offen ist.
Es ist klar, daß die noch nachzuweisenden Behauptungen lokaler Natur sind. Wir können also, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, daß $X = \mathrm{Spec}_Y A$ mit einer treuflachen O_Y-Algebra A ist (unser Morphismus war ja streng treuflach).
Wir können also die Folge

$$\mathrm{Spec}_Y(A \otimes_{O_Y} A) \rightrightarrows \mathrm{Spec}_Y A \to Y$$

betrachten $\big($es ist ja $\mathrm{Spec}_Y A \times_Y \mathrm{Spec}_Y A = \mathrm{Spec}_Y(A \otimes_{O_Y} A)\big)$.
Dabei haben wir noch zu zeigen, daß

(1′) eine Menge U von Y offen ist genau dann, wenn ihr Urbild in $\mathrm{Spec}_Y A$ offen ist,
(2′) das entsprechende Diagramm der Strukturgarben exakt ist.

Bei (1′) brauchen wir nur zu zeigen, daß dann, wenn das Urbild von U offen ist, auch U offen ist. Die andere Richtung ist trivial. Wir zeigen die äquivalente Behauptung: Wenn das Urbild einer Menge $V \subseteq Y$ abgeschlossen ist, dann ist auch V abgeschlossen. Sei das Urbild von V in $\mathrm{Spec}_Y A$ als abgeschlossene Teilmenge definiert durch die Idealgarbe J. Da A treuflach ist, ist $q_* O_{\mathrm{Spec}_Y A} = A$ (q die kanonische Abbildung von $\mathrm{Spec}_Y A$ in Y). J definiert über Y die Idealgarbe $J_0 =: q_* J \cap O_Y$. Dann ist $V = V(J_0) := \{y \in Y, J_{0,y} \neq O_{Y,y}\}$ abgeschlossen. Zunächst ist klar, daß V in $V(J_0)$ enthalten ist. Sei nun y aus $V(J_0)$, d. h. $J_{0,y} \neq O_{Y,y}$. Wir wollen zeigen, daß y aus V ist. Dazu müssen wir zeigen, daß ein x aus $q^{-1}V$ existiert mit $q(x) = y$.
Nun ist $J_{0,y} \neq O_{Y,y}$, also $(q_*J)_y \neq A_y$. A_y ist eine treuflache $O_{Y,y}$-Algebra, d. h. $m_{Y,y}A_y + (q_*J)_y \neq A_y$ (vgl. Hilfssatz). Es gibt also ein Primideal p aus A_y mit $p \supseteqq (q_*J)_y + m_{Y,y}A_y$ und $p \cap O_{Y,y} = m_{Y,y}$. Dieses p definiert einen Punkt aus $\mathrm{Spec}_Y A$ mit $q(p) = y$, und es ist wegen der Wahl von p

$$J_p \neq O_{\mathrm{Spec}_Y Y,p}\,,$$

d. h. $p \in q^{-1}V$. Damit ist (1′) bewiesen.

Um (2′) zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß die Folge der Garben in den Halmen exakt ist. Es ergibt sich:

$$O_{Y,y} \to (q_* O_{\mathrm{Spec}_Y A})_y \rightrightarrows \big((q_1 \circ q)_* \, O_{\mathrm{Spec}_Y(A \otimes_{O_Y} A)}\big)_y$$

(dabei sind q_1, q_2 die kanonischen Projektionen des Faserprodukts auf $\mathrm{Spec}_Y A$). Wenn wir jetzt die Treuflachheit von A ausnutzen und 1.3. anwenden, erhalten wir:

$$O_{Y,y} \to A_y \rightrightarrows A_y \otimes_{O_{Y,y}} A \,.$$

Diese Folge ist bekanntlich exakt, da A_y eine treuflache $O_{Y,y}$-Algebra ist (vgl. [1]). Damit ist der Satz 3.4. bewiesen.

Folgerung. *Jeder lokal geringte Raum ist eine Etalgarbe.*

Beweis. Etalmorphismen haben in der Kategorie der lokal geringten Räume lokal die Gestalt $\mathrm{Spec}_Y A \to Y$, wobei $A = O_Y[T]/F_G$ ist, F ein normiertes Polynom, G ein Vielfaches von F' (vgl. [2] oder [3]), sind also streng treuflach.

Folgerung. *Jeder lokal geringte Raum ist bezüglich der treuflachen lokal von endlichem Typ Topologie eine Garbe.*

Diese Folgerung ist auch klar, da ein treuflacher Morphismus, der lokal von endlichem Typ ist, streng treuflach ist (vgl. [2]).

4. Streng treuflache Äquivalenzrelationen

In diesem Teil wollen wir die Quotienten von streng treuflachen Äquivalenzrelationen in der Kategorie der Schemata untersuchen. Sei $R \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} U$ eine streng treuflache Äquivalenzrelation, d. h., a und b sind streng treuflache Morphismen und bilden eine Äquivalenzrelation, und Q der Quotient dieser Äquivalenzrelation in der Kategorie der Garben bezüglich der streng treuflachen Topologie. Da die geometrische Realisierung von Q, wie in 3. gezeigt wurde, auch eine Garbe in dieser Topologie ist, haben wir einen kanonischen Morphismus p, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dd, "p"] \\ U \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "c_*"'] & \\ & Q_* \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun untersuchen, wann Q mit seiner geometrischen Realisierung übereinstimmt, d. h., wann p ein Isomorphismus ist.

4.1. Satz. *Q stimmt mit seiner geometrischen Realisierung überein genau dann, wenn c_* ein streng treuflacher Morphismus ist.*

4.2. Korollar. *Wenn U quasikompakt ist und die geometrische Realisierung von Q ein Schema ist, dann stimmt Q mit seiner geometrischen Realisierung überein.*

Um das Korollar zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß c ein streng treuflacher Morphismus ist. Da die geometrische Realisierung Q_* von Q ein Schema ist, folgt das nach einem Satz von Raynaud (vgl. [4]).

Beweis von 4.1. Sei $Q = Q_*$, dann folgt aus der Quotienten- und Garbeneigenschaft, daß ein T existiert und ein streng treuflacher Morphismus $g: T \to Q$ und ein Morphismus $d: T \to U$ (g und d repräsentieren die identische Abbildung aus $Q(Q)$), so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "c"] & Q \\
& T \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "d"]
\end{tikzcd}$$

Das liefert uns das folgende Faserprodukt (h existiert aus Faserprodukteigenschaften):

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[r, "c"] & Q \\
& X \times_Y T \arrow[u] \arrow[r, "c'"'] & T \arrow[u, "g"'] \\
T \arrow[uur, "d"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "id_T"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nun ist c' treuflach, da Q der Quotient in der Kategorie der Garben bezüglich der streng treuflachen Topologie ist, dann ist aber auch t treuflach und damit d. Da g treuflach ist, folgt aus der Gleichung $c \circ d = g$, daß c treuflach ist. c ist streng treuflach, da g streng treuflach ist. Damit wäre die eine Richtung bewiesen.
Sei nun c_* streng treuflach. Dann betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "s"'] & U \arrow[r, "c_*"] & Q_* \\
U \times_{Q_*} U \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & &
\end{tikzcd}$$

(s existiert aus Faserprodukteigenschaften).
Da c_* streng treuflach ist, ist das Diagramm

$$U \times_{Q_*} U \rightrightarrows U \to Q_*$$

exakt. Wir wenden nun auf das obige Diagramm Q an und erhalten das folgende exakte Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Q(Q_*) \arrow[r] & Q(U) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & Q(R) \\
& & Q(U \times_{Q_*} U) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

c hat bei den Morphismen $Q(U) \rightrightarrows Q(R)$ das gleiche Bild, denn Q war ja der Quotient von $R \rightrightarrows U$. Da nun nach dem Garbenaxiom $Q(Q_*) \to Q(U) \rightrightarrows Q(U \times_{Q_*} U)$ exakt ist und $Q(U \times_{Q_*} U) \to Q(R)$ injektiv (s war ja streng treuflach), hat c ein Urbild in $Q(Q_*)$. Dieses definiert gerade die inverse Abbildung zu p. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] DIEUDONNÉ, J.: Fondements de la géométrie algébrique moderne, Adv. Math. *3* (1969), 322–413.
[2] KURKE, H., G. PFISTER und M. ROCZEN: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie. (Beim VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, in Vorbereitung.)
[3] PFISTER, G.: Algebraische Räume und ihre geometrische Realisierung. Math. Nachr. *57* (1973), 177–182.
[4] RAYNAUD, M.: Passage au quotient par une relation d'équivalence plate. Proc. Conf. Local Fields (Driebergen 1966).

Manuskripteingang: 28. 7. 1972

VERFASSER:

GERHARD PFISTER, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin