

Numerische Charakterisierung Quasihomogener GORENSTEIN-Kurvingsingularitäten

Von G.-M. GREUEL in Kaiserslautern, B. MARTIN, G. PFISTER in Berlin

(Eingegangen am 22. 2. 1984)

0. Einladung

Die vorliegenden Untersuchungen schließen sich an die Arbeiten von ZARISKI [11], REIFFEN [6], K. SAITO [7], SCHEJA-WIEBE [8] und KUNZ-RUPPERT [5] zur Charakterisierung quasihomogener isolierter Singularitäten an. Wir betrachten reduzierte Kurvingsingularitäten beliebiger Einbettungsdimension und zeigen, daß GORENSTEIN Kurvingsingularitäten genau dann quasihomogen sind, wenn MILNORZahl und DELIGNEZahl (zur Definition s. u.) übereinstimmen. Die Berechnung vieler Beispiele hat gezeigt, daß dies zumindest für Kurven, die in parametrisierter Form vorliegen, ein effektives numerisches Kriterium ist.

Sei $(X, \mathcal{O}) \subset (C^m, \mathcal{O})$ ein komplexer Raumkeim und $\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}$ der lokale Ring. (X, \mathcal{O}) heißt quasihomogen, falls es einen Isomorphismus von $\widehat{\mathfrak{D}}_{X, \mathcal{O}}$ auf $C[[x_1, \dots, x_m]]/I$ gibt, wobei I ein Ideal ist, das von quasihomogenen Polynomen, die alle das gleiche Gewicht aber eventuell verschiedene Grade haben, erzeugt wird. Dabei heißt ein Polynom $f \in C[x_1, \dots, x_m]$ quasihomogen vom Gewicht (w_1, \dots, w_m) und Grad d , w_i und d positive ganze Zahlen, wenn $f(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_m}x_m) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_m)$ ist für alle $\lambda \in C$ und alle $(x_1, \dots, x_m) \in C^m$. Wir bezeichnen also als quasihomogen solche Singularitäten, die eine „gute“ oder „kontrahierende“ C^* -Aktion besitzen.

O. ZARISKI charakterisiert in [11] (1966) die (irreduziblen, reduzierten) quasihomogenen ebenen Kurven als diejenigen, deren Differentialmodul maximale Torsion hat. K. SAITO zeigt in [7] (1971), daß eine isolierte Hyperflächensingularität (X, \mathcal{O}) definiert durch $f \in C[[x_1, \dots, x_m]]$ genau dann quasihomogen ist, falls f in dem Ideal liegt, das von $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ erzeugt wird, d. h. wenn es eine Derivation $D = \sum g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $g_i \in C[x_1, \dots, x_m]$, gibt mit $Df = f$. (Für ebene Kurven wurde dies schon von REIFFEN [6] (1969) gezeigt). In dem Beweis zeigt SAITO implizit, daß sein Kriterium äquivalent ist zur Existenz eines surjektiven $\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}$ -Homomorphismus $\Omega_{X, \mathcal{O}}^1 \rightarrow \mathfrak{m}_{X, \mathcal{O}}$, wobei $\Omega_{X, \mathcal{O}}^1$ den Differentialmodul und $\mathfrak{m}_{X, \mathcal{O}}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}$ bezeichnen. In der letztgenannten Form wurde SAITO's Kriterium von G. SCHEJA und H. WIEBE [8] (1977) auf vollständige Durchschnitte mit iso-

liert Singularität und von E. KUNZ und W. RUPPERT [5] (1977) auf beliebige reduzierte Kurvensingularitäten verallgemeinert.

Im Hyperflächenfall ist SAITO's Kriterium äquivalent dazu, daß die MILNORzahl $\mu = \mu(\mathbf{X}, \mathbf{O}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m] / \left(f, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m} \right)$ gleich der TJURINAZahl $\tau = \tau(\mathbf{X}, \mathbf{O}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m] / \left(f, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m} \right)$ ist. Sei allgemein (\mathbf{X}, \mathbf{O}) ein n -dimensionaler komplexer Raumkeim mit isolierter Singularität, (S, \mathbf{O}) die Basis der semiuniversellen Deformation von (\mathbf{X}, \mathbf{O}) und (E, \mathbf{O}) eine glättende Komponente von (S, \mathbf{O}) , d. h. eine irreduzible Komponente von (S, \mathbf{O}) über der die generische Faser F glatt ist. F heißt (nach Wahl eines geeigneten Repräsentanten der semiuniversellen Deformation) MILNORFaser einer Glättung von (\mathbf{X}, \mathbf{O}) und wir definieren

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} H_n(F, \mathbb{C}),$$

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} T_{\mathbf{X}, \mathbf{O}}^1 = (\text{embdim } (S, \mathbf{O})),$$

$$e = \dim (E, \mathbf{O})$$

τ ist für jede isolierte Singularität definiert und hängt nur von (\mathbf{X}, \mathbf{O}) ab. μ und e sind dagegen nur für glättbare Singularitäten (d. h. es gibt mindestens eine glättende Komponente) definiert und hängen i. A. von (E, \mathbf{O}) ab. Für Hyperflächen stimmen μ und τ mit den oben angegebenen Formeln überein. Offensichtlich gilt unter der Voraussetzung, daß (\mathbf{X}, \mathbf{O}) glättbar ist, $e = \tau$ genau dann, wenn (\mathbf{X}, \mathbf{O}) nicht obstruiert (d. h. (S, \mathbf{O}) ist glatt) ist, z. B. für vollständige Durchschnitte. Die Zahlen μ bzw. e lassen sich nach Formeln von BUCHWEITZ und GREUEL bzw. DELIGNE (s. Abschnitt 1) für beliebige nicht notwendig glättbare reduzierte Kurvensingularitäten definieren, sind also Invarianten von (\mathbf{X}, \mathbf{O}) . μ heißt die MILNORzahl und e die DELIGNEZahl von (\mathbf{X}, \mathbf{O}) . Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz. Sei (\mathbf{X}, \mathbf{O}) eine reduzierte GORENSTEIN Kurvensingularität. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) (\mathbf{X}, \mathbf{O}) ist quasihomogen
- ii) $\Omega_{\mathbf{X}, \mathbf{O}}^1$ hat maximale Torsion (s. Abschnitt 1)
- iii) $\mu(\mathbf{X}, \mathbf{O}) = e(\mathbf{X}, \mathbf{O})$.

Für irreduzible, glättbare Kurven wurde dieses Resultat bereits von GREUEL in [3] bzw. unabhängig davon in äquivalenter Formulierung von WALDI [10] gezeigt. Für den Beweis des Satzes, den wir in Abschnitt 2 bringen, verwenden wir wesentlich das Kriterium von KUNZ und RUPPERT. In Abschnitt 1 definieren wir die wesentlichen Invarianten und in Abschnitt 3 illustrieren wir an einem Beispiel die Notwendigkeit der Voraussetzungen des Satzes und formulieren einige Probleme und Vermutungen.

Nach Fertigstellung des Manuskriptes erhielten wir die Nachricht, daß

J. WAHL [9] inzwischen ein analoges Resultat für 2-dimensionale Singularitäten bewiesen hat. Er zeigt, daß für einen 2-dimensionalen vollständigen Durchschnitt mit isolierter Singularität $\mu = \tau$ genau dann gilt, wenn (X, O) quasihomogen ist. Wie wir im Fall von Kurven, beweist er für Flächen eine Verallgemeinerung auf GORENSTEINSingularitäten.

Die Arbeit ist im Herbst 1982 während eines Gastaufenthalts des erstgenannten Autors an der Humboldt-Universität in Berlin entstanden. Es ist ihm eine Freude, sich bei der Humboldt-Universität für die freundliche Einladung und bei den Mathematikern des Bereichs Algebra für die freundschaftliche und anregende Atmosphäre zu bedanken.

1. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt sei $(X, O) \subset (C^m, O)$ stets eine reduzierte Kurvensingularität. Die im folgenden zusammengestellten Beziehungen zwischen Kurvensingularitäten sind wohlbekannt. Sie ergeben sich aus [1], [3] und im GORENSTEINFall größtenteils auch aus [12].

Die MILNORZahl von (X, O) ist definiert als

$$(1.1.) \quad \mu = \mu(X, O) := \dim_C (\omega_{X,O} / d\mathfrak{D}_{X,O})$$

(cf. [1]). Dabei ist $\omega_{X,O} = \text{Ext}_{\mathfrak{D}_{C^m,O}}^{m-1}(\mathfrak{D}_{X,O}, \Omega_{C^m,O}^m)$ der dualisierende Modul von GROTHENDIECK und $d: \mathfrak{D}_{X,O} \rightarrow \omega_{X,O}$ die Komposition der kanonischen Klasse $c_X: \Omega_{X,O}^1 \rightarrow \omega_{X,O}$ (vgl. [1]) mit der universellen Derivation.

Wir benötigen die folgende konkrete Beschreibung von $\omega_{X,O}$ durch ROSENLICHT. Sei $n: (\overline{X}, \overline{O}) \rightarrow (X, O)$ die Normalisierung von (X, O) und bezeichne $\Omega_{(\overline{X}, \overline{O})}^1(n^{-1}(O))$ die meormorphen Differentialformen auf $(\overline{X}, \overline{O})$ mit Polen höchstens in $n^{-1}(O)$, dann gilt

$$(1.2.) \quad \omega_{X,O} = n_* \left\{ \alpha \in \Omega_{(\overline{X}, \overline{O})}^1(n^{-1}(O)) \mid \sum_{p \in n^{-1}(O)} \text{res}_p(f\alpha) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{D}_{X,O} \right\}.$$

Die in 1.1 definierte MILNORZahl verallgemeinert die bekannte MILNORZahl ebener Kurven und hat ähnlich wie dort eine topologische Bedeutung (vgl. [1]). Insbesondere gilt

$$(1.3.) \quad \mu = 2\delta - r + 1,$$

wobei $\delta = \dim_C n_* \mathfrak{D}_{(\overline{X}, \overline{O})} / \mathfrak{D}_{(X,O)}$ und r die Anzahl der irreduziblen Komponenten von (X, O) ist.

Die DELIGNEZahl von (X, O) ist definiert als

$$(1.4.) \quad e = e(X, O) := 3\delta - m_1,$$

wobei $m_1 = \dim_C \text{Hom}_{n_*} \mathfrak{D}_{(\overline{X}, \overline{O})} (n_* \Omega_{(\overline{X}, \overline{O})}^1, n_* \mathfrak{D}_{(\overline{X}, \overline{O})}) / \text{Hom}_{\mathfrak{D}_{X,O}} (\Omega_{X,O}^1, \mathfrak{D}_{X,O})$ ist. Ist (X, O) glättbar, so gilt nach DELIGNE [2] $e = \dim(E, O)$ für jede glättende Komponente (S, O) der Basis der semiuniversellen Deformation von (X, O) .

Die Einbettungsdimension $\tau = \text{emb dim } (S, \mathcal{O})$ heißt TJURINAZahl von (X, \mathcal{O}) , und es ist

$$(1.5.) \quad \tau = \dim_{\mathbb{C}} T_{X, \mathcal{O}}^1 = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}}^1(\Omega_{X, \mathcal{O}}^1, \mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}).$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gilt unter der Voraussetzung, daß (X, \mathcal{O}) glättbar ist,

$$(1.6.) \quad \tau(X, \mathcal{O}) \cong e(X, \mathcal{O}) \quad \text{und} \\ \tau(X, \mathcal{O}) = e(X, \mathcal{O}) \Leftrightarrow (X, \mathcal{O}) \quad \text{nicht obstruiert.}$$

In [3] wurden verschiedene äquivalente Formeln zu 1.4 angegeben (vgl. auch [12]). Daraus ergibt sich unter der zusätzlichen Verwendung, daß (X, \mathcal{O}) GORENSTEIN ist, die Formel

$$(1.7.) \quad e = \mu - \dim_{\mathbb{C}} (\Omega_{X, \mathcal{O}}^1 / d\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}} + T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1)$$

wobei $T\Omega_{X, \mathcal{O}}^p$ den Torsionsuntermodul von $\Omega_{X, \mathcal{O}}^p$ bezeichnet. Insbesondere gilt in diesem Fall $\mu - e \geq 0$ und die Differenz ist nichts anderes als die 1. Kohomologiegruppe des modifizierten POINCARÉ-Komplexes

$$(1.8.) \quad \tilde{\Omega}_{X, \mathcal{O}}^1 := \Omega_{X, \mathcal{O}}^1 / T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1$$

$$(1.9.) \quad H^1(\tilde{\Omega}_{X, \mathcal{O}}^1) = \Omega_{X, \mathcal{O}}^1 / d\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}} + T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1,$$

wobei $T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1$ den Torsionsunterkomplex von $\Omega_{X, \mathcal{O}}^1$ bezeichnet. Da (X, \mathcal{O}) reduziert ist, gilt

$$(1.10.) \quad d\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}} \cap T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1 = \mathcal{O},$$

$$(1.11.) \quad H^0(\Omega_{X, \mathcal{O}}^1) = \mathbb{C},$$

und die kanonische Abbildung

$$(1.12.) \quad T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1 \rightarrow \Omega_{X, \mathcal{O}}^1 / d\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}$$

ist eine Injektion endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorräume. Wir setzen

$$(1.13.) \quad \tau' = \tau'(X, \mathcal{O}) := \dim_{\mathbb{C}} T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1$$

$$(1.14.) \quad \mu' = \mu'(X, \mathcal{O}) := \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{X, \mathcal{O}}^1 / d\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}$$

und sagen, daß $\Omega_{X, \mathcal{O}}^1$ maximale Torsion besitzt, falls

$$(1.15.) \quad \tau'(X, \mathcal{O}) = \mu'(X, \mathcal{O})$$

gilt.

Da die Garbe Ω_X^1 auf $X - \{O\}$ lokal frei ist, gilt $T\Omega_{X, \mathcal{O}}^1 = H_{\{O\}}^1(\Omega_X^1)$, wobei $H_{\{O\}}^1(-)$ die lokale Kohomologie bezeichne. Nach dem lokalen Dualitätssatz von GROTHENDIECK gilt aber $\dim_{\mathbb{C}} H_{\{O\}}^1(\Omega_X^1) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}}^1(\Omega_{X, \mathcal{O}}^1, \mathfrak{D}_{X, \mathcal{O}}) = \tau(X, \mathcal{O})$. Wir erhalten somit für eine reduzierte GORENSTEIN Kurve (X, \mathcal{O})

$$(1.16.) \quad \tau(X, \mathcal{O}) = \tau'(X, \mathcal{O}).$$

Für beliebiges reduziertes (X, \mathcal{O}) gibt es die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T\Omega_{X,\mathcal{O}}^1 \rightarrow \Omega_{X,\mathcal{O}}^1/d\mathfrak{D}_{X,\mathcal{O}} \xrightarrow{c_X} \omega_{X,\mathcal{O}}/d\mathfrak{D}_{X,\mathcal{O}} \rightarrow \omega_{\mathcal{O},X}/c_X(\Omega_{X,\mathcal{O}}^1) \rightarrow 0.$$

Wie in [1] setzen wir

$$(1.17.) \quad \lambda = \lambda(X, \mathcal{O}) := \dim_{\mathbb{C}} \omega_{X,\mathcal{O}}/c_X(\Omega_{X,\mathcal{O}}^1).$$

Aus 1.16 und 1.7 folgt für (X, \mathcal{O}) GORENSTEIN

$$(1.18.) \quad e = \mu - \mu' + \tau' = \lambda.$$

2. Quasihomogene GORENSTEINSingularitäten

Wir beweisen jetzt den in der Einleitung angekündigten Satz.

2.1. Satz. *Sei (X, \mathcal{O}) eine reduzierte GORENSTEIN Kurvensingularität. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) (X, \mathcal{O}) ist quasihomogen
- (2) $\mu(X, \mathcal{O}) = e(X, \mathcal{O})$,
- (3) $\mu(X, \mathcal{O}) = \lambda(X, \mathcal{O})$,
- (4) $\tau'(X, \mathcal{O}) = \mu'(X, \mathcal{O})$,
- (5) Der modifizierte POINCARÉ-Komplex

$$0 \rightarrow C \rightarrow \mathfrak{D}_{X,\mathcal{O}} \xrightarrow{d} \tilde{\Omega}_{X,\mathcal{O}}^1 \rightarrow 0$$

ist exakt,

- (6) Es gibt einen surjektiven $\mathfrak{D}_{X,\mathcal{O}}$ -Homomorphismus von $\Omega_{X,\mathcal{O}}^1$ auf $\mathfrak{m}_{X,\mathcal{O}}$.

2.2. Korollar. *Ist (X, \mathcal{O}) zusätzlich glättbar und nicht obstruiert, (z. B. vollständiger Durchschnitt oder von der Einbettungsdimension ≤ 4) dann ist (X, \mathcal{O}) genau dann quasihomogen, wenn $\mu = \tau$ gilt.*

Beweis des Satzes.

- (1) \Rightarrow (2) siehe [3] Theorem 2.5 (3).
- (2) \Leftrightarrow (3) siehe 1.18
- (3) \Leftrightarrow (4) siehe 1.18
- (4) \Leftrightarrow (5) siehe 1.9, 1.11, 1.12
- (6) \Leftrightarrow (1) ist das Kriterium von KUNZ und RUPPERT [5].

Als letztes zeigen wir die Implikation (5) \Rightarrow (6). Sei $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{X,\mathcal{O}}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{X,\mathcal{O}}$, $\bar{\mathfrak{D}} = n_* \mathfrak{D}_{(\bar{X}, \bar{\mathcal{O}})} = \bigoplus_{i=1}^r C\{t_i\}$, $\bar{\mathfrak{m}}$ das Jacobsonradikal von $\bar{\mathfrak{D}}$, $\Omega = \Omega_{X,\mathcal{O}}^1$, $\bar{\Omega} = n_* \Omega_{(\bar{X}, \bar{\mathcal{O}})}^1$ und sei K der Quotientenring von $\bar{\mathfrak{D}}$.

Wir müssen zeigen, daß es unter der Voraussetzung $d\mathfrak{D} + T\Omega = \Omega$ einen surjektiven \mathfrak{D} -Homomorphismus $\Omega \rightarrow \mathfrak{m}$ gibt, d. h. einen \mathfrak{D} -Isomorphismus $\Omega/T\Omega \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}$. Dazu betten wir mittels der Abbildung $\Phi: \bar{\Omega} \otimes K \rightarrow K$, definiert durch $dt_i \otimes t_i$, die

uns interessierenden Moduln in K ein und zeigen, daß es einen \mathfrak{D} -Isomorphismus von $\Phi(\Omega) =: M$ auf \mathfrak{m} gibt. Wir benutzen die Beschreibung des dualisierenden Moduls $\omega := \omega_{X, \mathfrak{O}} = \{gdt \in \bar{\mathfrak{D}} \otimes K \mid \text{res}(f \cdot gdt) = 0 \forall f \in \mathfrak{D}\}$ (vgl. 1.2.), wobei wir zur Abkürzung

$$gdt = (g_1(t_1), \dots, g_r(t_r)) (dt_1, \dots, dt_r) = \sum_{i=1}^r g_i dt_i$$

und $\text{res}(g) := \text{res}(g \cdot dt) = \sum_{i=1}^r \text{res}(g_i dt_i)$ setzen. Nach Definition von Φ ist

$$t^{-1}\Phi(\omega) = \{g \in K \mid \text{res}(f \cdot g) = 0 \forall f \in \mathfrak{D}\}.$$

Da \mathfrak{D} GORENSTEIN'sch ist, gibt es ein $\bar{\mathfrak{D}}$ -Erzeugendes $f = (f_1, \dots, f_r)$ des Konduktorieals von $\mathfrak{D} \subset \bar{\mathfrak{D}}$ mit

$$ft^{-1}\Phi(\omega) = \mathfrak{D} \quad (\text{vgl. [3]}).$$

Nach Voraussetzung ist nun $M = \Phi(d\mathfrak{D})$. Wir zeigen, daß es Einheiten $u_i \in \mathbb{C}\{t_i\}$ gibt, $u = (u_1, \dots, u_r)$, mit $uM = \mathfrak{m}$. Die Multiplikation mit u liefert uns dann den gewünschten \mathfrak{D} -Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}$.

Zunächst wollen wir uns überlegen, daß es genügt, Einheiten u_i zu konstruieren, so daß

$$f^{-1}uM \subseteq f^{-1}\mathfrak{D} = t^{-1}\Phi(\omega).$$

In diesem Fall ist zunächst $uM \subseteq \mathfrak{m}$, da nach Definition von Φ $M \subseteq \bar{\mathfrak{m}}$ ist. Weiterhin ist $\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}/uM = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}/M = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{D}}/d\mathfrak{D}$, weil $d\mathfrak{D} + T\Omega = \Omega$ ist und

$$\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{D}}/d\mathfrak{D} = \dim_{\mathbb{C}} \omega/d\mathfrak{D} - \dim_{\mathbb{C}} \omega/\bar{\mathfrak{D}} = \mu - \delta$$

(weil die Folge $0 \rightarrow \bar{\mathfrak{D}}/d\mathfrak{D} \rightarrow \omega/d\mathfrak{D} \rightarrow \omega/\bar{\mathfrak{D}} \rightarrow 0$ exakt ist). Andererseits ist $\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m} = \delta - r + 1 = \mu - \delta$, d. h. $\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}/uM = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}$. Wegen $uM \subseteq \mathfrak{m}$ folgt daher $uM = \mathfrak{m}$. Wenn nun für ein $u \in \bar{\mathfrak{D}}$

$$f^{-1}uM \subset t^{-1}\Phi(\omega)$$

ist, muß wegen $t^{-1}\Phi(\omega) = \{g \in K \mid \text{res}(hg) = 0 \forall h \in \mathfrak{D}\}$

$$\text{res}\left(f^{-1}uht \frac{dg}{dt}\right) = 0$$

sein für alle $h, g \in \mathfrak{D}$, $\left(M = \left\{t \frac{dg}{dt} \mid g \in \mathfrak{D}\right\}\right)$. Nun ist $d\mathfrak{D} + T\Omega = \Omega$, d. h. $d\mathfrak{D}$ ist ein \mathfrak{D} -Modul und damit $ht \frac{dg}{dt} = t \frac{d\bar{g}}{dt}$ für ein $\bar{g} \in \mathfrak{D}$. Es ist also $f^{-1}uM \subset t^{-1}\Phi(\omega)$, wenn

$$\text{res}\left(f^{-1}ut \frac{dg}{dt}\right) = 0$$

ist für alle $g \in \mathfrak{D}$ (dabei genügt es natürlich $g \in \mathfrak{m}$ zu betrachten).

Wir zeigen nun, daß es Einheiten u_1, \dots, u_r gibt, so daß

$$\text{res}\left(f_i^{-1}u_i t \frac{dg_i}{dt_i}\right) = \text{res}(f_i^{-1}g_i)$$

ist für alle $g \in \mathfrak{m}$. Dann ist insbesondere mit $u = (u_1, \dots, u_r)$

$$\text{res} \left(f^{-1} u t \frac{dg}{dt} \right) = \text{res} (f^{-1} g)$$

und da $f^{-1} \in t^{-1} \Phi(\omega)$ ist, d. h. $\text{res} (f^{-1} g) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{m}$, erhalten wir das gewünschte Resultat.

Sei nun

$$f_i^{-1} = \sum_{j \geq 0} \gamma_{ij} t_i^{-\alpha_i + j} .$$

Wir können annehmen, daß $\alpha_i > 1$ ist.

Wir definieren

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \begin{cases} \frac{\gamma_{ij}}{\alpha_i - j - 1} & \text{für } 0 \leq j < \alpha_i - 1 \\ \gamma_{ij} & \text{für } j \geq \alpha_i - 1 . \end{cases}$$

Dann gibt es sicherlich Einheiten u_i so daß

$$u_i f_i^{-1} = \sum_{j \geq 0} \tilde{\gamma}_{ij} t_i^{-\alpha_i + j} .$$

Ist nun $g = (g_1, \dots, g_r) \in \mathfrak{m}$ und

$$g_i = \sum_{l \geq 0} a_{il} t_i^{m_i + l} \quad (m_i \geq 1) ,$$

dann gilt

$$\text{res} (f_i^{-1} g_i) = \sum_{\substack{j, l \geq 0 \\ j+l - \alpha_i + m_i = 1}} \gamma_{ij} a_{il}$$

und

$$\begin{aligned} \text{res} \left(u_i f_i^{-1} t_i \frac{dg_i}{dt_i} \right) &= \sum_{\substack{j, l \geq 0 \\ j+l - \alpha_i + m_i = 1}} \tilde{\gamma}_{ij} (m_i + l) a_{il} \\ &= \sum_{\substack{j, l \geq 0 \\ j+l - \alpha_i + m_i = -1}} \tilde{\gamma}_{ij} (\alpha_i - j - 1) a_{il} \\ &= \text{res} (f_i^{-1} g_i) . \end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

3. Bemerkungen und Probleme

Wir geben zunächst ein Beispiel für eine reduzierte Kurvensingularität (X, O) mit folgenden Eigenschaften

- (1) (X, O) ist vollständiger Durchschnitt
- (2) $\mu > \tau = e$

- (3) alle Zweige sind nicht Gorensteinsch und nicht quasihomogen,
- (4) für alle Zweige gilt $\mu = e = \tau$ und $\tau' = \mu'$.

Das Beispiel zeigt, daß die Voraussetzung GORENSTEIN in Satz 2.1 notwendig ist und daß man sich bei der Untersuchung der in der Arbeit betrachteten Probleme nicht auf die Untersuchung der einzelnen Zweige beschränken kann.

Unser Beispiel ist der vollständige Durchschnitt $(X, O) \subset (C^3, O)$ definiert durch die Polynome $x^6 - y^5$ und $z^3 - y(x+y)^3$. (X, O) ist semiquasihomogen mit den quasihomogenen Anfangsformen $x^6 - y^5$ und $z^3 + yx^3$ vom Gewicht (5, 6, 7) und Grad 30 bzw. 21. Dann ist $\mu(X, O) = 100$ (vgl. [4]). Eine leichte Rechnung zeigt, daß (X, O) drei zueinander isomorphe Zweige (X_ϵ, O) mit der Parametrisierung $x = t^5, y = t^6, z = \epsilon(t^7 + t^8), \epsilon^3 = 1$ hat. Die Zweige sind nicht GORENSTEIN und nicht quasihomogen (vgl. [3]). Insbesondere ist (X, O) nicht quasihomogen und es gilt $\mu(X, O) > \tau(X, O) = e(X, O) = 94$. Für die einzelnen Zweige gilt $\mu = e = \tau = 12$.

Sind die äquivalenten Bedingungen von Satz 2.1 erfüllt, so folgt, daß für $(X, O) \subset (C^m, O)$ der gewöhnliche POINCARÉ-Komplex

$$O \rightarrow C \rightarrow \mathcal{O}_{X,O} \xrightarrow{d} \Omega_{X,O}^1 \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \Omega_{X,O}^m \rightarrow O$$

exakt ist. Für isolierte Hyperflächensingularitäten folgt aus dem Resultat von SAITO und aus Ergebnissen von BRIESKORN und SEBASTIANI (vgl. [7]), daß die Exaktheit des POINCARÉ-Komplexes äquivalent zur Quasihomogenität ist. Es stellt sich also

Problem 1. Impliziert unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 die Exaktheit des POINCARÉ-Komplexes die Quasihomogenität?

Es gibt Anzeichen dafür, daß dies eventuell nicht der Fall ist. In Dimension 2 gibt es solche Beispiele. Für die Flächensingularität definiert durch

$$x^2 + y^2 + uv, \quad u^2 + v^3 + xy$$

gilt $\mu = \tau' = 8$ und $\tau = 7$, aber der POINCARÉ-Komplex ist exakt:

Man rechnet nach, daß $\dim \Omega^4 = 1, \dim \Omega^3 = 9$ ist. Da $\mu = \tau'$ ist, ist der Komplex \tilde{Q} exakt. Es reicht deshalb aus, die Exaktheit von TQ zu zeigen. Wegen [6] ist

$$\begin{array}{ccccccc} T\Omega^2 & \rightarrow & T\Omega^3 & \rightarrow & T\Omega^4 & \rightarrow & 0 \quad \text{exakt.} \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \Omega^3 & & \Omega^4 & & \end{array}$$

Da $d\Omega^2 = dT\Omega^2$ (\tilde{Q} ist exakt) und $\dim d\Omega^2 = \dim d\Omega^3 - \dim \Omega^4$ folgt die Behauptung.

Satz 2.1 gibt eine numerische Charakterisierung quasihomogener GORENSTEINSINGULARITÄTEN. Es stellt sich die Frage, ob eine numerische Charakterisierung für Nicht-GORENSTEINKURVEN existiert. Dazu bemerken wir, daß in [3] gezeigt wurde, daß für eine beliebige reduzierte quasihomogene Kurvensingularität (X, O) gilt:

$$e = \mu + t - 1,$$

wobei $t = t(\mathbf{X}, \bar{h}\mathbf{O}) = \dim_{\mathbb{C}}(\omega_{\mathbf{X}, \mathbf{O}}/m\omega_{\mathbf{X}, \mathbf{O}})$ der COHEN-MACANLY Typ von (\mathbf{X}, \mathbf{O}) ist. Es ist $t = 1$ genau dann, wenn (\mathbf{X}, \mathbf{O}) GORENSTEIN ist.

Problem 2. Gilt stets $e \cong \mu + t - 1$? Wir vermuten dies zumindest für glättbare Kurvensingularitäten.

Problem 3. Impliziert $e = \mu + t - 1$, daß (\mathbf{X}, \mathbf{O}) quasihomogen ist?

In [3] remark 2.6 (2) wurde gezeigt, daß die Antwort auf Problem 2 und 3 „ja“ ist, falls (\mathbf{X}, \mathbf{O}) irreduzibel ist und für die zu (\mathbf{X}, \mathbf{O}) gehörige monomiale Kurve $t \cong 2$ gilt.

4. Literatur

- [1] BUCHWEITZ, R.-O., GREUEL, G.-M., The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities. *Inventiones math.* **58** (1980) 241–281
- [2] DELIGNE, P., Intersections sur les surfaces régulières SGA 7 II, 1–38, SLN **340** (1973)
- [3] GREUEL, G.-M., On Deformation of Curves and a Formula of Deligne. In: *Algebraic Geometry, Proceedings, La Rabida, 1981*, SLN **961**, 141–168
Siehe auch: *Kohomologische Methoden in der Theorie isolierter Singularitäten, Teil II, Habilitationsschrift, Bonn* (1979)
- [4] GREUEL, G.-H., HAMM, H., Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte, *Inv. math.* **49** (1978) 67–86
- [5] KUNZ, E., RUPPERT, W., Quasihomogene Singularitäten algebraischer Kurven, *Man. math.* **22** (1977) 47–62
- [6] REIFFEN, H. J., Kontrahierbare analytische Mengen, *Math. Z.* **109** (1969) 253–268
- [7] SAITO, K., Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, *Inv. math.* **14** (1971) 123–142
- [8] SCHEJA, G., WIEBE, H., Über Derivationen in isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte, *Math. Ann.* **225** (1977) 161–171
- [9] WAHL, J., Preprint 1983
- [10] WALDI, R., Deformationen von Gorenstein-Singularitäten der Kodimension 3, *Math. Ann.* **242** (1979) 201–208
- [11] ZARISKI, O., Characterization of Plane Algebraic Curves whose Module of Differentials has Maximum Torsion. *Proc. of the Nat. Acad. of Sci.* **56** (1966) 781–786
- [12] PINKHAM, H., Deformations of algebraic varieties with G_m action, *Astérisque* 20, Soc. Math. France (1974)

*Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik
D - 6750 Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Straße*

*Humboldt-Universität zu Berlin
Sektion Mathematik
DDR - 1086 Berlin
Unter den Linden 6*