Einige Bemerkungen zur Struktur lokaler Henselscher Ringe

by PFISTER, G.

in: Beiträge zur Algebra und Geometrie = Contributions to algebra and geometry, (page(s) 47 - 52)
Lemgo; 1971

Beiträge zur Algebra und Geometrie
4 (1975), 47–51

Einige Bemerkungen zur Struktur lokaler Henselscher Ringe

Gerhard Pfister

Ausgangspunkt für diese Arbeit war die folgende von M. Artin in [1] gestellte Frage:

Es sei $(A, \mathfrak{m})$ *ein exzellenter lokaler Henselscher Ring. Hat dann* $(A, \mathfrak{m})$ *die Approximationseigenschaft?*

Dabei sagen wir, daß der Ring $(A, \mathfrak{m})$ die Approximationseigenschaft hat (und schreiben kurz $(A, \mathfrak{m}) \in \mathbf{AE}$), wenn stets folgendes gilt:

Es seien $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ *n Unbestimmte,* $F = (F_1, \ldots, F_m)$ *ein System von m Polynomen aus* $A[Y]$ *und* $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in A^{*n}$ *(dabei ist* A^* *die Komplettierung von* A*) gegeben mit* $F(\bar{y}) = 0$*. Dann existieren* $y_{i,c} \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$ *für jede natürliche Zahl c mit* $F(y_{1,c}, \ldots, y_{n,c}) = 0$ *und* $y_{i,c} \equiv \bar{y}_i \bmod \mathfrak{m}^c$.

M. Artin zeigte in [1]: *Es sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein lokaler Henselscher Ring, der Henselisierung eines Ringes von endlichem Typ über einem exzellenten diskreten Bewertungsring ist. Dann ist* $(A, \mathfrak{m}) \in \mathbf{AE}$.

Der Beweis basiert auf dem *Satz über implizite Funktionen,* dem *Jacobischen Kriterium* und dem *Weierstraßschen Vorbereitungssatz.*
In dieser Arbeit wollen wir nun eine größere Klasse von Ringen angeben, in der diese Sätze gelten und für die wir die Approximationseigenschaft nachweisen können. Dabei wollen wir uns auf solche Ringe beschränken, die den Restklassenkörper enthalten. Wir wollen dazu im ersten Teil der Arbeit untersuchen, wann ein Henselscher Ring seinen Restklassenkörper enthält.

1. Koeffizientenkörper Henselscher Ringe

Satz 1. *Es sei A ein lokaler noetherscher Ring, der in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen ist, K der Restklassenkörper. Wir wollen zusätzlich voraussetzen, daß K streng separabel ist, d. h., K ist eine algebraisch separable Erweiterung einer rein transzendenten Erweiterung des Primkörpers von K (Körper der Charakteristik Null,* *Körper von endlichem Typ über einem Primkörper und Körper von endlichem Typ über streng separablen Körpern sind streng separabel). Dann gilt:*

(1) *Wenn A^* den Restklassenkörper K enthält, dann enthält auch A den Körper K.*

(2) *Wenn A^* einen Cohen-Ring $\overline{R}$ enthält, dessen Restklassenkörper K ist, dann enthält A einen Henselschen diskreten Bewertungsring S mit $S^* = \overline{R}$.*

(3) *Ein nichtinjektiver Homomorphismus lokaler Ringe $R \to A^*$, R wie in (2), läßt sich stets über A faktorisieren.*

Beweis. Es sei P der Primkörper, über dem K definiert ist. Dann existiert eine Familie unabhängiger transzendenter Elemente (X_l), $X_l \in K$, so daß K über $P\big((X_l)\big)$ algebraisch separabel ist.
Wenn nun A^* den Körper K (bzw. einen Cohen-Ring) enthält, enthält A notwendigerweise P (bzw. $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen, p die Primzahl mit $\mathbf{Z}/p = P$). Es sei (T_l) eine Familie von Urbildern von (X_l) in A. Dann folgt aus der Unabhängigkeit der transzendenten Elemente, daß $P\big((T_l)\big) \subseteq A$ (bzw. $\mathbf{Z}[(T_l)]_{p\mathbf{Z}_p[(T_l)]} \subseteq A$) ist. Es sei M die Menge aller Körper $S \subseteq A$, die $P\big((T_l)\big)$ umfassen (bzw. die Menge aller diskreten Bewertungsringe S mit Bewertung p, $S \subseteq A$, die $\mathbf{Z}_p[(T_l)]_{p\mathbf{Z}_p[(T_l)]}$ umfassen). Nach dem Zornschen Lemma besitzt diese Menge ein maximales Element. Dieses sei der Körper (bzw. diskrete Bewertungsring) R. Wenn jetzt R (bzw. R/pR) echt in K enthalten ist, existiert ein x aus K, das nicht in R (bzw. R/pR) liegt. Dann ist x algebraisch separabel über $P\big((T_l)\big)$. Es gibt also ein normiertes irreduzibles Polynom $f(Y)$ über $P\big((T_l)\big)$ mit $f(x) = 0$ und $f'(x) \neq 0$. Es sei $t \in A$ ein Urbild von x und $F(Y)$ ein normiertes Urbild von $f(Y)$. Dann ist $F(t) \in \mathfrak{m}$ und $F'(t) \notin \mathfrak{m}$. Nun ist A in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen, also Henselsch. Es existiert also ein $h \in A$ mit $t - h \in \mathfrak{m}$ und $F(h) = 0$. Das ergibt einen Widerspruch zur Maximalität von R, denn in diesem Fall ist $R(h)$ (bzw. $R[h]_{pR[h]}$) in A enthalten. Damit ist (1) bewiesen.

Für (2) müssen wir noch zeigen, daß $R^* = \overline{R}$ ist. Da beide Ringe den gleichen Restklassenkörper haben und komplett sind, folgt die Isomorphie unmittelbar aus den Eigenschaften des Cohen-Ringes $\overline{R}$. Damit ist auch (2) bewiesen.

Es sei nun g der in (3) gegebene Homomorphismus von R in A^*. Wir können o. B. d. A. voraussetzen, daß Kern $(g) = p^n R$, $n \geqq 2$, ist (g war nach Voraussetzung nicht injektiv, und den Fall $n = 1$ haben wir in (1) abgehandelt). Dann ist $g(p) \neq 0$. Da eine Potenz von $g(p)$ Null wird und A in A^* algebraisch abgeschlossen ist, liegt $g(p)$ schon in A. Es sei $x = yp$. Dann ist $g(yp)\, g(p^{n-1}) = 0$ und $g(p^{n-1}) \neq 0$ und aus A, und damit ist $g(yp)$ aus A. Es sei nun $r \in R$ beliebig. Dann ist $g(pr) = g(p)\, g(r)$. Da $g(pr)$ und $g(p)$ aus A sind, ist es auch $g(r)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun ein Beispiel für einen Henselschen diskreten Bewertungsring geben, der in seiner Komplettierung algebraisch abgeschlossen ist, dessen Komplettierung den Restklassenkörper enthält, der Ring selbst aber nicht diese Eigenschaft hat:

Es sei $P = \mathbf{Z}/p$, $p \neq 0$ eine Primzahl. Weiterhin sei Y eine Variable, und $r(Y)$, $r_\nu(Y) \in P\big[[Y]\big]$, $\nu = 1, \ldots,$ seien unendlich viele algebraisch unabhängige Elemente. Es sei A die algebraische Abschließung von

$$P\big((X + Yr(Y)\big)\Big[\Big(\sqrt[p^\nu]{X} + Yr_\nu(Y)\Big)_{\nu=1,\ldots}\Big][Y]$$

in $K[[Y]]$, *wobei* $K = P\left(X, \left(\sqrt[p^\nu]{X}\right)_{\nu=1,\dots}\right)$ *ist; X ist dabei eine weitere Variable. Dann gilt:*

(1) *A ist ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung Y und Restklassenkörper K;*

(2) $A^* = K[[Y]]$;

(3) *bei geeigneter Wahl der* r_ν *ist A exzellent, d. h.* $A \in \mathbf{AE}$;

(4) *A enthält nicht den Restklassenkörper.*

2. Ringe mit Weierstraßschem Vorbereitungssatz

Die im folgenden betrachteten Ringe sollen stets den Restklassenkörper enthalten. Wir wollen in diesem Teil nun Ringe mit der folgenden Eigenschaft betrachten:

Definition 2. *Es sei R ein noetherscher regulärer lokaler Ring, der seinen Restklassenkörper K enthält. R heißt W-Ring, wenn*

(1) *R in* $R^* = K[[T_1, \dots, T_n]]$ *algebraisch abgeschlossen ist,*

(2) *in R der Weierstraßsche Vorbereitungssatz gilt, d. h., R wird bei Transformationen der Form* $T_i \to T_i + a_i T_k$, $a_i \in K$, *bzw.* $T_i \to T_i + T_k^{\alpha_k}$ *bzw. Vertauschung der* T_i *in sich übergeführt, und wenn* $f, g \in R$ *sind und f* T_n*-allgemein ist (d. h.* $f(T_1 = \dots = T_{n-1} = 0) \neq 0$) *und* $g = rf + \sum_{\nu=0}^{s-1} g_\nu T_n^\nu$ *die Zerlegung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes in* $K[[T_1, \dots, T_n]]$ *ist, dann sind die* $g_\nu, r \in R$,

(3) *in R der Satz über implizite Funktionen gilt, d. h., jede Gleichung der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(T_1, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots, T_n) \\ \vdots \\ G_k(T_1, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots, T_n) \end{pmatrix}$$

mit $G_i \in R$, $G_i(0, \dots, 0, T_{k+1}, \dots, T_n) \in (T_{k+1}, \dots, T_n)$ *und*

$$\left| \frac{\partial G_i}{\partial T_j}(0, \dots, 0, T_{k+1}, \dots, T_n) \right|_{i,j=1,\dots,k} \notin (T_{k+1}, \dots, T_n)$$

hat eine Lösung $(t_1, \dots, t_k)$ *aus* $R \cap K[[T_{k+1}, \dots, T_n]]$,

(4) *mit* $f \in R$ *stets* $\dfrac{\partial f}{\partial T_i} \in R$ *ist für alle i,*

(5) *für beliebiges* $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ *ein Ring B existiert,* $R[Y] \subseteq B \subseteq R[[Y]]$, *der noethersch, lokal, regulär ist mit* $B^* = R^*[[Y]]$ *und dem Maximalideal* $(T_1, \dots, T_n, Y_1, \dots, Y_N)$ *und die Eigenschaften* (1) *bis* (4) *hat.*

Satz 3. *Es sei R ein lokaler noetherscher regulärer Ring. Dann existiert ein kleinster Oberring* R^W *von R, so daß* R^W *ein W-Ring ist. Wir nennen* R^W *den W-Abschluß von R.*

Beweis. Die Existenz eines kleinsten Oberringes von R mit den Eigenschaften (1) bis (3) folgt mit Hilfe des Zornschen Lemmas, da die in den Gleichungen auftretenden Größen und Lösungen eindeutig bestimmt sind. Daß ein solcher Ring noethersch ist, folgt direkt aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz.

Definition 3. *Es sei R ein W-Ring. Mit $R[Y]$ wollen wir den W-Ring $R[Y]^W_{(Y)}$ bezeichnen, wobei $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ einige Variable sind.*

Bemerkung. *Ist R ein W-Ring, dann ist $R[Y, Z] = R[Y][Z]$.*

Satz 4. *Ist R ein W-Ring, dann gilt für $R[Y_1, \ldots, Y_n]$ das Jacobische Kriterium, d. h.:*

Es sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ ein Ideal aus $R[Y_1, \ldots, Y_n]$ mit $\mathfrak{a} \cap R = 0$, $\mathfrak{p}$ ein niederes Primideal von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{q} \cap R = 0$. Wenn $A' = R[Z_1, \ldots, Z_k]$ so gewählt werden kann, daß $R[Y_1, \ldots, Y_n]/\mathfrak{q}$ über A' endlich separabel ist (wobei die Endlichkeit oft realisiert werden kann[1])), dann ist $R[Y_1, \ldots, Y_n]_\mathfrak{q}/\mathfrak{a}R[Y_1, \ldots, Y_n]_\mathfrak{q}$ regulär genau dann, wenn der Rang von $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)$ modulo $\mathfrak{q}$ gleich der Höhe von $\mathfrak{p}$ ist.

Zum Beweis des Jacobischen Kriteriums wollen wir nur bemerken, daß man den entsprechenden Beweis des Jacobischen Kriteriums von NAGATA (vgl. [3]) direkt übertragen kann, da in $R[Y]$ der Weierstraßsche Vorbereitungssatz gilt.

Bemerkung. *Es sei $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ der Ring der algebraischen Potenzreihen, und $K[[T_1, \ldots, T_n]]$ der Ring der formalen Potenzreihen, $\mathbf{C}\{T_1, \ldots, T_n\}$ der Ring der konvergenten Potenzreihen in n Variablen $T_1, \ldots, T_n$ über dem Körper K bzw. $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen. Diese Ringe sind W-Ringe, und es ist*

$$K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle [Y] = K\langle T_1, \ldots, T_n, Y\rangle,$$

$$K[[T_1, \ldots, T_n]] [Y] = K[[T_1, \ldots, T_n, Y]]$$

und

$$\mathbf{C}\{T_1, \ldots, T_n\} [Y] = \mathbf{C}\{T_1, \ldots, T_n, Y\}.$$

Die Bemerkung folgt sofort aus den bekannten Weierstraßschen Vorbereitungssätzen über den entsprechenden Ringen.

Um nun zu zeigen, daß ein W-Ring $\in$ **AE** ist, beweist man folgenden allgemeineren Satz:

Satz 5. *Es sei R ein W-Ring, $F = (F_1, \ldots, F_m)$ ein System von m Gleichungen aus $R[Y_1, \ldots, Y_N]$ und $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ ein N-Tupel von Nichteinheiten aus R^{*N} mit $F(\bar{y}) = 0$. Dann existieren für jede vorgegebene natürliche Zahl c N-Tupel*

$$y_c = (y_{1,c}, \ldots, y_{N,c})$$

aus R^N mit $F(y_c) = 0$ und $y_{i,c} \equiv \bar{y}_i \mod \mathfrak{m}_R^c$.

Wir wollen hier den Beweis nicht detailliert führen, da er vollkommen analog zum Beweis von M. ARTINS Approximationssatz (vgl. [1]) geführt wird. Die dazu nötigen Grundlagen (Weierstraßscher Vorbereitungssatz, Satz über implizite Funktionen, Jacobisches Kriterium) haben wir in den Sätzen 3 und 4 bereitgestellt. Wir können also hier den Beweis analog zu M. ARTIN ablaufen lassen. Der Beweis wird induktiv über die Dimension von R geführt. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz gestattet es uns, unter Vergrößerung der Anzahl der Unbestimmten Y_i die Dimension von R zu verringern.

---

1) Für die spätere Anwendung in Satz 5 folgt sie aus der Existenz einer formalen Lösung. Das wurde von M. VAN DER PUT gezeigt (vgl. M. VAN DER PUT, A problem on coefficient fields and equations over local rings, erscheint demnächst). Herr VAN DER PUT hat Herrn POPESCU und mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, wofür ich mich an dieser Stelle bedanken möchte.

Bemerkung. Mit dem W-Abschluß haben wir die Möglichkeit, jedem lokalen regulären Ring einen Ring mit **AE** zuzuordnen. Die Bedingungen (1) und (3) des W-Abschlusses sind auch notwendig für die **AE**. Bei (2) scheint das nicht der Fall zu sein. Ein Beispiel dafür liegt zunächst jedoch nicht vor. Es wäre interessant, in diesem Zusammenhang direkt einen **AE**-Abschluß zu konstruieren.

LITERATUR

[1] Artin, M.: Algebraic Approximation of Structures over Complete Local Rings. Publ. math. IHES No. 36 (1969), 23–58.
[2] Kurke, H., G. Pfister und M. Roczen: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie. Berlin 1975.
[3] Nagata, M.: Local Rings. New York 1962.
[4] Pfister, G.: Ringe mit Approximationseigenschaft. Math. Nachr. *57* (1973), 169–175.
[5] Raynaud, M.: Travaux récents de M. Artin. Sém. Bourbaki 1968/69, No. 363. Lecture Notes in Math. 179, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, p. 279–295.

Manuskripteingang: 20. 5. 1973

VERFASSER:

Gerhard Pfister, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin