H. Kurke/G. Pfister/M. Roczen Henselsche Ringe

Henselsche Ringe

und algebraische Geometrie

H. Kurke

G. Pfister

M. Roczen

Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt
Verlagshersteller: B. Harnack
Gestalter für Einband und Schutzumschlag: R. Wendt

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/195/75
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, 74 Altenburg
LSV 1025
Bestellnummer: 570 183 9
EVP 57,— Mark

Dem Andenken
unseres hochverehrten Lehrers
Heinrich Grell (1903—1974)
gewidmet

Vorwort

Das Anliegen dieser Monographie besteht in einer einheitlichen Darstellung der Theorie der Henselschen Ringe und ihrer Anwendungen auf der Grundlage von Untersuchungen M. Nagatas, M. Artins, der Verfasser und zahlreicher anderer Autoren.

Um die Ergebnisse einem weiteren Kreis interessierter Mathematiker zugänglich zu machen, haben wir uns bemüht, lediglich die Kenntnis der Grundbegriffe der kommutativen Algebra vorauszusetzen, wie man sie aus Lehrbüchern der Algebra, etwa dem Buch von S. Lang „Algebra" entnehmen kann; ferner werden wenige Kenntnisse über homologische Algebra, vorwiegend technischer Natur, benutzt, die man z. B. in dem Buch von S. MacLane „Homology" finden kann. Dem gleichen Anliegen dient Kapitel 1 (und Teile von Kapitel 3), in dem wir versucht haben, auf möglichst engem Raum die benötigten Voraussetzungen zusammenzutragen und die Beweise zu skizzieren sowie die Verbindung der kommutativen Algebra mit der algebraischen Geometrie und ihre Vereinheitlichung in der Schematheorie aufzuzeigen.

Eine ausführliche Kenntnis der Garbentheorie ist nicht erforderlich, die wichtigsten diesbezüglichen Definitionen und Eigenschaften sind in 1.5. zusammengefaßt.

Wir benutzen gelegentlich die Sprache der Kategorien, deren Kenntnis unserer Meinung nach heute zum technischen Rüstzeug eines Mathematikers gehört und die eine sehr klare, kurze und einheitliche Formulierung vieler mathematischer Begriffe und Sachverhalte verschiedener Disziplinen ermöglicht. Man findet die betreffenden Begriffe z. B. in dem Buch von H. Schubert „Kategorien".

Die folgenden Begriffspaare werden synonym verwendet: kontravarianter Funktor — Kofunktor, projektiver Limes — Limes, induktiver Limes — Kolimes.

Ein großer Teil der Ergebnisse stammt aus der Habilitationsschrift [34] und den beiden auf Anregung von H. Kurke entstandenen Dissertationen [42] und [50], die bisher nicht publiziert wurden.

Herzlichen Dank dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, insbesondere Fräulein Dipl.-Math. E. Arndt, die durch eine sorgfältige Durchsicht des Manuskripts dazu beitrug, einige Ungenauigkeiten auszumerzen. Weiterhin danken wir Frau Rapierski und Frau Weidemann vom Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR für die Mithilfe bei der Anfertigung des Manuskripts. Schließlich möchten wir nicht versäumen, dem VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg, für den sorgfältigen, durch die vielen Formeln sicher nicht ganz leichten Satz unseren Dank auszusprechen.

Berlin, im Dezember 1974 H. Kurke, G. Pfister, M. Roczen

Inhalt

Einleitung

Die algebraische Geometrie hat ihren Ursprung in der Frage nach der Struktur von „Lösungsmengen" und möglichen Verfahren zur Bestimmung von bestimmten Lösungen von Polynomgleichungssystemen einerseits und in der Untersuchung algebraischer Funktionen andererseits. In engem Zusammenhang damit hat sich die Theorie der kommutativen Ringe und Moduln entwickelt, die den begrifflichen Rahmen zur Formulierung und zum Beweis vieler Resultate der algebraischen Geometrie darstellt. Betreffs der „Lösungsmengen" von Polynomgleichungssystemen ist zu fixieren, in welchem Bereich man Lösungen des Gleichungssystems sucht. Das ist im klassischen Fall der affine oder projektive Raum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen oder $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und man kann die Lösungsmengen als topologischen Raum, unter gewissen Voraussetzungen auch als differenzierbare oder komplex-analytische Mannigfaltigkeit untersuchen.

Jedoch tritt im Gegensatz zu diesen geometrischen Theorien noch ein bemerkenswertes Phänomen auf; jede Lösungsmannigfaltigkeit ist schon durch endlich viele Polynomgleichungen definiert, deren Koeffizienten also schon in einem endlich erzeugten Ring enthalten sind. Daher hat es einen invarianten Sinn, von einer „über einem Ring R definierten" Mannigfaltigkeit zu sprechen und nach Lösungen mit Koordinaten in Erweiterungsringen von R oder in R selbst zu fragen. Ein Beispiel hierfür sind die diophantischen Gleichungen, Polynomgleichungen, die über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen definiert sind.

In anderem Zusammenhang tritt dieses Problem auf, wenn die Koeffizienten der Polynomgleichungssysteme selbst z. B. algebraische Funktionen sind, d. h., wenn man Familien von Mannigfaltigkeiten betrachtet. Hier ist stets schon die Frage nach der *Existenz* von Lösungen ein schwieriges Problem; für diophantische Gleichungen spielen dafür tiefliegende Resultate der algebraischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle.

Wenn der Grundring z. B. aus Funktionen besteht, kann man versuchen, für den Nachweis der Existenz von Lösungen mit Koordinaten in diesem Grundring den Satz über implizite Funktionen anzuwenden. Dazu ist erforderlich, daß der Grundring genügend viele Funktionen enthält, z. B. aus allen analytischen Funktionskeimen in einem Punkt einer komplexen Mannigfaltigkeit besteht. Wenn man nur die rationalen Funktionskeime in einem Punkt einer algebraischen Mannigfaltigkeit (z. B. des affinen Raumes) betrachtet, kann man diesen Satz nicht mehr anwenden

Ein Analogon des Satzes über implizite Funktionen stellt das Lemma von HENSEL dar, das in seiner einfachsten Formulierung wie folgt lautet: Ein Polynom $f(x)$ mit ganzen p-adischen Zahlen als Koeffizienten, das im Restklassenkörper $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ eine einfache Nullstelle hat, hat im Ring der ganzen p-adischen Zahlen ebenfalls eine Nullstelle, die modulo p mit der vorgegebenen übereinstimmt. Ersetzt man überall „ganze p-adische Zahlen" z. B. durch „analytische Funktionskeime" und „Restklassenkörper" durch „Grundkörper", so ist das der Satz über implizite Funktionen.

Diese beiden Sätze haben also eine gemeinsame abstrakte Formulierung; der Untersuchung solcher Ringe, in der diese Sätze gelten, ist Kapitel 2 gewidmet.

Es ist eine lange Entwicklung der „Henselschen Methoden" zu verfolgen, die in ihrer Keimform schon im 19. Jahrhundert beim Studium algebraischer Funktionenkörper auftritt. Durch K. HENSEL und H. HASSE wurden diese Methoden zu einem wichtigen Werkzeug der algebraischen Zahlentheorie ausgebaut, während Anwendungen in anderen Zweigen der Mathematik nicht zu verzeichnen waren.

Im Jahre 1950 wurde durch G. AZUMAJA der allgemeine Begriff eines Henselschen lokalen Ringes eingeführt und einige Anwendungen in der Theorie der Algebra gegeben (On maximaly central algebras, Nagoya Math. J. **2** (1950)). In drei Arbeiten von M. NAGATA (zwischen 1953 und 1960) wurde die „Henselsche Abschließung" lokaler Ringe definiert und ihre Eigenschaften studiert.

Ausgehend vom Satz über implizite Funktionen der analytischen Geometrie, für den ein struktureller Beweis gegeben wird, wird ein Programm motiviert, folgende Fragen in der Schematheorie zu untersuchen: 1. Differentialkalkül, 2. quasiendliche Morphismen, 3. Satz über implizite Funktionen.

Danach werden der allgemeine Begriff des Henselschen Ringes im Zusammenhang mit dem Satz über implizite Funktionen und die Henselsche Abschließung eingeführt und ausführlich untersucht. Weniger weitreichende Resultate in dieser Richtung wurden unabhängig von J. P. LAFON, E. CRÉPEAUX und S. GRECO erzielt.[1])

Wir nennen einen Ring A Henselsch in V, wobei V eine abgeschlossene Teilmenge in $\mathrm{Spec}(A)$ ist, wenn jedes Polynom $f \in A[T]$, das auf V eine einfache Nullstelle hat, in A eine Nullstelle besitzt (die auf V mit der gegebenen übereinstimmt).

Eine Reihe äquivalenter Eigenschaften werden gezeigt, u. a. das Henselsche Lemma und die Liftung von Zusammenhangskomponenten.

Sehr eingehend wird die Henselsche Abschließung untersucht, d. h., es werden verschiedene Konstruktionsverfahren angegeben und verglichen. Wichtig ist das folgende Resultat: $A_V^\wedge$ bezeichne den Ring der formal holomorphen Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$ längs V im Sinne von ZARISKI. Dann ist die Henselsche Abschließung von A bezüglich V gleich der algebraischen Abschließung von A in $A_V^\wedge$. Voraussetzung dafür ist die folgende Eigenschaft von A: Für $P \in \mathrm{Spec}(A)$ ist $A_V^\wedge \otimes_A k(P)$ geometrisch reduziert und, falls $ht(P) = 0$ ist, normal.

---

[1]) Wir möchten noch auf folgende Arbeit hinweisen, die uns bei der Fertigstellung des Manuskripts noch nicht zugänglich war: S. GRECO, Henselization of a ring with respect to an ideal, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 43—65.

Es wird gezeigt, daß diese Voraussetzung in der Praxis stets erfüllt ist. Insbesondere ist die Henselsche Abschließung von $A[T_1, \ldots, T_n]$ in $V(T_1, \ldots, T_n)$ gleich dem Ring aller algebraischen Potenzreihen $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$.

Als Anwendungen hiervon werden z. B. gegeben:

1. Der Satz über implizite Funktionen und das „Newtonsche Lemma" (vgl. 2.11.3.).

2. Die algebroiden Zweige einer algebraischen Untermannigfaltigkeit stimmen mit den Henselschen Zweigen überein, d. h., sie sind durch algebraische Funktionen definiert.

3. Einbettungsproblem:

a) Normale analytische Raumkeime (X, x), (Y, y) sind genau dann isomorph, wenn ihre meromorphen Funktionenkörper isomorph sind.

b) (X, V), (Y, W) seien komplexe Raumpaare, X, Y normale Steinsche Räume (z. B. $\mathbf{C}^n$). Die Einbettungen $V \hookrightarrow X$, $W \hookrightarrow Y$ sind genau dann äquivalent, wenn die meromorphen Funktionenkörper von V in X, W in Y isomorph sind. Das Einbettungsproblem wird dadurch auf die Körpertheorie zurückgeführt. Analoge Probleme wurden von HIRONAKA und HIRONAKA-MATSUMURA untersucht.

Eine für die Entwicklung der algebraischen Geometrie entscheidende Entdeckung des letzten Jahrzehnts war die einer Klasse von Morphismen, genannt Etalmorphismen, und der Etaltopologie (A. GROTHENDIECK, M. ARTIN). Es handelt sich einfach um solche Morphismen algebraischer Mannigfaltigkeiten, die im komplex-analytischen Sinne lokale Isomorphismen sind. Dieser Begriff „komplex analytischer lokaler Isomorphismus" hat in der algebraischen Geometrie über beliebigen Grundkörpern oder in der Schematheorie keinen Sinn, während „etal" rein algebraisch definiert ist und daher sinnvolles Analogon des Begriffes „komplex analytisch lokal isomorph" darstellt.

Die Anwendbarkeit der Henselschen Ringe in der algebraischen Geometrie wird sichergestellt durch die Tatsache, daß Lokalisierungen im Sinne der Etaltopologie zu Henselschen Ringen führen und umgekehrt. Dieser Gesichtspunkt wurde 1966 auf dem Moskauer Mathematikerkongreß von M. ARTIN in seinem Vortrag (vgl. [2]) erwähnt und war eine der Anregungen für die Autoren, sich diesem Problemkreis zu widmen.

Aus folgendem Grund ist es erforderlich, Etalmorphismen und Etalgarben für beliebige geometrische Räume zu untersuchen: Der Quotient einer algebraischen Mannigfaltigkeit bezüglich einer Äquivalenzrelation existiert im allgemeinen nicht, wohl aber in folgenden Kategorien:

(1) in der Kategorie aller geometrischen Räume,

(2) in der Kategorie aller Etalgarben.

Bisher wurden Quotienten stets so konstruiert: Bildung des Quotienten als geometrischen Raum und Nachweis, daß man dadurch ein Schema erhält. Das gelingt nicht immer, und es können daher wenig konkrete Aussagen über solche Quotienten gemacht werden.

Eine fundamentale Idee der letzten Jahre war, statt dessen den Quotienten als Etalgarbe zu bilden (M. ARTIN, B. G. MOISCHESON, D. KNUTSON, M. RAYNAUD).

Wie hängen beide Quotienten zusammen?

Zur Untersuchung dieser Frage sind wir nach folgendem Plan vorgegangen.

1. Ausdehnung des Begriffes „Etalmorphismus" auf beliebige geometrische Räume (das ist der Inhalt von Kap. 3),

2. Nachweis, daß jeder darstellbare Funktor eine Etalgarbe ist (Kap. 6).

Damit spielen sich also alle Betrachtungen in der Kategorie der Etalgarben und gewissen Unterkategorien ab.

Als Grundlage dienen Ergebnisse über quasiendliche Morphismen (ZARISKIS Main Theorem).

Es gilt: Ist $p : X \to Y$ ein Morphismus beliebiger geometrischer Räume, so gilt:

(1) Die Menge X_0 der Punkte, auf denen p quasiendlich ist, ist offen.

(2) $p \mid X_0$ ist lokal endlich.

Es ist uns gelungen, einen einfachen und elementaren Beweis für diese sehr allgemeingültige Formulierung von ZARISKIS Hauptsatz zu finden (vgl. auch H. KURKE [31]).

In Kapitel 4 wird die Theorie der Fundamentalgruppe für den algebraischen Fall dargestellt im Zusammenhang mit der Galoistheorie. Es wird unter anderem folgendes Resultat bewiesen: $X \mid A$ sei ein eigentliches Schema, A sei in V Henselsch, X_V Urbild von V in X. Dann entsprechen die Etalüberlagerungen von X umkehrbar eindeutig denen von X_V; also ist $\pi_1(X_V) \simeq \pi_1(X)$. Eine Folgerung hieraus ist z. B., daß die Etalkohomologie konstruierbarer Garben auf X_V und auf X übereinstimmt.

In Kapitel 5 werden vor allem Resultate von M. ARTIN dargestellt, die die Frage betreffen, wann sich eine Lösung eines algebraischen Gleichungssystems aus einem formalen Potenzreihenring durch Lösungen aus dem Ring der algebraischen Potenzreihen modulo beliebig hoher Ordnung approximieren läßt. Das ist eines der wichtigsten Motive für das Studium Henselscher Ringe und der Henselschen Abschließung; es ist äußerst bedeutend für viele Konstruktionen in der algebraischen Geometrie, z. B. für die Konstruktion lokaler Moduln (Deformationen). Wir beweisen ARTINS Satz auf der Grundlage eines allgemeinen Approximationsprinzips, das die Rolle des singulären Ortes bei der Approximation berücksichtigt.

Es werden dann die Grundbegriffe der Deformationstheorie dargestellt sowie M. SCHLESSINGERS Satz über die Existenz formaler Moduln, einige Ergebnisse, die Analoga zu Fragen von G. N. TJURINA darstellen, und einige illustrative Beispiele.

Es sei darauf hingewiesen, daß ein für die algebraische Theorie der Deformationen in voller Allgemeinheit noch ungelöstes Problem (Existenz semi-universeller Deformationen isolierter Singularitäten) kürzlich durch H. GRAUERT im komplex-analytischen Fall gelöst wurde (H. GRAUERT, Inventiones mathematicae **15** (1972)). Für M. ARTINS Satz über die Algebraisierung formaler Deformationen wird ein durchsichtigerer Beweis als der ursprüngliche gegeben.

In Kapitel 6 wird zunächst gezeigt, daß bezüglich der kanonisch gegebenen Etaltopologie jeder geometrische Raum eine Etalgarbe darstellt. Dieses Resultat bildet die Grundlage für unsere Untersuchungen in diesem Kapitel. Wir können nun in Analogie zu M. ARTIN wie folgt definieren: Ein mengenwertiger Kofunktor F auf einer Unterkategorie $\mathscr{C}$ der Kategorie der geometrischen Räume heißt algebraischer $\mathscr{C}$-Raum, wenn Objekte $X_i \in \mathscr{C}$ existieren und eine Etaläquivalenzrelation $X_1 \rightrightarrows X_2$ deren Quotient in der Kategorie der Etalgarben F ist. Es lassen sich dann wichtige Eigenschaften und Begriffe der Kategorie $\mathscr{C}$ auf die Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume übertragen. In konkreten, für uns wichtigen Fällen wird die Kategorie $\mathscr{C}$ die Kategorie der affinen Schemata, der Schemata über einem festen Grundschema, der Schemata, der Henselschen Schemata bzw. formalen Schemata sein. Bei unseren Untersuchungen ist natürlich die Frage, wann sich ein gegebener Funktor durch einen $\mathscr{C}$-Raum darstellen läßt, besonders wichtig. Wir verallgemeinern hier ein Kriterium von ARTIN (vgl. 6.4.5.).

Abschließend untersuchen wir die Frage, wie ein algebraischer $\mathscr{C}$-Raum F mit seiner geometrischen Realisierung F_*, d. h. einem geometrischen Raum F_* versehen mit einer Abbildung von $F \to F_*$, die universell mit dieser Eigenschaft ist, zusammenhängt. Es wird gezeigt, daß F mit seiner geometrischen Realisierung genau dann übereinstimmt, wenn die kanonische Abbildung $X \to F_*$ (wobei $X \to F$ eine darstellbare Etalüberdeckung von F ist) ein Etalmorphismus ist.

In Kapitel 7 werden zu Beginn die Begriffe des Henselschen geometrischen Raumes und des Henselschen Schemas eingeführt. Ein Henselsches Schema ist ein geometrischer Raum, der lokal isomorph ist zu affinen algebraischen Mengen $V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ und dessen Strukturgarbe auf offenen Mengen der Form $U = V_f^h = \{x \in V \text{ mit } f(x) \neq 0\}$ durch $\mathscr{O}(U) = (A_f)_V^h$ gegeben ist.

Es wird gezeigt, daß die so definierte Zuordnung $U \to \mathscr{O}(U)$ eine Garbe von lokalen Ringen ist, und zwar ist $\mathscr{O} \mid V$ gerade die Garbe aller längs V algebraischen formal holomorphen Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$. Die Henselschen Schemata treten genau wie die formalen Schemata bei der Untersuchung von Einbettungen und bei lokalen Modulproblemen auf. Sie sind die natürliche Übertragung des Begriffes „Umgebungskeim" der analytischen Geometrie in die algebraische Geometrie und stellen in dem Abstiegsproblem vom formalen zum algebraischen Rahmen den natürlichen Zwischenschritt dar. Es werden einige elementare Eigenschaften untersucht (Adjungiertheitsbeziehungen der Funktoren Henselsche Abschließung — Inklusionsfunktor geometrischer Räume) sowie grundlegende Betrachtungen für affine Henselsche Schemata angestellt. Anschließend wird das Problem behandelt, ob jedes Henselsche Schema Henselsche Abschließung eines Schemas in einem abgeschlossenen Unterschema ist. Es zeigt sich, daß man die Frage positiv beantworten kann, wenn man die Kategorie der algebraischen Räume zugrundelegt.

Weiterhin werden Aufblasungen in der Kategorie der Henselschen Schemata untersucht und das Verhalten der infinitesimalen Umgebungen bei Aufblasungen. Es erweist sich, daß es stets eine Konstante c gibt, die folgende Eigenschaften hat:

Ist $(X, V)_{(n)} \simeq (Y, W)_{(n)}$ (n-te infinitesimale Umgebung), so ist für die Aufblasung (X, V') von (X, V) usw. $(X', V)_{(n-c)} \simeq (Y', W')_{(n-c)}$.

Wenn alle infinitesimalen Umgebungen übereinstimmen, gilt das also auch für die Aufblasungen. Das hat wichtige Konsequenzen, da man durch Aufblasungen die Singularitäten stets verbessern kann. Unter einer Zusatzhypothese wird dann gezeigt, daß $X_V^h \simeq Y_W^h$ ist, d. h., die Isomorphie aller infinitesimalen Umgebungen induziert die Isomorphie der Einbettungen.

Es bietet sich hier noch ein weites Feld für offene Probleme an, die z. B. die Kohomologie solcher Gebilde betreffen. Eine Lösung dieser Probleme würde neue Möglichkeiten für den algebraischen Beweis einiger Äquivalenzkriterien für Einbettungen bieten.

1. Einige Grundbegriffe der kommutativen Algebra

1.1. Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Die kommutative Algebra ist in gewissem Sinne, insbesondere was die homologischen Aspekte betrifft, eine Verallgemeinerung der linearen Algebra. Sie hat ihren Ursprung in der algebraischen Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie. Was die Zahlentheorie betrifft, so bedarf der Zusammenhang keiner Erläuterung; wir wollen jedoch etwas näher auf die Beziehungen zur algebraischen Geometrie eingehen.

Jeder algebraischen Teilmenge V eines affinen Raumes A_k^n (über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k) ist in kanonischer Weise eine k-Algebra $\Gamma(V)$ zugeordnet; $\Gamma(V)$ besteht aus denjenigen k-wertigen Funktionen auf V, die ganzrational von den Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ abhängen ($z_1, \ldots, z_n$ ein beliebiges affines Koordinatensystem in A_k^n). Bezeichnen wir mit I die Menge aller Polynome aus $k[Z_1, \ldots, Z_n]$, die auf V verschwinden, so ist I ein Ideal und $k[Z_1, \ldots, Z_n]/I \simeq \Gamma(V)$. Der Polynomring ist Noethersch; daher ist $\Gamma(V)$ ebenfalls Noethersch, und V ist stets Nullstellenmenge endlich vieler Polynome.

Der Hilbertsche Nullstellensatz besagt, daß jedes vom Einheitsideal verschiedene Polynomideal $I \subseteq k[Z_1, \ldots, Z_n]$ eine Nullstelle in A_k^n hat.

Insbesondere folgt daraus: Durch

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathsf{A}_k^n \mapsto P = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \xi_i)\, k[Z_1, \ldots, Z_n]$$

erhält man eine Bijektion zwischen den Punkten des affinen Raumes A_k^n und den Maximalidealen des Ringes $k[Z_1, \ldots, Z_n]$. (Umgekehrte Zuordnung: Jedem Maximalideal ordne man eine nach dem Hilbertschen Nullstellensatz existierende Nullstelle zu.) Ist V Nullstellenmenge von $F_1 = \cdots = F_m = 0$, so entsprechen die Punkte von V denjenigen Maximalidealen, die $F_1, \ldots, F_m$ enthalten, d. h. den Maximalidealen von $\Gamma(V)$.

Morphismen affiner algebraischer Mannigfaltigkeiten V, W sind solche Abbildungen $\Phi\colon V \to W$, daß die Koordinaten von $\Phi(P)$ ganz-rational von denen von P abhängen. Also entsprechen die Morphismen $\Phi\colon V \to W$ umkehrbar eindeutig den k-Algebrahomomorphismen $\Gamma(W) \to \Gamma(V)$ $(f \mapsto f \circ \Phi)$.

Weiterhin ist jede endlich erzeugte, reduzierte[1]) k-Algebra $A = k[z_1, \ldots, z_n]$ isomorph zu einer Algebra $\Gamma(V)$, z. B., wenn V die Nullstellenmenge des Ideals

$$I = \text{Kern}\,(k[Z_1, \ldots, Z_n] \to k[z_1, \ldots, z_n],\ Z_i \mapsto z_i)$$

[1]) Ein Ring A heißt *reduziert*, wenn er keine nilpotenten Elemente enthält.

ist. Daher ist die Kategorie der affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten über k dual zur Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten k-Algebren.

Diese Verbindung zwischen Geometrie und kommutativer Algebra ist konsequent weiterentwickelt in der Theorie der Schemata. Die Kategorie der Schemata umfaßt sowohl eine zur Kategorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten äquivalente Unterkategorie als auch eine zur Kategorie aller kommutativen Ringe duale Kategorie. Wir bringen hier zunächst die wichtigsten Definitionen, weitere Ausführungen findet man in Kapitel 3.

Definition. Ein *geometrischer Raum* X besteht aus einem topologischen Raum $\underline{X}$ und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen auf $\underline{X}$, deren Halme in jedem Punkt lokale Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ sind.

Wir nennen die Schnitte $f \in \mathcal{O}_X(U)$ *Funktionen auf* U, und wenn $x \in V \subseteq U$ ist, schreiben wir $f \mid V$ für die Einschränkung von f auf V und $f(x)$ für das Bild von f bei der kanonischen Abbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \to k(x) = \text{Restklassenkörper von } \mathcal{O}_{X,x}.$$

Sind X, Y geometrische Räume, so versteht man unter einem *Morphismus* $p: X \to Y$ von X in Y eine stetige Abbildung $\underline{p}: \underline{X} \to \underline{Y}$ *und* für jede offene Menge V von Y einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(p^{-1}V)$, $f \mapsto f(p)$, so daß folgendes gilt:

$$f(p(x)) = 0 \Rightarrow f(p)(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

(Wir schreiben meist $p(x)$ an Stelle von $\underline{p}(x)$.)

Die letzte Bedingung bedeutet, daß diese Ringhomomorphismen für alle x einen Morphismus lokaler Ringe $\mathcal{O}_{Y,p(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ induzieren, den wir ebenfalls mit $f \mapsto f(p)$ bezeichnen. Betrachten wir dann $k(p(x))$ in kanonischer Weise als Unterkörper von $k(x)$, so gilt

$$f(p)(x) = f(p(x)).$$

Jedem Ring wird ein geometrischer Raum Spec(A) *zugeordnet*. Der zugrunde liegende Raum besteht aus der Menge aller Primideale von A, versehen mit der Zariski-Topologie, die wie folgt definiert ist:

Eine Menge V von Primidealen von A ist *abgeschlossen*, wenn es ein Ideal $I \subseteq A$ gibt und

$$V = V(I) =: \{P \in \operatorname{Spec}(A);\ P \supseteq I\}$$

ist. (Wir schreiben „$P \in \operatorname{Spec}(A)$" an Stelle von „$P \in \underline{\operatorname{Spec}(A)}$".) Die Menge V wird die *Nullstellenmenge* von I in Spec(A) genannt, und es gilt

$$\emptyset = V(A), \quad \operatorname{Spec}(A) = V(0),$$
$$V\Big(\sum_\alpha I_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha), \quad V(I_1 I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2),$$

so daß die Nullstellenmengen von allen Idealen von A tatsächlich das System aller abgeschlossenen Mengen einer Topologie bilden.

Offenbar ist $V(I) = V(J)$ gleichbedeutend mit $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

Offene Mengen sind von der Form

$$D(I) = \operatorname{Spec}(A) - V(I) =: \{P \in \operatorname{Spec}(A);\ I \nsubseteq P\};$$

ist (f_α) eine Basis des Ideals I, so ist

$$D(I) = \bigcup_\alpha D(f_\alpha); \quad D(f) =: \{P \in \operatorname{Spec}(A);\ f \notin P\}.$$

Die offenen Mengen der Form $D(f)$ bilden also eine Basis des Systems aller offenen Mengen.

Die Strukturgarbe von Spec(A) wird definiert durch

$$D(f) \mapsto A_f;$$

aus $D(f) \supseteq D(g)$ folgt, daß das Bild von f in A_g zu keinem Primideal von A_g gehört, also umkehrbar in A_g ist, so daß also $A \to A_g$ eine eindeutig bestimmte „Restriktion" $A_f \to A_g$ induziert. Geometrische Räume vom Typ Spec (A) heißen *affine Schemata*.

Allgemeiner gilt: *Für jeden A-Modul M wird durch* $D(f) \to M_f$ *eine Garbe auf* Spec(A) *induziert, die wir mit* $M^\sim$ *bezeichnen*.

Beweis. Aus $D(f_\alpha) \cap D(f_\beta) = D(f_\alpha f_\beta)$ folgt, daß $M_{f_\alpha f_\beta}$ die Menge der Schnitte auf $D(f_\alpha) \cap D(f_\beta)$ ist, und es ist zu zeigen: Wenn $D(f) = \bigcup_\alpha D(f_\alpha)$, $g_\alpha \in M_{f_\alpha}$ ist, so daß g_α und g_β in $M_{f_\alpha f_\beta}$ dasselbe Bild haben, so gibt es genau ein $g \in M_f$, dessen Bild in M_{f_α} gleich g_α ist.

Die Eigenschaft $D(f) = \bigcup_\alpha D(f_\alpha)$ ist gleichbedeutend mit $V(fA) = V\Big(\sum_\alpha Af_\alpha\Big)$, also $\sqrt{fA} = \sqrt{\sum_\alpha Af_\alpha}$. Daher gilt

(1) $$f^n \in \sum_{i=1}^m Af_{\alpha(i)} \quad \text{für} \quad n \gg 0 \text{ mit endlichen vielen } f_\alpha = f_{\alpha(i)}.$$

Es sei $g_{\alpha(i)} = h_{\alpha(i)} f_{\alpha(i)}^{-r}$; die Gleichheit der Bilder von $g_{\alpha(i)}, g_{\alpha(j)}$ in $M_{f_{\alpha(i)} f_{\alpha(j)}}$ bedeutet dann

(2) $$(h_{\alpha(i)} f_{\alpha(j)}^r - h_{\alpha(j)} f_{\alpha(i)}^r)\, f_{\alpha(i)}^s f_{\alpha(j)}^s = 0 \quad \text{für} \quad s \gg 0.$$

Aus (1) folgt

(3) $$f^t = \sum_{i=1}^m a_i f_{\alpha(i)}^{r+s} \qquad (t \gg 0).$$

Ist

$$h =: \sum_{i=1}^m a_i h_{\alpha(i)} f_{\alpha(i)}^s,$$

so folgt aus (2) und (3)

$$hf^{r+s}_{\alpha(j)} = \sum_{i=1}^{m} a_i h_{\alpha(i)} f^s_{\alpha(i)} f^{r+s}_{\alpha(j)} = \sum_{i=1}^{m} a_i f^{r+s}_{\alpha(i)} h_{\alpha(j)} f^s_{\alpha(j)} = f^t h_{\alpha(j)} f^s_{\alpha(j)},$$

d. h.

$$hf^{-t} = h_{\alpha(j)} f^{-r}_{\alpha(j)} = g_{\alpha(j)} \quad \text{in} \quad M_{f_{\alpha(j)}}.$$

Da man zu den $\alpha(j)$ noch beliebig viele weitere Indizes hinzunehmen kann, ist also $hf^{-t} = g_\alpha$ in M_{f_α}. Wenn $hf^{-t} \in M_f$ und in allen M_{f_α} Null ist, gibt es für alle α ein $s(\alpha) > 0$ mit $hf_\alpha^{s(\alpha)} = 0$, also $h\left(\sum_\alpha A f_\alpha^{s(\alpha)}\right) = 0$. Da $f^n \in \sum_\alpha A f_\alpha^{s(\alpha)}$ $(n \gg 0)$ ist, folgt dann $hf^n = 0$. Also ist $M_f \to \prod_\alpha M_{f_\alpha}$ injektiv, q.e.d.

Insbesondere ist $A^\sim$ die Strukturgarbe, und die Garben $M^\sim$ sind Garben von $A^\sim$-Moduln. Modulgarben, die isomorph zu Garben dieses Typs sind, heißen *quasikohärent* bzw. *kohärent*, wenn M Noethersch ist.

Für $f \in A$ ist $D(f)$, mit der Einschränkung der Strukturgarbe $A^\sim$ versehen, ein geometrischer Raum, der zu $\operatorname{Spec}(A_f)$ isomorph ist. Die Eigenschaft einer Modulgarbe $\mathscr{F}$, quasikohärent zu sein, ist im folgenden Sinne lokal:

Die Modulgarbe $\mathscr{F}$ ist genau dann quasikohärent, wenn es eine Überdeckung $D(f_\alpha)$ von $\operatorname{Spec}(A)$ *gibt und $\mathscr{F} \mid D(f_\alpha)$ für alle α quasikohärent ist.*

Beweis. Es sei M der Modul der globalen Schnitte von $\mathscr{F}$; dann induziert die Restriktion $M \to \mathscr{F}(D(f))$ einen kanonischen Homomorphismus $M^\sim \to \mathscr{F}$. Ist $\mathscr{F}$ lokal quasikohärent im obigen Sinne, so zeigen wir, daß das ein Isomorphismus ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $M_{f_\alpha} \simeq \mathscr{F}(D(f_\alpha))$ ist. Man kann sich auf endlich viele Indizes $\alpha = 1, \ldots, m$ beschränken (so daß $A = \sum_\alpha^m A f_\alpha$ ist).

Es sei $\sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha f_\alpha = 1$, $a_\alpha \in A$, und $f = a_m f_m$, $g = \sum_{\alpha=1}^{m-1} a_\alpha f_\alpha$. Dann ist $D(f) \subseteq D(f_m)$, $D(g) \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{m-1} D(f_\alpha)$ und $D(f) \cup D(g) = \operatorname{Spec}(A)$. Also genügt es, den Fall $m = 2$ zu beweisen, der allgemeine Fall folgt dann durch vollständige Induktion über m.

Es sei $M = \Gamma(\mathscr{F})$, $M' = \Gamma(\mathscr{F} \mid D(f))$, $M'' = \Gamma(\mathscr{F} \mid D(g))$ und $\overline{M} = \Gamma(\mathscr{F} \mid D(fg))$, $\varrho' \colon M' \to \overline{M}$, $\varrho'' \colon M'' \to \overline{M}$ die Einschränkungen. Dann ist

$$0 \to M \to M' \oplus M'' \to \overline{M}, \qquad (x', x'') \mapsto \varrho''(x'') - \varrho'(x')$$

exakt, $M_f'' \xrightarrow{\sim} \overline{M}$, $M_f' = M'$, also

$$0 \to M_f \to M' \oplus \overline{M} \to \overline{M} \to 0$$

exakt. Hieraus folgt $M_f \simeq M'$, q.e.d.

Jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ induziert einen Morphismus

$$\operatorname{Spec}(\varphi)\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$$

durch $\operatorname{Spec}(\varphi)(P) = \varphi^{-1}(P)$, $g(\operatorname{Spec}(\varphi)) = \varphi(g)$ für $g \in A_f$ (wobei wir mit φ auch die kanonische Fortsetzung $A_f \to B_{\varphi(f)}$ von φ bezeichnen). Also ist $A \mapsto \operatorname{Spec}(A)$ ein Kofunktor der Kategorie der Ringe in die Kategorie der geometrischen Räume.

Die Funktionen auf U entsprechen genau den Morphismen von U in die (*absolute*) *affine Gerade* $\mathsf{A}^1 = \operatorname{Spec}(\mathsf{Z}[t])$.

Der Zusammenhang zwischen Funktionen und Morphismen in A^1 ist im einzelnen wie folgt: Der Funktion f auf U wird der Morphismus

$$U \to \mathsf{A}^1, \qquad x \mapsto p(x) =: \operatorname{Kern}\left(\mathsf{Z}[t] \to k(x);\, t \mapsto f(x)\right), \qquad t(p) = f$$

zugeordnet, und umgekehrt ist $t(p)$ für jeden Morphismus $p\colon U \to \mathsf{A}^1$ eine Funktion auf U.

In analoger Weise ist für jedes affine Schema $Y = \operatorname{Spec}(A)$ die kanonische Abbildung $\operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X))$, *die jedem p die Abbildung $f \in A \mapsto f(p) \in \mathcal{O}_X(X)$ zuordnet, eine Bijektion.*

Einen geometrischen Raum, der lokal isomorph zu affinen Schemata ist, nennt man ein *Schema*.

Welche Beziehungen bestehen zwischen algebraischen Mannigfaltigkeiten und Schemata? Wir haben bereits eine kanonische Äquivalenz zwischen affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten und reduzierten k-Algebren von endlichem Typ festgestellt (k ein algebraisch abgeschlossener Grundkörper).

Ein Schema heißt *reduziert*, wenn alle $\mathcal{O}_{X,x}$ reduzierte Ringe sind. X heißt *algebraisch* über einem Ring k, wenn $k \subseteq \Gamma(X)$ ist und X eine endliche affine offene Überdeckung U_α besitzt, so daß $\Gamma(U_\alpha)$ k-Algebren von endlichem Typ sind. *k-Morphismen* $p\colon X \to X'$ von k-Schemata sind Morphismen, für die $\Gamma(p)$ auf k die Identität induziert. Dann gilt:

Die Kategorie der affinen algebraischen Mannigfaltigkeiten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist äquivalent zur Kategorie der reduzierten algebraischen affinen k-Schemata (*und k-Morphismen*).

Entspricht die Mannigfaltigkeit V dem affinen k-Schema X, so gilt nach dem Hilbertschen Nullstellensatz: $\operatorname{Hom}_k(\operatorname{Spec}(k), X) =: X(k)_k$ *ist isomorph zur Menge der Punkte von V und zur Menge der abgeschlossenen Punkte X_0 von $\underline{X}$.*

Ferner gilt dabei: *Jede abgeschlossene* (*bzw. offene*) *Menge F* (*bzw. U*) *von $\underline{X}$ ist umkehrbar eindeutig durch $F \cap X_0$* (*bzw. $U \cap X_0$*) *bestimmt.*

Wir können daher V als Unterraum von $\underline{X}$ auffassen, der die Topologie von $\underline{X}$ eindeutig bestimmt; $\mathcal{O}_X$ induziert auf V eine Garbe $\mathcal{O}_V$, die isomorph zu einer Untergarbe der Garbe der k-wertigen Funktionen auf V ist.

In diesem Sinne sind also affine algebraische Mannigfaltigkeiten im wesentlichen gewisse affine k-Schemata, und wir werden von jetzt an affine reduzierte algebraische k-Schemata selbst als algebraische Mannigfaltigkeiten bezeichnen. Allgemein verstehen wir unter *algebraischen Mannigfaltigkeiten* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k reduzierte und algebraische k-Schemata X, so daß außerdem die Diagonale $X \to X \times_{\operatorname{Spec}(k)} X$ eine abgeschlossene Einbettung ist. (Analogon d

Hausdorff-Axioms für topologische Räume, bezüglich der Definition und Existenz des Faserproduktes vgl. Kap. 3).

Unter einer *quasikohärenten* (bzw. *kohärenten*) *Garbe* auf einem Schema X verstehen wir eine solche $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, die auf jedem affinen offenen Unterschema eine quasikohärente (bzw. kohärente) Garbe induziert.

Weitere wichtige Beispiele geometrischer Räume sind die analytischen Räume.

Ein geometrischer Raum $(\underline{X}, \mathcal{O}_X) = X$ heißt ein *analytischer Raum*, wenn $\underline{X}$ ein Hausdorff-Raum ist und jeder Punkt eine Umgebung U besitzt, so daß $(U, \mathcal{O}_X \mid U) \simeq (V, (\mathcal{O}_n/f_1\mathcal{O}_n + \cdots + f_r\mathcal{O}_n) \mid V)$ ist, wobei V Nullstellenmenge der auf dem Polydiskus $\Delta_n = \{(z_1, \ldots, z_n); |z_i| < 1\}$ holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ und $\mathcal{O}_n$ die Garbe aller holomorphen Funktionen auf Δ_n ist.

An Stelle von $\mathbf{C}$ kann auch ein beliebiger, reell bewerteter Körper stehen.

Morphismen $\varphi: X \to Y$ analytischer Räume sind solche Morphismen geometrischer Räume, für die $\Gamma(\varphi): \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ auf $\mathbf{C} \subseteq \Gamma(Y)$, $\mathbf{C} \subseteq \Gamma(X)$ die Identität induziert.

Jeder algebraischen Mannigfaltigkeit X über $\mathbf{C}$ ist in funktorieller Weise ein analytischer Raum X_{an} und ein $\mathbf{C}$-Morphismus $i: X_{\text{an}} \to X$ zugeordnet. Der Raum X_{an} besteht aus den abgeschlossenen Punkten von $\underline{X}$, versehen mit der „klassischen" Topologie (durch lokale Einbettungen in den affinen Raum $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$ induziert, $\mathbf{C}$ mit der gewöhnlichen Topologie versehen). $\mathcal{O}_{X_{\text{an}}}$ ist die Garbe *aller* holomorphen Funktionen, so daß $i_*\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_{X_{\text{an}}}$ gilt.

Weiteres zur Theorie der komplexen Räume findet man z. B. in dem Buch von R. C. Gunning und H. Rossi [23].

1.2. Einige allgemeine Eigenschaften kommutativer Ringe

Wir setzen die allgemeine Theorie der kommutativen Ringe (Noethersche Ringe, Dedekindsche Ringe, Primärzerlegung, Quotientenringe) als bekannt voraus, ferner die homologischen Begriffe Ext, Tor und ihre wichtigsten Eigenschaften. Gelegentlich werden die Begriffe „homologische Kodimension" („Tiefe") und das Hilbert-Samuel-Polynom benutzt. Man vergleiche dazu M. Nagata [39], O. Zariski und P. Samuel [54], J.-P. Serre [55]. Wir stellen hier lediglich einige in den folgenden Kapiteln häufig benutzte Resultate zusammen.

Ein sehr einfaches und nützliches Resultat ist das sogenannte Lemma von Nakayama:

1.2.1. Hilfssatz. *Ist $J \subseteq A$ ein im Jacobson-Radikal enthaltenes Ideal und M ein A-Modul, so daß M endlich erzeugt oder J nilpotent ist, so folgt aus $M \otimes_A (A/J) = 0$ stets $M = 0$.*

Beweis. Wegen $M \otimes_A (A/J) = M/JM$ besagt die Voraussetzung $M = JM$. Ist $J^n = 0$, so folgt sofort $M = 0$. Ist M endlich erzeugt durch $x_1, \ldots, x_n$, so ist $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ mit $a_{ij} \in J$. Hieraus folgt $\sum_j (\delta_{ij} - a_{ij})\, x_j = 0$, also nach der Cramerschen Regel

$$\det(\delta_{ij} - a_{ij})\, x_h = 0,$$

$\det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 1 + a \in 1 + J$ ist aber umkehrbar, also ist $x_h = 0$, q.e.d.

Häufig wird dieses Lemma auch in folgender Form benutzt:

Ist $M \to N$ ein Homomorphismus, N von endlichem Typ, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) *$M \to N$ ist surjektiv,*

(ii) *$M \otimes_A (A/J) \to N \otimes_A A/J$ ist surjektiv.*

(Man wende das Lemma auf den Kokern von $M \to N$ an.)

Gelegentlich wird folgendes Resultat benutzt:

1.2.2. *Sind $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in A und ist $I_i + I_j = A$ für $i \neq j$, so ist*

$$A/I_1 \cdots I_n = A/I_1 \cap \cdots \cap I_n \simeq (A/I_1) \times \cdots \times (A/I_n).$$

Beweis. Aus $I_i + I_j = A$ folgt durch Induktion $I_i + \bigcap_{j \neq i} I_j = A$ und $\bigcap_{j=1}^{n} I_j = \prod_{j=1}^{n} I_j$ (Induktionsanfang: Aus $I_1 + I_2 = A$ folgt

$$I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 = I_1(I_1 \cap I_2) + I_2(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1 I_2.)$$

Die kanonische Abbildung $A \Big/ \bigcap_{j=1}^{n} I_j \to \prod_{j=1}^{n} (A/I_j)$ ist stets injektiv; wir zeigen durch Induktion nach n, daß sie in unserem Fall surjektiv ist.

Es sei $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \prod_{j=1}^{n} (A/I_j)$ und $y \in A$ mit $y \equiv x_j \bmod I_j$, $j \geqq 2$ (Induktionsannahme).

Ist $1 = a + b$, $a \in \bigcap_{i=2}^{n} I_i$, $b \in I_1$, und $x = ax_1 + by$, so ist $x \equiv x_1 \bmod I_1$ und $x \equiv y \bmod I_j$, $j \geqq 2$, also $\bar{x} \in A \Big/ \bigcap_{j=1}^{n} I_j$ Urbild von $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, q.e.d.

1.2.3. Hilfssatz. *Sind $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Primideale und ist I ein Ideal, so daß $I \not\subseteq P_i$ für $1 \leqq i \leqq n$ gilt, so ist*

$$I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i.$$

Beweis. Ist $P_j \subseteq P_i$, so kann man P_j weglassen. Dann ist $I\Big(\prod_{h \neq i} P_h\Big) \not\subseteq P_i$. Es gibt also ein $f_i \in I\Big(\prod_{h \neq i} P_h\Big)$, $f_i \notin P_i$. Dann ist

$$f = f_1 + \cdots + f_n \in I, \qquad f \notin P_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n,$$

q.e.d.

Wir wollen schließlich noch einige Bemerkungen über ganze Erweiterungen machen

Im folgenden sei B ein Ring, A ein Unterring. Ein Element $x \in B$ heißt *ganz über A* bzw. *A-ganz*, wenn es einer normierten Gleichung $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit Koeffizienten aus A genügt. B heißt ganz über A, wenn jedes Element von B ganz über A ist.

1.2.4. *Das Element $x \in B$ ist genau dann A-ganz, wenn $A[x]$ ein endlich erzeugter B-Modul ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Aus $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ folgt $A[x] = A + Ax + \cdots + Ax^{n-1}$.

($\Leftarrow$) Ist $A[x] = Aw_1 + \cdots + Aw_n$ und $xw_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j$, $a_{ij} \in A$, $i = 1, \ldots, n$, so ist nach der Cramerschen Regel $\det(x\delta_{ij} - a_{ij})\, w_h = 0$ für $h = 1, \ldots, n$, also

$$\det(x\delta_{ij} - a_{ij}) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in A,$$

q.e.d.

1.2.5. Satz. *Ist B ganz über A, so ist* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *surjektiv und abgeschlossen, und in den Fasern ist jeder Punkt abgeschlossen* („Going up theorem").

Beweis. Es sei $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Dann ist $B_P =: B \otimes_A A_P$ ganz über A_P. Ist $Q \in \mathrm{Spec}(B_P)$ ein Maximalideal, dann ist $B_P/Q = k(Q)$ ganz über $A_P/(Q \cap A_P)$, und $Q \cap A_P = PA_P$ (also $Q \cap A = P$) folgt aus dem Hilfssatz:

Ist K ein Integritätsbereich, $R \subseteq K$ und K R-ganz, so ist K genau dann ein Körper, wenn R ein Körper ist.

Denn ist R ein Körper, $x \in K$, so ist $R[x]$ endlich über R, also ein Körper, also $\frac{1}{x} \in R[x] \subseteq K$.

Ist umgekehrt K ein Körper, $0 \neq x \in R$, so ist $\frac{1}{x} \in K$, also R-ganz, $\frac{1}{x^n} + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_i \in R$ und somit $\frac{1}{x} = (a_{n-1} + \cdots + a_0x^n) \in R$.

Aus diesem Hilfssatz folgt, daß $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ surjektiv ist und in den Fasern jeder Punkt abgeschlossen ist (Faser in $P \in \mathrm{Spec}(A)$: $\mathrm{Spec}(B \otimes_A k(P))$), ferner ist für $V = V(I) \subseteq \mathrm{Spec}(B)$ (I Ideal in B) das Bild gleich $V(I \cap A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, also $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ abgeschlossen.

1.2.6. Satz. *Operiert auf B eine endliche Gruppe G von links und ist $A = B^G$ = Ring der G-invarianten Elemente, so ist B ganz über A, G operiert auf* $\mathrm{Spec}(B)$ *(von rechts),* $\mathrm{Spec}(A)$ *ist der Quotientenraum von* $\mathrm{Spec}(B)$ *bezüglich G und* $\pi: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *induziert einen Isomorphismus* $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(B), X)^G$ *für jeden geometrischen Raum X.*

Dabei bezeichnet $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(B), X)^G$ die Menge der G-invarianten Morphismen bezüglich der Operation $\varphi \mapsto \varphi \circ \mathrm{Spec}(s)$, $s \in G$.

Beweis. Ist $x \in B$, so ist $F(T) = \prod_{s\in G} (T - s(x)) \in A[T]$ normiert und $F(x) = 0$, also B A-ganz.

Auf $\mathrm{Spec}(B)$ operiert G durch $P \mapsto \mathrm{Spec}(s)(P) = s^{-1}P$, und $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ist nach 1.2.5. surjektiv und abgeschlossen. Dafür, daß $\mathrm{Spec}(A)$ Quotientenraum von

$\mathrm{Spec}(B)$ ist, genügt es daher noch zu zeigen, daß G transitiv auf den Fasern von $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ operiert.

Aus $P \in \mathrm{Spec}(B)$ folgt $s^{-1}P \cap B = P \cap B$ für alle $s \in G$. Also bleibt zu zeigen: Aus $P_1, P_2 \in \mathrm{Spec}(B)$, $P_1 \cap A = P_2 \cap A$ folgt $P_2 = s^{-1}P_1$ mit einem $s \in G$.

Dazu genügt zu zeigen: $\bigcap_{t\in G} t^{-1}P_2 = I \subseteq s^{-1}P_1$ für ein $s \in G$, da dann ein $t^{-1}P_2 \subseteq s^{-1}P_1$, also $st^{-1}P_2 \subseteq P_1$ ist ($st^{-1}P_2 \cap A = P_2 \cap A = P_1 \cap A$ impliziert $st^{-1}P_2 = P_1$ nach 1.2.5.).

Wenn also P_1, P_2 nicht zueinander konjugiert sind, enthält I (nach 1.2.3.) ein Element f mit $f \notin s^{-1}P_1$ für alle $s \in G$, also ist $g =: \prod_{s\in G} s(f) \in I \cap A = P_1 \cap A$ und $g \notin P_1$, was ein Widerspruch ist.

Also ist $\mathrm{Spec}(A)$ Quotientenraum von $\mathrm{Spec}(B)$. Hieraus folgt sofort, daß G-invariante Morphismen $\varphi: \mathrm{Spec}(B) \to X$ zunächst stetige Abbildungen $\underline{\mathrm{Spec}(A)} \xrightarrow{\underline{\psi}} \underline{X}$ induzieren, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Spec}(B)} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\underline{\varphi}"] & \\ \underline{\mathrm{Spec}(A)} \arrow[r, "\underline{\psi}"'] & \underline{X} \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Es ist $\varphi_* B^\sim = \psi_* \pi_* B^\sim \supseteq \psi_* A^\sim$, und das Bild von $\mathcal{O}_X \to \varphi_* B^\sim$ besteht aus G-invarianten Schnitten, ist also in $\psi_* A^\sim$ enthalten (da $A^\sim = (\pi_* B^\sim)^G$ ist). Damit ist ψ ein Morphismus $\mathrm{Spec}(A) \to X$ und somit $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(B), X)^G$ ein Isomorphismus, q.e.d.

Ein Ring $A \subseteq B$ heißt *ganz abgeschlossen* in B, wenn jedes A-ganze Element von B zu A gehört. Ein Integritätsbereich heißt *normal*, wenn er ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

1.2.7. Hilfssatz. *Es sei B ein beliebiger Ring, A ein in B ganz abgeschlossener Unterring. Dann wird der Kern jedes A-Homomorphismus $A[T] \to B$, $T \mapsto b$, durch lineare Polynome erzeugt, genauer gilt:*

Ist $F(b) = 0$, $\deg F = n$, so läßt sich F in der Form

$$F = \sum_{\nu=1}^{n} T^{\nu-1}(a_\nu T - b_\nu)$$

mit $a_\nu, b_\nu \in A$ und $a_\nu b = b_\nu$ darstellen.

Beweis durch vollständige Induktion nach n: Es sei $F = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$. Dann ist $0 = a_n^{n-1}F(b) = (a_nb)^n + (a_nb)^{n-1} + \cdots$, also $a_nb = b_n$ ganz, also aus A, $G =: F - T^{n-1}(a_nT - b_n)$ ist vom Grade $< n$ und $G(b) = 0$, q.e.d.

1.2.8. Satz. *Ist A ein eindimensionaler Noetherscher Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K, so besitzt E/aE für jeden A-Untermodul $E \subseteq K$ und jedes $a \in A$, $a \neq 0$, eine Kompositionsreihe endlicher Länge $l_A(E/aE) \leq l_A(A/aA)$.*

Beweis. Da $\dim(A) = 1$ ist, gilt das für A und somit für jeden endlichen A-Modul E.

Jeder beliebige A-Untermodul $E \subseteq K$ ist Vereinigung des gefilterten Systems (E_α) seiner endlich erzeugten Untermoduln, und zu jedem dieser E_α gibt es ein $b_\alpha \in A$, $b_\alpha \neq 0$, so daß $b_\alpha E_\alpha \subseteq A$ ist. Dann gilt $l_A(E_\alpha/aE \cap E_\alpha) \leq l_A(E_\alpha/aE_\alpha)$, und da $E_\alpha \simeq b_\alpha E_\alpha$ ist und dabei aE in $ab_\alpha E_\alpha$ übergeht, ist

$$l_A(E_\alpha/aE_\alpha) = l_A(b_\alpha E_\alpha/ab_\alpha E_\alpha) = l_A(A/ab_\alpha E_\alpha) - l_A(A/b_\alpha E_\alpha)$$

wegen $ab_\alpha E_\alpha \subseteq b_\alpha E \subseteq A$.

Wegen $ab_\alpha E_\alpha \subseteq aA \subseteq A$ und $A \simeq aA$, wobei $b_\alpha E_\alpha \simeq ab_\alpha E_\alpha$ ist, gilt wiederum

$$\begin{aligned} l_A(A/ab_\alpha E_\alpha) &= l_A(A/aA) + l_A(aA/ab_\alpha E_\alpha) \\ &= l_A(A/aA) + l_A(A/b_\alpha E_\alpha). \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $l_A(E_\alpha/aE \cap E_\alpha) \leq l_A(A/aA)$ für alle α. Hieraus folgt wegen $E/aE = \bigcap_\alpha (E_\alpha/aE \cap E_\alpha)$ die Behauptung, q.e.d.

Hieraus folgt insbesondere:

1.2.9. Satz. *Es sei A wie in 1.2.8. erklärt. Dann gilt:*

1⁰. *Die ganze Abschließung von A in K ist wieder Noethersch und eindimensional.*

2⁰. *Ist A ein normaler eindimensionaler lokaler Noetherscher Integritätsbereich, so ist A ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis von 2⁰. Es sei $x \in K$, $x \neq 0$. Wir zeigen, daß stets x oder $\frac{1}{x} \in A$ ist. Angenommen, es sei $x \notin A$, der Kern $A[T] \to A[x]$, $T \mapsto x$ wird (nach 1.2.7.) durch alle $aT - b \in A[T]$, $a, b \in A$ mit $ax = b$, erzeugt, und da $x \notin A$ gilt, ist stets $a \in \mathfrak{m}_A$, $\mathfrak{m}_A$ Maximalideal von A. Sind alle $b \in \mathfrak{m}_A$, so ist

$$A[T]/\mathfrak{m}_A A[T] \to A[x]/\mathfrak{m}_A A[x]$$

ein Isomorphismus; das widerspricht 1.2.8. Also ist ein $b \notin \mathfrak{m}_A$, also Einheit in A und $\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \in A$, q.e.d.

1.2.10. *Ist A ein Noetherscher Integritätsbereich, $\bar{A}$ seine ganze Abschließung im Quotientenkörper, so ist $\bar{A}$ der Durchschnitt aller Lokalisierungen $\bar{A}_{\bar{P}}$, so daß $\bar{A}_{\bar{P}}$ diskreter Bewertungsring ist.*

Beweis. $x \in Q(A)$ ist A-ganz $\Leftrightarrow 1 \in \frac{1}{x} A\left[\frac{1}{x}\right]$. Ist $x \notin \bar{A}$, so ist also $\frac{1}{x} A\left[\frac{1}{x}\right] \neq A\left[\frac{1}{x}\right]$, und es gibt daher ein minimales Primideal $P \in \operatorname{Spec}\left(A\left[\frac{1}{x}\right]\right)$ mit $\frac{1}{x} \in P$. Da $A\left[\frac{1}{x}\right]$ Noethersch ist, ist $ht(P) = 1$ ($ht(P) =$ Höhe von $P =$ Rang von P in älterer Terminologie). Die ganze Abschließung von $A\left[\frac{1}{x}\right]_P$ ist also Durchschnitt diskreter Bewertungsringe, die alle $\bar{A}$, aber nicht x enthalten. Also ist $\bar{A}$ Durchschnitt diskreter Bewertungsringe. Wir zeigen noch, daß die $A\left[\frac{1}{x}\right]_P$ enthaltenden Bewertungsringe alle von der Form $\bar{A}_{\bar{P}}$ sind.

Es sei A' die ganze Abschließung von A in $A\left[\frac{1}{x}\right] =: R$, $P' = P \cap A'$. Wir betrachten alle $(a, b) \in A' \times A'$ mit $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$. Nach 1.2.7. wird der Kern von $A'[T] \to A\left[\frac{1}{x}\right] = A'\left[\frac{1}{x}\right]$, $T \mapsto \frac{1}{x}$, durch alle $aT - b$ erzeugt. Wenn eines dieser $a \notin P$ ist, dann ist $\frac{1}{x} \in A'_a \subseteq \bar{A}_a$ und $\bar{A}_S$ mit $S = A' - P'$ die ganze Abschließung von $A\left[\frac{1}{x}\right]_S = A\left[\frac{1}{x}\right]_P$. Wären alle $a \in P$, so gilt: Entweder sind alle $b \in P$, dann ist $A'[T]/P'A'[T] \simeq A\left[\frac{1}{x}\right] \Big/ P'A\left[\frac{1}{x}\right]$ ein Isomorphismus im Widerspruch zu $\frac{1}{x} \in P$ und P minimal, oder es ist ein $b \notin P$, dann ist $x = \frac{a}{b} \in A\left[\frac{1}{x}\right]_P$ im Widerspruch zu $\frac{1}{x} \in P$, q.e.d.

1.3. Begriff der Flachheit

Es sei A ein Ring, ein A-Modul M heißt *flach*, wenn der Funktor

$$N \mapsto N \otimes_A M$$

exakt ist, d. h. Monomorphismen in Monomorphismen überführt. Ein A-Modul M heißt *treuflach*, wenn außerdem aus $N \otimes_A M = 0$ stets $N = 0$ folgt.

Flache und treuflache Moduln treten sehr häufig auf, und es lohnt daher, einige allgemeine Eigenschaften zu verifizieren.

Zunächst geben wir verschiedene Charakterisierungen der Flachheit eines Moduls.

Da das Tensorprodukt mit induktiven Limites vertauschbar ist und der induktive Limes von Monomorphismen wieder ein Monomorphismus ist, ist M genau dann flach, wenn $N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ für jeden endlich erzeugten Modul N und jeden endlich erzeugten Untermodul $N' \subseteq N$ ein Monomorphismus ist.

Das ist wiederum gleichbedeutend damit, daß für jeden Modul N'' von endlichem Typ

$$\operatorname{Tor}_1^A(M, N'') = 0$$

gilt (da man N'' als Quotient A^p/N' darstellen kann und

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(M, N'') \to N' \otimes_A M \to A^p \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

exakt ist). Durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden und aus der Kohomologiefolge für $\operatorname{Tor}^A(M, -)$ folgt, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\operatorname{Tor}_1^A(M, N'') = 0$ für alle endlich erzeugten Moduln N''.

(ii) $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$ für alle Ideale $J \subseteq A$.

(iii) $J \otimes_A M \to M$, $a \otimes x \mapsto ax$, ist injektiv für alle Ideale J.

(iv) $J \otimes_A M \to M$ ist injektiv für alle endlich erzeugten Ideale $J \subseteq A$.

1.3.1. Satz. *Es sei M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *M ist A-flach.*

b) $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$ *für alle endlich erzeugten Ideale J.*

c) $J \otimes_A M \to M$, $a \otimes x \mapsto ax$, *ist injektiv für alle endlich erzeugten Ideale J.*

d) *Für jede Relation* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, $a_i \in A$, $x_i \in M$, *gibt es Elemente* $y_j \in M$, $a_{ij} \in A$, $j = 1, \ldots, m$, *so daß*

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i a_{ij} = 0$$

ist.

Beweis. Die Äquivalenz von a), b), c) wurde bereits gezeigt. Wir zeigen a) $\Rightarrow$ d), d) $\Rightarrow$ c).

a) $\Rightarrow$ d). Aus $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, $a_i \in A$, $x_i \in M$, folgt

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes x_i \in \mathrm{Kern}(A^n \xrightarrow{(a_1, \ldots, a_n)} A \otimes_A M) =: K$$

(wobei (e_i) die kanonische Basis von A^n ist). Folglich ist

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes x_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) \otimes y_j$$

mit gewissen $y_j \in M$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \in K$, $j = 1, \ldots, m$. Koeffizientenvergleich liefert

$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$, und $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \in K$ bedeutet $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{ij} = 0$.

d) $\Rightarrow$ c). Aus d) folgt sofort, daß $J \otimes_A M \to M$ für endlich erzeugte Ideale $J \subseteq A$ injektiv ist, q.e.d.

1.3.2. Beispiele

(1) *Freie Moduln sind flach, ebenso projektive Moduln.*

(2) *Gefilterte Kolimites flacher Moduln sind flach (da das Tensorprodukt mit Kolimites kommutativ ist.*
Nach D. Lazard [36] gilt: *Jeder flache A-Modul ist gefilterter Kolimes endlich erzeugter freier Moduln.*

(3) *A_S ist A-flach für alle multiplikativ abgeschlossenen Systeme $S \subseteq A$.*

(4) *Polynomringe $A[X_1, \ldots, X_n]$ sind A-flach.*

(5) *Ist M A-flach, $P \in \mathrm{Spec}(A)$, so ist M_P A_P-flach. Ist umgekehrt M_P für alle Maximalideale $P \in \mathrm{Spec}(A)$ A_P-flach, so ist M A-flach* (wegen $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)_P = \mathrm{Tor}_n^{A_P}(M_P, N_P)$).

(6) *Ein A-Modul M von endlicher Darstellung*[1]) *ist genau dann A-flach, wenn er projektiv, d. h. lokal frei ist.*

Beweis. Wegen (5) kann man annehmen, daß A ein lokaler Ring ist. Nach dem Lemma von Nakayama gibt es einen Epimorphismus $A^n \to M$, so daß $A^n \otimes_A k = k^n \simeq M \otimes_A k$ ist (k Restklassenkörper). Ist $N = \mathrm{Kern}(A^n \to M)$, so ist

$$\mathrm{Tor}_1(k, M) \to N \otimes_A k \to A^n \otimes_A k \to M \otimes_A k \to 0$$

exakt. Folglich ist, wenn M projektiv ist, $N \otimes_A k = 0$. Nach dem Lemma von Nakayama ist dann $N = 0$[2]), q.e.d.

1.3.3. Satz. *Es sei M ein A-Modul, J ein A-Ideal, so daß M/JM A/J-flach und $\mathrm{Tor}_1^A(A/J, M) = 0$ ist. Dann gilt:*

Ist I ein A-Ideal, so daß $J^n \subseteq I$ ist für ein n, so ist M/IM A/I-flach und $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.

Beweis. Da für A/J-Moduln N

$$M \otimes_A N \simeq M \otimes_A (A/J \otimes_{(A/J)} N) \simeq (M/JM) \otimes_{A/J} N$$

ist, ist der Funktor $N \mapsto \mathrm{Tor}_1^A(M, N)$ rechtsexakt auf der Kategorie der A/J-Moduln, außerdem ist $\mathrm{Tor}_1^A(M, -)$ mit direkten Summen vertauschbar.

Aus $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$ folgt daher $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ für alle A/J-Moduln N (man betrachte zu N eine Darstellung $F/K \xrightarrow{\sim} N$, F ein freier A/J-Modul, dann ist $\mathrm{Tor}_1^A(M, F) = 0$ und daher $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$). Ist N ein A/J^2-Modul, so folgt aus der exakten Folge $0 \to JN \to N \to N/JN \to 0$

(1) $\quad \mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0 \quad$ (wegen $\mathrm{Tor}_1^A(M, JN) = \mathrm{Tor}_1^A(M, N/JN) = 0$).

Aus $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$ folgt ferner

$$J \otimes_A M \simeq JM,$$

also $A/J \otimes_A J \otimes_A M \simeq A/J \otimes_A (JM)$, d. h.

$$J/J^2 \otimes_{A/J} M/J^2M \simeq JM/J^2M = (J/J^2)(M/J^2M),$$

und das ist gleichbedeutend mit

(2) $\quad \mathrm{Tor}_1^{A/J^2}(M/J^2M, A/J) = 0$.

Aus (2) folgt, daß man (1) auf A/J^2, M/J^2M anwenden kann, also ist

$$\mathrm{Tor}_1^{A/J^2}(M/J^2M, N) = 0$$

für alle A/J^2-Moduln N, d. h., es gilt:

(3) $\quad M/J^2M$ ist A/J^2-flach,

und aus (1) folgt speziell

(4) $\quad \mathrm{Tor}_1^A(M, A/J^2) = 0$.

J^2 erfüllt also dieselben Voraussetzungen wie J und daher auch J^4, J^8, ...

---

[1]) Ein A-Modul M heißt *von endlicher Darstellung*, wenn M Quotient A^p/L ist, wobei A^p *und* L endlich erzeugt sind.

[2]) Es gilt dann auch für jede Darstellung $M \simeq A^n/N$, daß N endlich erzeugt ist, da $N \oplus A^p \simeq L \oplus A^n$ ist.

Es sei I ein Ideal, so daß $J^n \subset I$ ist für ein n; o.B.d.A. kann man $n = 2^m$ annehmen. Dann ist also M/J^nM ein (A/J^n)-flacher Modul und $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J^n) = 0$. Folglich ist

$$M/IM = (M/J^nM) \otimes_{A/J^n} (A/I)$$

ein (A/I)-flacher Modul, und aus (1), angewandt auf J^n anstelle von J^2, folgt $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$, q.e.d.

1.3.4. Korollar. *Ist J nilpotent, so ist M genau dann A-flach, wenn* $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$ *und M/JM A/J-flach ist.*

Weitere Anwendungen werden im nächsten Paragraphen gegeben.

1.3.5. Satz. *Ein A-Modul M ist treuflach über A genau dann, wenn M A-flach ist und $M \otimes_A k(P) \neq 0$ für alle Maximalideale $P \in$* Spec(A).

Beweis. $(\Rightarrow)$ klar.

$(\Leftarrow)$ Ist $I \subset A$ ein Ideal, so gibt es ein Maximalideal $P \supseteq I$, und $0 \to P/I \to A/I \to k(P) \to 0$ ist exakt. Folglich ist die Sequenz

$$0 \to P/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A M \to k(P) \otimes_A M \to 0$$

ebenfalls exakt und daher $A/I \otimes_A M \neq 0$ für alle I.

Ist N ein A-Modul, $N \neq 0$, so gibt es ein Ideal I und eine Einbettung $0 \to A/I \to N$; also ist $0 \to A/I \otimes_A M \to N \otimes_A M$ exakt, $N \otimes_A M \neq 0$.

1.3.6. Satz. *Es sei B eine A-Algebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *B ist treuflach über A.*

(ii) *B ist A-flach und* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *surjektiv.*

(iii) *B ist A-flach und $BP \neq B$ für alle Maximalideale $P \in$* Spec(A).

(iv) *B ist A-flach und $IB \cap A = I$ für alle A-Ideale I.*

(v) *$A \subseteq B$ und B/A ist ein flacher A-Modul.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt unmittelbar aus $B \otimes_A k(P) \neq 0$ für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Es ist zu zeigen, daß $A/I \subseteq B/IB$ ist, und da $B/IB = B \otimes_A A/I$ treuflach über A/I ist, genügt es zu zeigen, daß $A \to B$, $x \mapsto x \cdot 1_B$ injektiv ist. Es sei $x \neq 0$ aus A. Dann ist $0{:}xA \neq A$ und $0 \to (0{:}xA) \to A \xrightarrow{x} A$ exakt ($\xrightarrow{x}$ bedeutet: Multiplikation mit x). Daraus folgt, daß $0 \to (0{:}xA)\,B \to B \xrightarrow{x \cdot 1_B} B$ exakt ist und $(0{:}xA)\,B \neq B$, also $x \cdot 1_B \neq 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Aus der exakten Folge $0 \to A \to B \to B/A \to 0$ erhält man für alle A-Ideale I die exakte Folge

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{Tor}_1^A(B, A/I) \to \mathrm{Tor}_1^A(B/A, A/I) \to A/I \xrightarrow{j} B/IB.$$

Wenn B der Bedingung (iv) genügt, dann ist $\mathrm{Tor}_1^A(B, A/I) = 0$ und j injektiv, also $\mathrm{Tor}_1^A(B/A, A/I) = 0$ und daher B/A A-flach.

(v) $\Rightarrow$ (i) folgt unmittelbar aus der exakten Folge $(*)$, q.e.d.

Bemerkung. Ist B treuflach über A und B Noethersch, so ist (nach (iv)) A Noethersch.

1.4. Komplettierung

Ist A ein Ring, $V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge, so definieren wir:

$$A_V^\wedge = \operatorname*{lim\text{-}proj}_{V(J) \subseteq V} (A/J).$$

Wird V durch ein endlich erzeugtes Ideal J definiert, so ist

$$A_V^\wedge = \operatorname*{lim\text{-}proj}_{n} (A/J^n)$$

und wird auch *J-adische Komplettierung* genannt (denn aus $V(I) \subseteq V$ folgt $J^n \subseteq I$ für $n \gg 0$).

Für A-Moduln M definieren wir:

$$M_V^\wedge = \operatorname*{lim\text{-}proj}_{V(J) \subseteq V} (M/JM).$$

$M \mapsto M_V^\wedge$ ist ein Funktor der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der $A_V^\wedge$-Moduln.

Wir benutzen folgendes Resultat (vgl. etwa M. Nagata [39], O. Zariski [57] und H. Kurke [33]).

1.4.1. Satz. *Für Noethersche Ringe und Moduln ist $A_V^\wedge$ Noethersch, A-flach und $M_V^\wedge = A_V^\wedge \otimes_A M$.*

Hieraus folgt z.B., daß $JA_V^\wedge$ für Ideale J mit $V(J) \subseteq V$ abgeschlossen in $A_V^\wedge$ ist, also $A_V^\wedge/JA_V^\wedge = A/J$, $M_V^\wedge/JM_V^\wedge = M/JM$.

Der Ring $A_V^\wedge$ ist treuflach über A genau dann, wenn V alle Maximalideale enthält.

Grundlegend für den Beweis von 1.4.1. ist das folgende Lemma von Artin und Rees:

1.4.2. Hilfssatz. *Es sei M ein Noetherscher A-Modul, N ein Untermodul, J ein A-Ideal, dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $J^{n+p}M \cap N = J^p(J^nM \cap N)$ für alle $p \geqq 0$ ist.*

Für die Beweise siehe die oben zitierten Arbeiten.

Damit kann man beispielsweise 1.3.4. wie folgt verschärfen:

1.4.3. Satz. *Es sei B eine A-Algebra, A ein Noetherscher Ring, M ein Noetherscher B-Modul und J ein A-Ideal, so daß JB im Jacobson-Radikal von B enthalten ist. Ist M/JM A/J-flach und* $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/J) = 0$, *so ist M A-flach.*

Beweis. Nach 1.3.3. ist M/J^nM für jedes n A/J^n-flach. Ist $I \subset A$ ein Ideal, so ist

$$0 \to J^n \cap I/J^nI \to I/J^nI \to A/J^n$$

exakt. Also ist

$$0 \to (J^n \cap I/J^nI) \otimes_A (M/J^nM) \to I \otimes_A M/J^nM \to M/J^nM$$

exakt.

Nach dem Artin-Reesschen Lemma ist

$$J^{n+p} \cap I/J^{n+p} I \to J^n \cap I/J^n I$$

für $p \gg 0$ die Nullabbildung. Also ist

$$\operatorname*{lim\text{-}proj}_n \big((J^n \cap I/J^n I) \otimes_A M/J^n M\big) = 0,$$

und da Limites linksexakt sind, ist

$$0 \to I \otimes_A M^\wedge \to M^\wedge$$

exakt. Da $M^\wedge = M \otimes_B B^\wedge$ und $B^\wedge$ treuflach über B ist, folgt daraus, daß $I \otimes_A M \to M$ injektiv ist, q.e.d.

1.4.4. Korollar. *Ist A ein Noetherscher Ring, B eine A-Algebra, M ein Noetherscher B-Modul, so ist M genau dann A-flach, wenn* $\mathrm{Tor}_1^A(M_P, k(P \cap A)) = 0$ *ist für alle Maximalideale* $P \in \mathrm{Spec}(B)$.

Beweis. Ersetzen wir M durch M_P, B durch B_P, A durch $A_{(P \cap A)}$, so folgt aus dem vorigen Satz, daß M_P A-flach ist für alle Maximalideale $P \in \mathrm{Spec}(B)$. Daher ist $(I \otimes_A M_P) \to M_P$ injektiv für alle $P \in \mathrm{Spec}(B)$ und A-Ideale I. Also ist $I \otimes_A M \to M$ injektiv, q.e.d.

1.4.5. Korollar. *Es sei A ein Noetherscher Ring, B eine A-Algebra, M ein A-flacher Noetherscher B-Modul. Ist $f_1, \dots, f_m \in B$ eine Folge von Elementen aus B, so daß für alle Maximalideale $P \in V(f_1 B + \dots + f_m B)$ die Folge $[M \otimes_A k(P \cap A)]$-regulär ist, so ist $M/f_1 M + \dots + f_m M$ A-flach.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $\mathrm{Tor}_1^A\left(\left(M\Big/\sum_{i=1}^m f_i M\right)_P, k(P \cap A)\right) = 0$ ist für alle Maximalideale $P \in \mathrm{Spec}(B)$.

Ist ein $f_i \notin P$, so ist $\left(M\Big/\sum_{i=1}^m f_i M\right)_P = 0$, und man kann daher annehmen, daß $P \in V(f_1 B + \dots + f_m B)$ ist. Wir setzen also voraus, daß A, B lokale Ringe sind, k sei der Restklassenkörper von A, $\mathfrak{m}$ das Maximalideal, $B \otimes_A k \neq 0$. Es genügt, die Behauptung für $m = 1$ zu beweisen, der allgemeine Fall folgt daraus durch vollständige Induktion.

Es ist

$$\mathrm{Tor}_1^A(M/fM, k) = \mathrm{Kern}\,(\mathfrak{m} \otimes_A (M/fM) \to M/fM).$$

Da M A-flach ist, ist $\mathfrak{m} \otimes_A M = \mathfrak{m}M$, also $\mathfrak{m} \otimes_A (M/fM) = \mathfrak{m}M/\mathfrak{m}fM$ und daher $\mathrm{Tor}_1^A(M/fM, k) = \mathfrak{m}M \cap fM/\mathfrak{m}fM$. Aus $fx \in \mathfrak{m}M$ $(x \in M)$ folgt $f(x \otimes 1_k) = 0$, also $x \otimes 1_k = 0$, da f regulär in $M \otimes_A k$ ist. Also ist $\mathfrak{m}M \cap fM = \mathfrak{m}fM$ und $\mathrm{Tor}_1^A(M/fM, k) = 0$, q.e.d.

Ein wichtiges Resultat für die algebraische Geometrie, das die Theorie der kompletten J-adischen Ringe benutzt, ist Grothendiecks „Théorème d'existence". Es sei A ein Ring. Ein A-Schema X heißt *eigentlich*, wenn X separiert, von endlicher Darstellung und universell abgeschlossen ist.

„Separiert und von endlicher Darstellung" bedeutet: X ist Vereinigung endlich vieler affiner Schemata U_α, so daß

$$U_\alpha \subseteq \mathsf{A}^{n(\alpha)} \times \mathrm{Spec}\,(A) = \mathrm{Spec}\,(A[T_1, \dots, T_{n(\alpha)}])$$

und durch endlich viele Polynome aus $A[T_1, \dots, T_{n(\alpha)}]$ definiert und

$$\Gamma(U_\alpha) \otimes_A \Gamma(U_\beta) \to \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta)$$

surjektiv ist.

„Universell abgeschlossen" bedeutet: Für jede A-Algebra B ist

$$X \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B)$$

ein abgeschlossener Morphismus.

Das wichtigste Beispiel solcher Morphismen sind projektive Morphismen, d. h. die Projektionen abgeschlossener Unterschemata $X \subseteq \mathsf{P}^n \times \mathrm{Spec}(A)$, die durch endlich viele Formen aus $A[T_0, \dots, T_n]$ definiert sind auf $\mathrm{Spec}(A)$, bzw. Morphismen, die lokal bezüglich $\mathrm{Spec}(A)$ von diesem Typ sind.

Es sei jetzt A ein Noetherscher Ring, $J \subset A$ ein Ideal, $V = V(J)$ und $A_V^\wedge = A$. Ferner sei X ein A-Schema. Dann ordnen wir jeder kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ auf X das folgende projektive System $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ zu:

$$\mathcal{F}_n =: \mathcal{F} \otimes_A A/J^{n+1} = \mathcal{F}/J^{n+1}\mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}_{n+p} \to \mathcal{F}_n \text{ induziert durch die kanonische Abbildung } A/J^{n+p+1} \to A/J^{n+1}.$$

Diese Zuordnung ist ein Funktor der Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ der kohärenten Garben auf X in die Kategorie der projektiven Systeme über N kohärenter Garben auf X.

Grothendiecks Existenzsatz lautet (vgl. [18], Kap. III, § 5):

1.4.6. Satz. *Ist X ein eigentliches A-Schema, so ist der Funktor*

$$\mathcal{F} \mapsto (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0} = (\mathcal{F} \otimes_A A/J^{n+1})_{n \geq 0}$$

eine Äquivalenz der Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ mit der Kategorie der projektiven Systeme $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ kohärenter Garben mit der Eigenschaft $\mathcal{F}_{n+p} \otimes_A A/J^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n$, induziert durch $\mathcal{F}_{n+p} \to \mathcal{F}_n$.

Bemerkung. *Diese Äquivalenz ist mit Tensorprodukten verträglich. Wenn also insbesondere die $\mathcal{F}_n$ eine Algebrastruktur besitzen und $\mathcal{F}_{n+p} \to \mathcal{F}_n$ mit dieser verträglich sind, besitzt auch $\mathcal{F}$ eine Algebrastruktur.*

1.5. Garben

Von Grothendieck und M. Artin ist die Theorie der Garben verallgemeinert worden mit dem Ziel, eine geeignete Kohomologietheorie für algebraische Mannigfaltigkeiten über Körpern von Primzahlcharakteristik zu definieren, um damit gewisse Vermutungen von A. Weil über die Kongruenzzetafunktion zu beweisen.

Diese Verallgemeinerung erweist sich auch für andere Probleme als nützlich, z. B. für Existenzprobleme.

Wir wollen die wichtigsten Begriffe dieser Garbentheorie hier einführen, sie werden jedoch erst in Kapitel 7 benötigt.

Zur Definition einer Garbe auf einem topologischen Raum X benötigt man lediglich die Begriffe „offene Menge" und „offene Überdeckung". Die offenen Mengen sind die Objekte einer Kategorie, deren Morphismen die Inklusionen sind. Eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $W \subseteq X$ ist durch folgenden Kofunktor $R_{\mathfrak{U}}$ bis auf Äquivalenz bestimmt:

$$R_{\mathfrak{U}}(U) = \begin{cases} \{i_U : U \hookrightarrow W\}, & \text{falls} \quad U \subseteq V \quad \text{für ein} \quad V \in \mathfrak{U}, \\ \emptyset & \text{sonst}. \end{cases}$$

Prägarben (von Mengen) sind Kofunktoren $\mathscr{F}$ auf der Kategorie der offenen Mengen (mit Werten in der Kategorie der Mengen). Die Eigenschaft von $\mathscr{F}$, Garbe zu sein, läßt sich dann dadurch ausdrücken, daß für jede offene Menge $W \subseteq X$ und jede Überdeckung $\mathfrak{U}$ von W gilt:

$$\mathscr{F}(W) \to \mathrm{Hom}\,(R_{\mathfrak{U}}, \mathscr{F}),$$

definiert durch $s \mapsto s' : R \to \mathscr{F}$, $s'(i_U) = s \mid U$, ist ein Isomorphismus.

Das führt zu folgender Verallgemeinerung: Anstelle der Kategorie der offenen Mengen wird eine beliebige (kleine) Kategorie $\mathscr{S}$ betrachtet, in der außerdem jedem $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}$ eine gewisse Teilmenge $J(S)$ von Subfunktoren von $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, S)$ zugeordnet ist (*überdeckende Siebe*), so daß folgendes gilt:

(T 0) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, S) \in J(S)$.

(T 1) Ist $R \in J(S)$ und $j : T \to S$ ein Morphismus, so ist $j^{-1}(R) \in J(T)$. Dabei ist $j^{-1}(R)\,(U) = \{i : U \to T;\ j \circ i \in R(U)\}$.)

(T 2) Ist $R \in J(S)$, R' ein beliebiger Subfunktor von $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, S)$, so daß für alle $(j : T \to S) \in R(T)$

$j^{-1}(R') \in J(T)$

gilt, so ist $R' \in J(S)$.

Die mit einer solchen Zusatzstruktur versehene Kategorie $\mathscr{S}$ heißt ein *Situs* oder eine Kategorie mit einer *Grothendieck-Topologie*.

Auf einem Situs kann man im wesentlichen alle Begriffe und Konstruktionen der allgemeinen Garbentheorie durchführen. Mit $\mathscr{S}^\wedge$ bezeichnen wir die Kategorie der mengenwertigen Kofunktoren auf $\mathscr{S}$ (*Prägarben*), mit $\mathscr{S}^\sim$ die folgende volle Unterkategorie (*Garben*):

$\mathscr{F} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}^\sim$ genau dann, wenn $\mathscr{F}(S) \to \mathrm{Hom}\,(R, \mathscr{F})$ für alle S und alle $R \in J(S)$ ein Isomorphismus ist. (Dabei ist $\mathscr{F}(S) \to \mathrm{Hom}\,(R, \mathscr{F})$ wie folgt definiert:

$$s \mapsto s|R, \quad s|R : R \to \mathscr{F},\ (s|R)_U(i) = \mathscr{F}(i)s$$

für $i \in R(U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(U, S)$.)

Beispiele findet man in M. Artin [4]. Wir wollen hier nur das folgende, für uns wichtige Beispiel erwähnen:

Es sei X ein Schema und X_{et} das folgende Situs:

Die zugrunde liegende Kategorie ist die Kategorie aller Etalmorphismen $U \to X$ (vgl. Kap. 3). Eine Familie $(V_\alpha \to U)$ in dieser Kategorie heißt *überdeckend*, wenn $\coprod V_\alpha \to U$ surjektiv ist. Jeder solchen Familie wird ein überdeckendes Sieb $R_{(V_\alpha)}$ zugeordnet:

$$R_{(V_\alpha)}(V) = \{f : V \to U;\ \exists \text{ Faktorisierung } (V \xrightarrow{f} U) = (V \to V_\alpha \to U)\},$$

und wir definieren

$$J(U) = \{R \subseteq \mathrm{Hom}_X(-, U),\ \exists (V_\alpha \to U) \quad \text{und} \quad R_{(V_\alpha)} \subseteq R\}.$$

Dadurch wird auf X_{et} eine Topologie definiert (*Etaltopologie*), die zugehörigen Garben heißen *Etalgarben*.

Bemerkung. Die meisten Topologien werden auf diese Weise durch eine „Prätopologie" erzeugt. Eine *Prätopologie* auf $\mathscr{S}$ besteht darin, daß jedem Objekt S eine Klasse $\mathrm{Cov}\,(S)$ von „überdeckenden Familien" $\{S_\alpha \to S\}$ zugeordnet wird, so daß folgendes gilt:

(PT 0) $\{S \xrightarrow{\mathrm{id}} S\} \in \mathrm{Cov}\,(S)$.

(PT 1) Für $\{S_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} S\} \in \mathrm{Cov}\,(S)$, $j : T \to S$ existieren $S_\alpha \times_S T$ und $\{S_\alpha \times_S T \xrightarrow{(i_\alpha \times_S \mathrm{id}_T)} T\} \in \mathrm{Cov}\,(T)$.

(PT 2) Für $\{S_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} S\} \in \mathrm{Cov}\,(S)$, $\{S_{\alpha\beta} \xrightarrow{i_{\alpha\beta}} S_\alpha\} \in \mathrm{Cov}\,(S_\alpha)$ ist $\{S_{\alpha\beta} \xrightarrow{i_\alpha \circ i_{\alpha\beta}} S\} \in \mathrm{Cov}\,(S)$.

Jeder überdeckenden Familie $\{S_\alpha \to S\}$ wird ein Sieb $R = R_{\{S_\alpha\}}$ zugeordnet:

$$R(U) = \left\{ j : U \to S,\ \exists \text{ Faktorisierung } \begin{tikzcd}[column sep=small] & S_\alpha \arrow[dr] & \\ U \arrow[ur] \arrow[rr, "j"] & & S \end{tikzcd} \right\};$$

ist $J(S)$ die Menge aller $R \subseteq \mathrm{Hom}\,(-, S)$, die ein solches $R_{\{S_\alpha\}}$ enthalten, so wird durch $S \mapsto J(S)$ eine Topologie auf $\mathscr{S}$ definiert.

$\mathscr{F} \in \mathscr{S}^\wedge$ ist dann genau eine Garbe, wenn für alle S und alle $\{S_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} S\} \in \mathrm{Cov}\,(S)$ gilt: Zu jedem $(s_\alpha) \in \prod_\alpha \mathscr{F}(S_\alpha)$ mit

$$\mathscr{F}(i_\alpha \times_S \mathrm{id}_{S_\beta})\,(s_\alpha) = \mathscr{F}(\mathrm{id}_{S_\alpha} \times_S i_\beta)\,(s_\beta) \in \mathscr{F}(S_\alpha \times_S S_\beta)$$

gibt es genau ein $s \in \mathscr{F}(S)$ mit $\mathscr{F}(i_\alpha)\,(s) = s_\alpha$, d. h.

$$\mathscr{F}(S) = \mathrm{Ker}\left(\prod_\alpha \mathscr{F}(S_\alpha) \overset{\varrho_1}{\underset{\varrho_2}{\rightrightarrows}} \prod_{\beta,\gamma} \mathscr{F}(S_\beta \times_S S_\gamma)\right).$$

Man kann jeder Prägarbe $\mathscr{F}$ in universeller Weise eine Garbe $\mathscr{F}^\#$ wie folgt zuordnen:

1. Wir identifizieren zwei Schnitte $s, t \in \mathscr{F}(S)$, wenn ein $R \in J(S)$ existiert, so daß s, t in $\mathrm{Hom}\,(R, \mathscr{F})$ dasselbe Bild haben. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Prägarbe $\mathscr{F}_0$ und einen Morphismus $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_0$.

(Bemerkung. Man prüft leicht nach: $R, R' \in J(S) \Rightarrow R \cap R' \in J(S)$. Daraus)lgt, daß die obige Relation zwischen s, t eine Äquivalenzrelation ist.)

2. Anschließend müssen noch gewisse, lokal gegebene Schnitte verheftet werden, . h., man bildet

$$\mathscr{F}^{\#}(S) = \operatorname*{lim\text{-}ind}_{R \in J(S)} \operatorname{Hom}(R, \mathscr{F}_0).$$

Vegen (T 1) läßt sich $\mathscr{F}^{\#}$ zu einem Kofunktor fortsetzen, und es stellt sich heraus, laß $\mathscr{F}^{\#}$ eine Garbe ist.

Wir skizzieren den Beweis für diese Behauptung.

Es ist zu zeigen, daß für $R \in J(S)$ gilt:

$$\mathscr{F}^{\#}(S) \to \operatorname{Hom}(R, \mathscr{F}^{\#}), \quad s \mapsto s|R$$

st bijektiv.

Wir bezeichnen mit l_R die kanonische Abbildung

$$\operatorname{Hom}(R, \mathscr{F}_0) \to \mathscr{F}^{\#}(S) \quad \big(R \in J(S)\big).$$

Vird $s \in \mathscr{F}^{\#}(S)$ durch $s_0 : R' \to \mathscr{F}_0$ $\big(R' \in J(S)\big)$ repräsentiert, so ist

$$(s|R)_U : R(U) \to \mathscr{F}^{\#}(U)$$

;egeben durch $i \mapsto l_{i^{-1}(R')}(s_0 \circ i_{R'})$, wobei $i_{R'} : i^{-1}(R') \to R'$ die durch $i : U \to S$ in-luzierte Abbildung ist $(f \mapsto i \circ f)$.

Sind $s, t \in \mathscr{F}^{\#}(S)$ und $s|R = t|R$, so gibt es ein $R' \in J(S)$ und $s_0, t_0 \in \operatorname{Hom}(R', \mathscr{F}_0)$, lie s und t repräsentieren, und es ist

$$(*) \qquad s_0 \circ i_{R'} = t_0 \circ i_{R'} \text{ für alle } i \in R(U).$$

Es sei $R'' \subseteq \operatorname{Hom}(-, S)$ wie folgt definiert:

$$R''(T) = \{(j : T \to S) \in R'(T),\ s_0(j) = t_0(j)\}.$$

Dann folgt aus $(*)$ leicht

$$i^{-1}(R'') \supseteq i^{-1}(R') \qquad \text{für alle} \qquad (i : U \to S) \in R(U);$$

ılso ist $R'' \in J(S)$ und $s_0|R'' = t_0|R''$ und somit $s = t$.

Also bleibt noch zu zeigen: Zu $h : R \to \mathscr{F}^{\#}$ gibt es ein $s \in \mathscr{F}^{\#}(S)$ mit $s|R = h$.

Offenbar ist $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}^{\#}$. Es sei $R' \subseteq \operatorname{Hom}(-, S)$ wie folgt definiert:

$$R'(T) = \{(j : T \to S) \in R(T);\ h(j) \in \mathscr{F}_0(T)\}.$$

Wir zeigen, daß $R' \in J(S)$ ist. Dann folgt daraus $h = l_{R'}(h_0)|R$, wobei $h_0 : R' \to \mathscr{F}_0$ lie durch h induzierte Transformation ist.

Nach (T 2) genügt es zu zeigen: Ist $(i : U \to S) \in R(S)$, so ist $i^{-1}(R') \in J(U)$.

Es ist $i^{-1}(R')(T) = \{f : T \to U;\ h_T(i \circ f) \in \mathscr{F}_0(T)\}$. Wenn $h_U(i) \in \mathscr{F}^{\#}(U)$ durch $s_0 : R'' \to \mathscr{F}_0$ repräsentiert wird $\big(R'' \in J(U)\big)$, ist $R'' \subseteq i^{-1}(R')$ (da $i \circ f = R(f)(i)$ ınd daher $h_T(i \circ f) = h_T \circ R(f)(i) = \mathscr{F}^{\#}(f)\, h_U(i) = l_{f^{-1}(R'')}^{-1}(s_0 \circ f')$ ist, wobei $f' : f^{-1}(R'') \to R''$ durch f induziert ist), also ist $i^{-1}(R') \in J(U)$, q.e.d.

Es gibt eine kanonische Abbildung $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\#}$, und ist $\mathscr{G} \in \mathscr{S}^{\sim}$ und $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Morphismus in $\mathscr{S}^{\wedge}$, so gibt es nach Konstruktion von $\mathscr{F}^{\#}$ eine eindeutig bestimmte Faktorisierung

$$\mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\#} \to \mathscr{G}.$$

Also ist $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\#}$ ein linksadjungierter Funktor zu dem Inklusionsfunktor $\mathscr{S}^{\sim} \to \mathscr{S}^{\wedge}$.

Ist $\mathscr{F} \in \mathscr{S}^{\wedge}$ und $R \in J(S)$, $f, g \in \operatorname{Hom}(R, \mathscr{F})$, so daß f, g in $\operatorname{Hom}(R, \mathscr{F}^{\#})$ dasselbe Element induzieren, so gilt das auch in $\operatorname{Hom}(R, \mathscr{F}_0)$, und hieraus folgt nach üblichen Schlüssen $f|R' = g|R'$ für ein $R' \subseteq R$, $R' \in J(S)$. Somit ist die kanonische Abbildung

$$\operatorname*{lim\text{-}ind}_{R \in J(S)} \mathscr{F}_0(R) \to \mathscr{F}^{\#}(S)$$

injektiv, und hieraus folgt: Ist

$$\mathscr{F}^{+}(S) =: \operatorname*{lim\text{-}ind}_{R \in J(S)} \mathscr{F}(R),$$

so ist $\mathscr{F}^{+}$ eine Prägarbe, $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}^{+} \subseteq \mathscr{F}^{\#}$, also $\mathscr{F}^{\#} = (\mathscr{F}^{+})^{+}$. Da gefilterte Kolimites mit endlichen Limites vertauschbar sind, ist daher der Funktor $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\#}$ mit endlichen Limites vertauschbar.

Man kann nun alle Konstruktionen in der Kategorie der Mengen auf die Kategorie $\mathscr{S}^{\sim}$ übertragen, indem man zunächst die Konstruktion auf $\mathscr{S}^{\wedge}$ überträgt (an jeder Stelle $S \in \operatorname{Ob}(\mathscr{S})$) und anschließend den Funktor $\#$ anwendet. Daher hat $\mathscr{S}^{\sim}$ weitgehend analoge Eigenschaften wie die Kategorie der Mengen (vgl. M. Artin und A. Grothendieck [11]).

Beispiel. Eine Äquivalenzrelation auf einem Objekt U einer Kategorie ist ein Monomorphismus $\varrho : R \to U \times U$, so daß folgendes gilt:

1°. Die Diagonale $U \to U \times U$ faktorisiert über ϱ (Reflexivität).

2°. Ist $\sigma : U \times U \xrightarrow{\sim} U \times U$ die Vertauschung beider Faktoren, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varrho} & U \times U \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma'} \\ R & \xrightarrow{\varrho} & U \times U \end{array}$$

(Symmetrie).

3°. $R \times_U R \xrightarrow{p_1 \times p_2} U \times U$ ($p_i : R \to U$ Projektion auf den i-ten Faktor, $R \times_U R$ bezüglich p_2 und p_1 gebildet) faktorisiert über ϱ (Transitivität).

Gleichbedeutend damit ist, daß für alle Objekte S gilt: $R(S)$ ist eine Äquivalenzrelation auf $U(S)$ ($R(S) = \operatorname{Hom}(S, R)$ usw.). R heißt *effektiv*, wenn ein Differenzkokern V von $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} U$ existiert *und* $R \simeq U \times_V U$ gilt.

Das ist für alle Äquivalenzrelationen in einer Garbenkategorie $\mathscr{S}^{\sim}$ ($\mathscr{S}$ ein Situs) der Fall: $R \in \operatorname{Ob}(\mathscr{S}^{\sim})$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{F} \in \operatorname{Ob}(\mathscr{S}^{\sim})$, wenn $R(S)$ für alle $S \in \operatorname{Ob}(\mathscr{S})$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{F}(S)$ ist. Es sei $\mathscr{G}(S) = \mathscr{F}(S)/R(S)$. Dann ist $S \mapsto \mathscr{G}(S)$ eine Prägarbe und $\mathscr{G}^{\#}$ der Quotient von $\mathscr{F}$ bezüglich R, bezeichnet mit $\mathscr{F}/R$.

Die Effektivität von R ergibt sich daraus, daß $\mathscr{G} = \mathscr{G}_0$ und $\mathscr{F} \times_{\mathscr{G}^{\#}} \mathscr{F} = \mathscr{F} \times_{\mathscr{G}_0} \mathscr{F}$ ist (wegen $\mathscr{G}_0 \subseteq \mathscr{G}^{\#}$).

1.6. Theorie des Abstiegs

Wir betrachten einen Funktor $F: \mathscr{E} \to \mathscr{S}$ von Kategorien $\mathscr{E}, \mathscr{S}$. Die Objekte E aus $\mathscr{E}$ mit $F(E) = S$ nennen wir *Objekte über* S, Morphismen h in $\mathscr{E}$ mit $F(h) = f$ nennen wir *f-Morphismen* (bzw. S-Morphismen, falls $f = \mathrm{id}_S$ ist). $\mathrm{Hom}_f(E', E)$ (bzw. $\mathrm{Hom}_S(E', E)$) sei die Menge aller f-Morphismen (bzw. S-Morphismen) $E' \to E$, $\mathscr{E}_S$ die Kategorie aller Objekte über S und S-Morphismen. Man nennt $\mathscr{E}$ eine *gefaserte Kategorie* über $\mathscr{S}$, wenn zu jedem Morphismus $f: S' \to S$ in $\mathscr{S}$ und zu jedem Objekt E von $\mathscr{E}$ über S ein Objekt $E' =: f^*E$ über S' und ein f-Morphismus $E' \to E$ existiert, so daß die induzierte natürliche Transformation $\mathrm{Hom}_g(-, E') \to \mathrm{Hom}_{f\circ g}(-, E)$ (der Funktoren $\mathscr{E}_S \to (\mathrm{Ens})$) ein Isomorphismus ist für alle Morphismen g über S in $\mathscr{S}$. $E' \to E$ ist dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Einen solchen Morphismus nennt man *kartesischen Morphismus*, für die natürliche Transformation der Morphismen schreiben wir $u \mapsto f^*(u)$.

Beispiel. Es sei $\mathscr{S}$ die Kategorie der Schemata, $\mathscr{E}$ die Kategorie der Etalüberlagerungen (als volle Unterkategorie von $Fl(\mathscr{S})$), F der Funktor, der jeder Etalüberlagerung das Basisschema zuordnet, $f^*(E) =: E \times_S S'$ (vgl. Kap. 4).

Es sei $f: U \to S$ ein Morphismus in $\mathscr{S}$, E_U ein Objekt über U. Das Problem des Abstiegs ist die Frage nach der Existenz eines Objektes E über S, so daß $E_U \simeq f^*E$ (in $\mathscr{E}_U$!) ist.

Bezeichnen wir mit $U^{(n)}$ das n-fache Faserprodukt von U über S, $n = 2, 3$, dessen Existenz wir im folgenden voraussetzen, mit p_1, p_2 bzw. mit p_{31}, p_{32}, p_{21} die Projektionen $U^{(2)} \to U$ bzw. $U^{(3)} \to U^{(2)}$ (auf dem (i, j)-ten Faktor), mit $d: U \to U^{(2)}$ die Diagonale, dann lautet eine notwendige Bedingung wie folgt:

Es gibt einen $U^{(2)}$-Isomorphismus $u: p_1^*E_U \xrightarrow{\sim} p_2^*E_U$, so daß

(i) $\quad d^*(u) = \mathrm{id}_{E_U}$,

(ii) $\quad p_{31}^*(u) = p_{32}^*(u) \circ p_{21}^*(u)$.

Man nennt einen solchen Isomorphismus eine *Abstiegsvorschrift* auf E_U bezüglich f.

Der Morphismus f heißt *Abstiegsmorphismus* (bzw. *strenger Abstiegsmorphismus*) (bezüglich $\mathscr{E}$), wenn für alle Objekte E_1, E_2 über S das Diagramm

$$\mathrm{Hom}_S(E_1, E_2) \to \mathrm{Hom}_U(f^*E_1, f^*E_2) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{U^{(2)}}(g^*E_1, g^*E_2)$$

exakt ist, wobei $g =: f \circ p_1 = f \circ p_2 : U^{(2)} \to S$ (bzw. weiterhin zu jeder Abstiegsvorschrift auf einem Objekt E_U über U bezüglich f ein Isomorphismus $E_U \simeq f^*E$ existiert, der die Abstiegsvorschrift induziert). (Die Exaktheit des Diagramms gewährleistet die Eindeutigkeit eines durch einen Abstieg bestimmten Objektes über S!)

Ein Morphismus $\psi: U \to S$ von Schemata heißt *quasikompakt*, wenn das Urbild jeder affinen offenen Teilmenge von S durch endlich viele affine offene Teilmengen von U überdeckt werden kann.

Der Morphismus heißt *flach*, wenn für alle $x \in U$ der Ring $\mathscr{O}_{U,x}$ flach über $\mathscr{O}_{S,\psi(x)}$ ist; ψ heißt *treuflach*, wenn ψ flach und surjektiv ist.

Wir betrachten den Funktor $Fl(\mathrm{Sch}) \to (\mathrm{Sch})$, der jedem Morphismus $X \to Y$ das Ziel Y zuordnet. Nach Grothendieck [19, Exp. 190] gelten folgende fundamentale Sätze:

1.6.1. Satz. *Die treuflachen, quasikompakten Morphismen in* (Sch) *sind Abstiegsmorphismen bezüglich* $Fl(\mathrm{Sch}) \to (\mathrm{Sch})$.

1.6.2. Satz. *Es sei* $\mathscr{E} \to (\mathrm{Sch})$ *die gefaserte Kategorie der quasikohärenten Garben über der Kategorie der Schemata. Die treuflachen, quasikompakten Morphismen in* (Sch) *sind strenge Abstiegsmorphismen bezüglich* $\mathscr{E} \to (\mathrm{Sch})$.

Im folgenden sei $\varphi: U \to S$ ein treuflacher und quasikompakter Morphismus von Schemata, $U^{(2)} = U \times_S U$ und $\varrho: U^{(2)} \to S$ der kanonische Morphismus.

Zum Beweis von 1.6.1. ist zu zeigen: Für S-Schemata X, Y gilt:

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hom}_U(X_U, Y_U) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{U^{(2)}}(X_{U^{(2)}}, Y_{U^{(2)}})$$

ist exakt ($X_U =: X \times_S U$, $X_{U^{(2)}} =: X \times_Y U^{(2)}$).

Es ist $\mathrm{Hom}_U(X_U, Y_U) \simeq \mathrm{Hom}_S(X_U, Y)$ (durch $f \mapsto p \circ f$, $p: Y_U \to Y$ Projektion), analog für $U^{(2)}$. Also genügt es zu zeigen, daß

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hom}_S(X_U, Y) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_S(X_{U^{(2)}}, Y)$$

exakt ist. Da $X_U \to X$ treuflach und quasikompakt ist und

$$X_U \times_X X_U = (X \times_S U) \times_X (X \times_S U) \simeq X \times_S U \times_S U = X_{U^{(2)}},$$

folgt die Behauptung aus:

1.6.1'. Satz. *Ist* $\varphi: U \to S$ *ein treuflacher und quasikompakter Morphismus von Schemata, so ist für jeden geometrischen Raum* Z

$$Z(S) = \mathrm{Kern}\,\big(Z(U) \rightrightarrows Z(U^{(2)})\big)$$

(wir schreiben $Z(S)$ an Stelle von $\mathrm{Hom}(S, Z)$ usw.).

Es genügt dazu folgendes zu zeigen:

(1) $\quad S$ besitzt die durch φ induzierte Quotiententopologie.

(2) $\quad 0 \to \mathscr{O}_S \to \varphi_*\mathscr{O}_U \rightrightarrows \varrho_*\mathscr{O}_{U^{(2)}}$ ist exakt.

Denn ist $(\psi: U \to Z) \in \mathrm{Kern}\,\big(Z(U) \rightrightarrows Z(U^{(2)})\big)$, so ist $\underline{\psi}: \underline{U} \to \underline{Z}$ auf den Fasern von $\varphi: U \to S$ konstant und induziert somit eine stetige Abbildung $\underline{\psi}_0: \underline{S} \to \underline{Z}$ (nach (1)), so daß $\underline{\psi} = \underline{\psi}_0 \circ \underline{\varphi}$ ist.

Zu $\psi^*: \mathscr{O}_Z \to \psi_*\mathscr{O}_U$ korrespondiert ein Morphismus (durch Adjunktion)

$$\psi^{-1}(\mathscr{O}_Z) = \varphi^{-1}\psi_0^{-1}(\mathscr{O}_Z) \to \mathscr{O}_U$$

bzw.

$$\psi_0^{-1}\mathscr{O}_Z \to \varphi_*\mathscr{O}_U,$$

der mit beiden Abbildungen $\varphi^*\mathscr{O}_U \rightrightarrows \varrho^*\mathscr{O}_{U^{(2)}}$ komponiert dieselbe Abbildung ergibt, also über $\mathscr{O}_S$ faktorisiert werden kann. Also läßt sich $\underline{\psi}_0$ zu einem Morphismus $\psi_0: S \to Z$ fortsetzen, so daß $\psi = \psi_0 \circ \varphi$ ist.

Es bleibt also (1) und (2) zu zeigen. Dazu kann man sich auf den Fall, daß S affin ist, beschränken.
Ist $U = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, U_i affin, so gibt es kanonische Morphismen

$$\coprod U_i \xrightarrow{\varphi'} U \xrightarrow{\varphi} S,$$

so daß φ' und $\varphi \circ \varphi'$ treuflach und außerdem affin sind (d. h., das Urbild affiner Mengen ist wieder affin).
Es ist unmittelbar klar, daß es genügt, (1) und (2) für φ' und $\varphi \circ \varphi'$, d. h. für affine Morphismen zu zeigen, d. h.:

(1') Ist B eine treuflache A-Algebra, so besitzt $\operatorname{Spec}(A)$ die durch $\varphi : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ induzierte Quotiententopologie.

(2') Ist B treuflache A-Algebra, so ist
$0 \to A \to B \rightrightarrows B \otimes_A B$
exakt.

Beweis von (1'). Es sei $V \subseteq \operatorname{Spec}(A)$, so daß $W =: \varphi^{-1}V$ abgeschlossen ist, $W = V(I)$, $I \subseteq B$. Dann ist zu zeigen, daß V abgeschlossen ist. Wir betrachten die folgenden Morphismen

$$\begin{array}{ccc} W' =: \operatorname{Spec}(B) \times_{\operatorname{Spec}(A)} W & \to & W \\ \downarrow \pi & & \downarrow \psi \\ \operatorname{Spec}(B) & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Spec}(A) \end{array}$$

Dann ist $W = \varphi^{-1}\psi(W) = \pi(W') = \overline{\pi(W')}$. Ist $J = I \cap A$, so ist

$$0 \to J \to A \to B/I$$

exakt, also auch

$$0 \to JB \to B \to (B/I) \otimes_A B,$$

und wegen $W' = \operatorname{Spec}\big((B/I) \otimes_A B\big)$ ist daher $W = V(JB)$ und wegen der Treuflachheit $V = \psi(W) = V(J)$, q.e.d.

Die Eigenschaft (2') ergibt sich aus dem Beweis von 1.6.2. Zum Beweis von 1.6.2. ist zu zeigen:

(i) Für quasikohärente Garben $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ auf S ist
$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\varphi^*\mathscr{F}, \varphi^*\mathscr{G}) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{U^{(2)}}}(\varrho^*\mathscr{F}, \varrho^*\mathscr{G})$
exakt.

(ii) Ist $\mathscr{F}'$ eine quasikohärente Garbe auf U, u eine Abstiegsvorschrift auf $\mathscr{F}'$, so gibt es eine quasikohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf S, so daß $\mathscr{F}' \simeq \varphi^*\mathscr{F}$ ist.

Der Beweis wird wieder auf den affinen Fall reduziert: Man kann S als affin voraussetzen. Ist $U = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, U_i affin, so kann man U durch $\coprod U_i$ ersetzen. Dann sind $\coprod U_i \to U$ und $\coprod U_i \to S$ affin, und es genügt, (i) und (ii) für den affinen Fall zu beweisen.

Es sei also $S = \operatorname{Spec}(A)$, $U = \operatorname{Spec}(B)$, $B^{(2)} =: B \otimes_A B$; für A-Moduln M sei $M_B = B \otimes_A M$ und $M_{B^{(2)}} = B^{(2)} \otimes_A M$. Es gibt zwei Homomorphismen $M_B \rightrightarrows M_{B^{(2)}}$, induziert durch $b \otimes x \mapsto b \otimes 1 \otimes x$ bzw. $1 \otimes b \otimes x$, und für (i) ist zu zeigen, daß

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_B(M_B, N_B) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_{B^{(2)}}(M_{B^{(2)}}, N_{B^{(2)}})$$

exakt ist.
Wegen $\operatorname{Hom}_B(M_B, N_B) = \operatorname{Hom}_A(M, N_B)$, analog für $B^{(2)}$, genügt es zu zeigen, daß

$$0 \to N \xrightarrow{d} N_B \underset{d_2}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} N_{B^{(2)}}$$

exakt ist $(d_1(b \otimes x) = (b \otimes 1) \otimes x,\ d_2(b \otimes x) = (1 \otimes b) \otimes x)$.
Wenn $U \to S$ einen Schnitt besitzt, d. h., wenn $A \to B$ einen linksinversen Homomorphismus ε_0 besitzt, so gibt es ein $\varepsilon : N_B \to N$, $\varepsilon(b \otimes x) = \varepsilon_0(b)\, x$. Es sei $\varepsilon_1 : N_{B^{(2)}} \to N_B$ definiert durch

$$\varepsilon_1(b_1 \otimes b_2 \otimes x) = b_1 \otimes \varepsilon(b_2 \otimes x).$$

Dann gilt

(1) $\varepsilon \circ d = \mathrm{id}_N$,

(2) $\varepsilon_1 \circ d_1 = \mathrm{id}_{N_B}$, $\varepsilon_1 \circ d_2 = d \circ \varepsilon$.

Aus (1) folgt, daß ε injektiv ist. Aus (2) folgt: Ist $s \in N_B$ und $d_1(s) = d_2(s)$, so ist $s = \varepsilon_1 \circ d_1(s) = \varepsilon_1 \circ d_2(s) = d \circ \varepsilon(s)$, also $s \in \operatorname{Im}(d)$, und somit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen.

Im allgemeinen Fall kann man stets eine treuflache A-Algebra A' finden, so daß $A' \to B' = A' \otimes_A B$ einen Schnitt besitzt (z. B. $A' = B$). Wegen $A' \otimes_A N_B \simeq N'_{B'}$ $(N' =: A' \otimes_A N)$ und $A' \otimes_A N_{B^{(2)}} \simeq N'_{B'^{(2)}}$ ist

$$0 \to A' \otimes_A N \to A' \otimes_A N_B \rightrightarrows A' \otimes_A N_{B^{(2)}}$$

exakt und somit auch die Ausgangsfolge. Damit ist (i) bewiesen. Nach derselben Methode wird (ii) bewiesen:
Es sei eine quasikohärente Garbe $\mathscr{F}'$ auf U gegeben mit einer Abstiegsvorschrift $\theta : p_1{}^*F' \xrightarrow{\sim} p_2{}^*F'$. Wenn φ einen Schnitt $j : S \to U$ besitzt, definieren wir $\mathscr{F} = j^*\mathscr{F}'$ und zeigen, daß $\varphi^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}'$ verträglich mit der Abstiegsvorschrift ist.
Es sei $j_1 = (\mathrm{id}_U \times j \circ \varphi) : U \to U^{(2)}$. Dann ist $p_1 \circ j_1 = \mathrm{id}_U$, $p_2 \circ j_1 = j \circ \varphi$, und hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathscr{F}' &= (p_1 \circ j_1)^*\, F' \simeq j_1{}^*p_1{}^*\mathscr{F}' \underset{j_1{}^*(\theta)}{\xrightarrow{\sim}} j_1{}^*p_2{}^*\mathscr{F}' \\ &\simeq (p_2 \circ j_1)^*\, \mathscr{F}' = (j \circ \varphi)^*\, \mathscr{F}' \simeq \varphi^*j^*\mathscr{F}' = \varphi^*\mathscr{F}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall kann man sich wieder auf affine Schemata beschränken. Gegeben seien ein B-Modul N' und eine Abstiegsvorschrift $\theta : B \otimes_A N' \xrightarrow{\sim} N' \otimes_A B$. Falls ein Abstieg N existiert, ist notwendig

$$N = \{x \in N';\ \theta(1 \otimes x) = x \otimes 1\},$$

d. h. $N = \operatorname{Kern}(N' \rightrightarrows N' \otimes_A B)$, und durch treuflache Basiserweiterung $A \to A'$, so daß $A' \to B' = A' \otimes_A B$ einen Schnitt besitzt, folgt, daß der so definierte A-Modul N ein Abstieg ist, q.e.d.

1.6.3. Korollar. *Die treuflachen, quasikompakten Morphismen in der Kategorie der Schemata sind strenge Abstiegsmorphismen bezüglich der vollen Unterkategorie von Fl(Sch) der affinen Morphismen (und insbesondere auch bezüglich der Kategorie der Etalüberlagerungen).*

Das folgt daraus, daß affine Morphismen $p: X \to U$ durch die quasikohärente Garbe von $\mathcal{O}_U$-Algebren $p_* \mathcal{O}_X$ umkehrbar eindeutig bestimmt sind und daß der Abstieg einer Garbe von Algebren eine Garbe von Algebren ist.

Die Eigenschaft, Abstiegsmorphismus zu sein, läßt sich im Sinne von Grothendieck-Topologien wie folgt interpretieren: Es sei $\mathcal{S}$ eine Kategorie von X-Schemata mit einer Prätopologie mit folgender Eigenschaft:

Für jede überdeckende Familie $(U_\alpha \to U)$ gibt es eine Verfeinerung $(U_\beta' \to U)$ $\left(\text{d. h. } R_{(U_\beta')} \subseteq R_{(U_\alpha)}\right)$, so daß $\coprod_\beta U_\beta' \to U$ treuflach und quasikompakt ist.

Dann definiert jede quasikohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X eine Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}$ wie folgt: Für $(U \xrightarrow{\varphi} X) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{S})$ ist $\mathcal{F}(U) =: \Gamma(U, \varphi^* \mathcal{F})$. Ebenso definiert jedes X-Schema A eine Garbe A auf $\mathcal{S}$ durch

$$A(U) =: \operatorname{Hom}_X(U, A).$$

Beispiele. 1. Etaltopologie X_{et} (vgl. Kap. 3).

2. Treuflache und quasikompakte Topologie X_{fpqc}: Gröbste Topologie auf der Kategorie der J-Schemata, bei der alle treuflachen quasikompakten Morphismen und alle Zariski-offenen Überdeckungen überdeckend sind.

2. Begriff des Henselschen Ringes

2.1. Der Satz über implizite Funktionen

Als Satz über implizite Funktionen (im analytischen Fall) bezeichnet man den folgenden Satz:

Sind $f_1(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m), \ldots, f_m(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m)$ analytische Funktionen in einer Umgebung Δ eines Punktes

$$(a, b) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbf{C}^{n+m},$$

so daß

$$f_1(a, b) = \cdots = f_m(a, b) = 0$$

und

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(a, b)\right) \neq 0$$

ist, so gibt es analytische Funktionen $g_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, g_m(z_1, \ldots, z_n)$ in einer Umgebung von $a \in \mathbf{C}^n$, die eindeutig durch $g_i(a) = b_i$ und

$$f_i(z_1, \ldots, z_n, g_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, g_m(z_1, \ldots, z_n)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

in einer Umgebung von a bestimmt sind.

Bezeichnen wir mit $X \subseteq \Delta$ den durch

$$f_1(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m) = \cdots = f_m(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m) = 0$$

definierten analytischen Raum und mit $p: X \to \mathbf{C}^n$ die Projektion

$$p(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m) = (z_1, \ldots, z_n),$$

so besagt die Voraussetzung, daß

$$x = (a, b) \in X \quad \text{und} \quad p^* \Omega^1_{\mathbf{C}^n, a} \simeq \Omega^1_{X, x}$$

ist. Dabei ist $\Omega^1_{X,x}$ der Modul der in x holomorphen Differentialformen auf X, d. h. der durch die Differentiale $dz_1, \ldots, dz_n, dw_1, \ldots, dw_m$ über $\mathcal{O}_{X,x}$ erzeugte Modul mit den Relationen

$$df_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} dz_k + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial w_j} dw_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

und $p^* \Omega^1_{\mathbf{C}^n, a}$ der von $dz_1, \ldots, dz_n$ erzeugte freie Modul über $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Behauptung des Satzes besagt, daß $p: X \to \mathbf{C}^n$ *in einer Umgebung U von a einen eindeutig bestimmten Schnitt $s: U \to X$ mit $s(a) = x$ besitzt.*

In der Übersetzung in die kommutative Algebra besagt der Satz über implizite Funktionen folgendes: Wir können $(a, b) = 0 \in \mathbb{C}^{n+m}$ voraussetzen. Wir bezeichnen mit A den Ring $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ der konvergenten Potenzreihen im Nullpunkt und stellen die Funktionen $f_i(z, w)$ als konvergente Potenzreihen mit Koeffizienten aus A dar:

$$f_i(z, w) = F_i(w_1, \ldots, w_n) \in A\{w_1, \ldots, w_n\}.$$

Die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen ist dann äquivalent zu:

$$F_i(0, \ldots, 0) \in \mathfrak{m} = \text{Maximalideal von } A, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

und

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial w_j}(0, \ldots, 0)\right) \text{ ist umkehrbar in } A.$$

Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage: Es gibt Elemente $g_1, \ldots, g_m \in \mathfrak{m}$, so daß $F_i(g_1, \ldots, g_m) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, ist. Die g_i sind dadurch eindeutig bestimmt.

Zum Beweis des Satzes über implizite Funktionen gibt es verschiedene Methoden. Wir wollen hier einen Beweis bringen, der außer einigen elementaren Ergebnissen der lokalen Algebra folgenden Satz über analytische Algebren benutzt.

2.1.1. Satz. *Sind A, B analytische Algebren über einem bezüglich einer reellen Bewertung kompletten Körper k und ist $A \to B$ ein Morphismus analytischer Algebren, so gilt:*

$$B \text{ endlich über } A \Leftrightarrow [B/\mathfrak{m}_A B : k] < \infty \qquad (\mathfrak{m}_A \text{ Maximalideal von } A).$$

Dabei verstehen wir unter einer reellen Bewertung von k eine solche Abbildung $a \mapsto |a|$ von k in $\mathbb{R}$, daß

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a + b| \leq \max(|a|, |b|),$$

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \text{ und es existiert ein } a \in k \text{ mit } |a| \neq 1,$$

d. h. also eine archimedische Bewertung oder eine nichtarchimedische Bewertung vom Rang 1.

Eine analytische Algebra über k ist per definitionem ein homomorphes Bild eines bezüglich der Bewertung konvergenten Potenzreihenringes $k\{z_1, \ldots, z_n\}$, und ein Morphismus analytischer Algebren ist ein solcher Ringhomomorphismus, der den Grundkörper invariant läßt (und daher das Maximalideal von A in das von B überführt).

Wir beweisen Satz 2.1.1. nach einer Methode, die auf Serre zurückgeht (vgl. Séminaire Cartan 1960/61).

Beweis für den Fall $A = k\{z_1, \ldots, z_n\}$, $B = k\{u_1, \ldots, u_m\}$, $A \to B$ gegeben durch $z_i \mapsto v_i(u_1, \ldots, u_m) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\mathfrak{m}_A B = v_1 B + \cdots + v_n B$, und ist $[B/\mathfrak{m}_A B : k] < \infty$, so gilt

$$u_i^r \in \mathfrak{m}_A B \quad \text{für} \quad r \gg 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

also

$$u_i^r = \sum_{j=1}^{n} z_i \cdot p_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad \text{mit} \quad p_{ji} \in B.$$

Wir zeigen: Die Monome $u_1^{e_1} \cdots u_m^{e_m}$ mit $e_i < r$ erzeugen B als A-Modul. Für jede Potenzreihe $f \in B$ sind folgende Potenzreihen eindeutig bestimmt:

$a(f)$ = Summe aller Terme vom Grade $< r$ in jedem u_i,

$u_1^r q_1(f)$ = Summe aller Terme von $f - a(f)$, die durch u_1^r teilbar sind, ...,

$u_i^r q_i(f)$ = Summe aller Terme von

$$f - a(f) - u_1^r q_1(f) - \cdots - u_{i-1}^r q_{i-1}(f),$$

die durch u_i^r teilbar sind, und es gilt

$$f = a(f) + u_1^r q_1(f) + u_2^r q_2(f) + \cdots + u_m^r q_m(f).$$

Setzt man $\sum_{j=1}^{m} p_{ji} q_i(f) = b_j(f) \in B$, so gilt

$$f = a(f) + \sum_{j=1}^{n} z_j b_j(f).$$

$f \mapsto a(f)$ und $f \mapsto b_j(f)$ sind (bei Fixierung der p_{ji}) eindeutig bestimmte k-lineare Abbildungen. Durch Iteration erhält man dann

$$f = a(f) + \sum_{j=1}^{n} z_j a \circ b_j(f) + \cdots + \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} z_{j_1} \cdots z_{j_p} \cdot a \circ b_{j_1} \circ \cdots \circ b_{j_p}(f) + r_p$$

mit $r_p \in \mathfrak{m}_A^{p+1} B$. Indem man alle zu $u_1^{e_1} \cdots u_m^{e_m}$, $e_i < r$, gehörigen Koeffizienten zusammenfaßt, erhält man

$$f = \sum_{0 \leq e_i < r} a_{e_1 \ldots e_n}^{(p)}(f)\, u_1^{e_1} \cdots u_m^{e_m} + r_p,$$

so daß die $a_{e_1 \ldots e_n}^{(p)}(f)$ eindeutig bestimmte Polynome in $z_1, \ldots, z_n$ vom Grade $\leq p$ sind und sich von $a_{e_1 \ldots e_n}^{(p+1)}(f)$ nur in Termen vom Grade $p + 1$ unterscheiden. Also gibt es eindeutig bestimmte formale Potenzreihen $a_{e_1 \ldots e_n}(f) \in \hat{A}$ $(0 \leq e_i < r)$, die bis zur Ordnung p mit $a_{e_1 \ldots e_n}^{(p)}(f)$ übereinstimmen.

Es genügt zu zeigen, daß die $a_{e_1 \ldots e_n}(f)$ konvergent sind, denn dann stimmen f und $\sum_{0 \leq e_i < r} a_{e_1 \ldots e_n}(f)\, u_1^{e_1} \cdots u_m^{e_m}$ von jeder Ordnung überein, sind also gleich.

Konvergenz der $a_{e_1 \ldots e_n}(f)$: Eine Potenzreihe

$$p = \sum_{\alpha} c_\alpha u^\alpha \qquad (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)), \quad u^\alpha = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_m^{\alpha_m})$$

ist per definitionem konvergent, wenn es eine positive reelle Zahl ε gibt, für die $\sum_\alpha |c_\alpha| \varepsilon^{|\alpha|}$ konvergiert. Bezeichnen wir mit B_ε die Menge aller dieser Potenzreihen, für die obige Summe eine wohldefinierte reelle Zahl ist, so ist offenbar B_ε ein linearer Raum und $p \mapsto |p|_\varepsilon = \sum_\alpha |c_\alpha| \varepsilon^{|\alpha|}$ eine Norm auf B_ε. Für $\varepsilon' \leq \varepsilon$ ist $B_{\varepsilon'} \supseteq B_\varepsilon$. Es sei ε so klein gewählt, daß $f, p_{ij} \in B_\varepsilon$ und $|p_{ij}|_\varepsilon \leq \frac{1}{n}$ gilt (da o.B.d.A. $p_{ij} \in \mathfrak{m}_B$ ist). Dann sind $a(f), q_i(f) \in B_\varepsilon$ und

$$|a(f)|_\varepsilon \leq |f|_\varepsilon, \qquad |q_i(f)|_\varepsilon \leq \varepsilon^{-r} |f|_\varepsilon,$$

also

$$|b_j(f)|_\varepsilon \leqq \sum_i |p_{ij}|_\varepsilon\, |q_i(f)|_\varepsilon \leqq \varepsilon^{-r}|f|_\varepsilon$$

also

$$|a \circ b_{j1} \circ \cdots \circ b_{jp}(f)|_\varepsilon \leqq \varepsilon^{-rp}|f|_\varepsilon .$$

Ist

$$a \circ b_{j1} \circ \cdots \circ b_{jp}(f) = \sum_e c_{j,e}^{(p)} u^e$$

mit $j = (j_1, \ldots, j_p)$, $e = (e_1, \ldots, e_m)$, $e_i < r$, $u^e = u_1^{e_1} \cdots u_m^{e_m}$, so folgt daraus

$$\max (|c_{j,e}^{(p)}|)\, \varepsilon^{(r-1)m} \leqq |a \circ b_{j1} \circ \cdots \circ b_{jp}(f)| \leqq \varepsilon^{-rp}|f|_\varepsilon ,$$

also

$$|c_{j,e}^{(p)}| \leqq \varepsilon^{-rp} \cdot c \quad \text{mit} \quad c = |f|_\varepsilon\, \varepsilon^{-(r-1)m} .$$

Wegen

$$a_{e_1 \ldots e_m}^{(p)}(f) = \sum_{q=0}^{p} \sum_{j=(j_1,\ldots,j_q)} c_{j,e}^{(p)} z_{j1} \cdots z_{jq} \in k[z_1, \ldots, z_n]$$

(da $k[z_1, \ldots, z_n] \subseteq B_{\varepsilon'}$ ist für alle ε') erhält man

$$|a_{e_1 \ldots e_m}^{(p)}(f)|_{\varepsilon'} \leqq C \sum_{q=0}^{p} \varepsilon^{-rq} \varepsilon'^q n^q .$$

Setzt man $\varepsilon' = \dfrac{1}{2n}\varepsilon^r$, so erhält man

$$|a_{e_1 \ldots e_m}^{(p)}(f)|_{\varepsilon'} \leqq C \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{2} q < 2C ,$$

und hieraus folgt $a_{e_1 \ldots e_m}(f) \in B_{\varepsilon'}$ und $|a_{e_1 \ldots e_m}(f)|_{\varepsilon'} \leqq 2C$, q.e.d.

Bevor wir den allgemeinen Fall beweisen, werden noch einige Folgerungen aus dem soeben Bewiesenen gezogen.

2.1.2. Korollar (Weierstraßscher Vorbereitungssatz). *Ist $g \in k\{u_1, \ldots, u_m\} = B$ derart, daß $g(0, \ldots, 0, u_m) \neq 0$ ist und den Anfangsgrad $p + 1 > 0$ hat, so ist B/gB ein freier Modul vom Rang $p + 1$ über $B_0 = k\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ mit den Erzeugenden $1, u_m, \ldots, u_m{}^p \bmod (g)$, d. h., jede Potenzreihe $f \in B$ läßt sich eindeutig in der Form*

$$f = qg + r , \qquad r \in B_0 + B_0 u_m + \cdots + B_0 u_m{}^p , \qquad q \in B ,$$

schreiben.

Beweis. Es sei $A = k\{z_1, \ldots, z_m\}$ und $A \to B$ durch $z_i \mapsto u_i$ für $i < m$, $z_m \mapsto g$ definiert. Dann ist

$$B/\mathfrak{m}_A B = k ,$$
$$k\{u_m\}/(g(0, \ldots, 0, u_m)) = k\{u_m\}/(u_m{}^{p+1}) .$$

Also wird B über A durch $1, u_m, \ldots, u_m{}^p$ erzeugt. Hieraus folgt

$$(*) \qquad B = B_0 + B_0 u_m + \cdots + B_0 u_m{}^p + gB .$$

Da

$$\mathrm{Tor}_1{}^{B_0}(B/gB, B_0/\mathfrak{m}_{B_0}) = \mathrm{Kern}\, (B/\mathfrak{m}_{B_0}B \xrightarrow{g} B/\mathfrak{m}_{B_0}B) = 0$$

ist ($\xrightarrow{g}$ bedeutet Multiplikation mit g), ist B/gB flach, also frei über B_0, vom Rang $p + 1$, da aus (*) durch vollständige Induktion nach m folgt:

2.1.3. Korollar. *$k\{u_1, \ldots, u_m\}$ ist Noethersch.*

Beweis von 2.1.1. allgemeiner Fall: Man kann stets $A = k\{z_1, \ldots, z_n\}$ annehmen. Ist $C = k\{u_1, \ldots, u_m\}$ und $B = C/(f_1 C + \cdots + f_p C)$ (C ist Noethersch, also ist jedes Ideal endlich erzeugt), so wähle man Potenzreihen $v_i \in C$, die die Bilder der z_i in B repräsentieren und wende den bereits bewiesenen Fall auf $k\{z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+p}\} \to C$, $z_i \mapsto v_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $z_{n+i} \mapsto f_i$ für $i = 1, \ldots, p$ an. Es ist

$$C\Big/\sum_{i=1}^{n+p} z_i C = B\Big/\sum_{i=1}^{n} z_i B$$

und

$$C\Big/\sum_{i=n+1}^{n+p} z_i C = B ,$$

also B endlicher A-Modul, falls $[B/\mathfrak{m}_A B : k] < \infty$ ist, q.e.d.

Wir beweisen jetzt den Satz über implizite Funktionen. Den Körper $\mathbf{C}$ kann man durch einen beliebigen, bezüglich einer reellen Bewertung vollständigen Körper ersetzen. Genauer gilt:

2.1.4. Satz. *Ist A eine analytische Algebra über k und sind $F_1, \ldots, F_m \in A\{w_1, \ldots, w_m\}$, so daß $F_i(0) \in \mathfrak{m}_A$ und $\det \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial w_j}(0)\right)$ Einheit in A ist, so ist die kanonische Abbildung*

$$A \to A\{w_1, \ldots, w_m\}/(F_1 A\{w_1, \ldots, w_m\} + \cdots + F_m A\{w_1, \ldots, w_m\})$$

ein Isomorphismus. Also gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$A\{w_1, \ldots, w_m\} \to A , \quad w_i \mapsto a_i$$

mit $F_i(a_1, \ldots, a_m) = 0$.

Beweis. Durch eine umkehrbare lineare Transformation der w_i mit der Matrix $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial w_j}(0)\right)$ kann man erreichen, daß $F_i = a_i + w_i +$ Terme der Ordnung $\geqq 2$ mit $a_i = F_i(0)$ ist. Es genügt dann, der Reihe nach die w_i zu eliminieren, d. h. den Satz für den Fall $m = 1$ zu beweisen.

Wir betrachten also $A, F \in A\{w\}$, so daß $F(0) \in \mathfrak{m}_A$ und $\dfrac{\partial F}{\partial w}(0)$ umkehrbar in A ist. $B = A\{w\}/FA\{w\}$ ist eine analytische Algebra über A und $B/\mathfrak{m}_A B = A/\mathfrak{m}_A = k$ wegen

$$A\{w\}/\mathfrak{m}_A A\{w\} + FA\{w\} \simeq k\{\overline{w}\}/\overline{F}k\{\overline{w}\} \simeq k ,$$

da $\overline{F} = c\overline{w} +$ Terme vom Grade $\geqq 2$, $c \neq 0$, ist. Also ist nach 1.2.1. die Abbildung $A \to B$ surjektiv und wegen $A \cap (FA\{w\}) = 0$ bijektiv.

Ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Lösung erhält man, indem man sukzessive die Lösung bis zur Ordnung n durch Koeffizientenvergleich bestimmt. Da alle abgeleiteten Sätze, die auf 2.1.1. beruhen, auch für formale Potenzreihen gelten (da 2.1.1. für formale Potenzreihen gilt; der Konvergenzbeweis entfällt dann), ist die auf diese Weise ermittelte Potenzreihe eindeutig und daher eine konvergente Lösung. Ebenso liefert die Beweismethode von 2.1.1. ein konstruktives Verfahren, wenn man eine Darstellung

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} z_j p_{ij} \bmod (F_1 A\{w_1, \ldots, w_m\} + \cdots + F_m A\{w_1, \ldots, w_m\})$$

kennt (hier ist $r = 1$).

2.2. Henselsche Ringe

Wir betrachten jetzt algebraische Mannigfaltigkeiten und Schemata.

Die Voraussetzung und die Behauptung des Satzes über implizite Funktionen kann man auch in der Kategorie der Schemata formulieren, jedoch gilt hier der Satz über implizite Funktionen, d. h. die Aussage

„Wenn $p: X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ ist, so daß $p^*\Omega^1_{Y,p(x)} \simeq \Omega_{X,x}$ ist, dann besitzt p in einer Umgebung von $p(x)$ einen Schnitt."

(bezüglich genauer Definitionen vgl. 3.5.) im allgemeinen nicht.

Hierzu sind spezielle Voraussetzungen über Y zu machen, die z. B. im Fall algebraischer Mannigfaltigkeiten nicht gelten, sondern erst nach einer Erweiterung dieses Begriffs. Das legt folgendes Programm nahe:

1. Studium von Morphismen von endlichem Typ bzw. von endlicher Darstellung, so daß $p^*\Omega^1_{Y,p(x)} \simeq \Omega^1_{X,x}$ ist (Etalmorphismen).

2. Untersuchung von Ringen mit der folgenden Eigenschaft (H): In A ist ein Ideal I ausgezeichnet, so daß gilt: Ist $F \in A[T]$ und $F(0) \in I$ und $F'(0)$ Einheit modulo I, so gibt es ein $a \in I$ und $F(a) = 0$.

3. Was gilt anstelle von Satz 2.1.1.?

Problem 1 und 3 werden im nächsten Kapitel behandelt. Problem 3 wird durch ZARISKIS Hauptsatz beantwortet und Problem 1 durch die Untersuchung der Struktur von Etalmorphismen.

Wir wenden uns zunächst dem zweiten Problem zu. Es gilt folgende Bemerkung:

2.2.1 („Infinitesimale Liftung von einfachen Nullstellen"). *Erfüllt A bezüglich I die Eigenschaft* (H), *so auch bezüglich jedes Ideals $J \subseteq \sqrt{I}$. Außerdem ist die Lösung a von $F(T) = 0$ durch die Bedingung $a \in I$ eindeutig bestimmt, und I muß im Jacobson-Radikal von A enthalten sein.*

Beweis. Ist $F'(0)$ Einheit modulo J und $J \subseteq \sqrt{I}$, so ist $F'(0)$ auch Einheit modulo I (da jedes Primideal, das I enthält, auch $\sqrt{I}$ und damit J enthält). Besitzt A die Eigenschaft (H) bezüglich I, so gilt für $a \in I$, $F(T) = (1 + a)(1 + T) - 1$, daß $F(0) = a \in I$ und $F'(0) = 1 + a$ Einheit modulo I ist. Also gibt es ein $b \in I$ und $F(b) = 0$, d. h., $1 + a$ ist Einheit und I daher im Jacobson-Radikal enthalten.

Es sei nun $F(T)$ ein Polynom, so daß $F'(0)$ Einheit modulo I ist. Dann ist $F'(0)$ Einheit in A und $F(T) = F(0) + F'(0)\,T + G(T)\,T^2$. Aus $a, b \in I$, $F(a) = F(b)$ folgt

$$0 = F(a) - F(b) = (a - b)\,(F'(0) + H(a, b)),$$

und

$$H(X, Y) = \frac{G(X)\,X^2 - G(Y)\,Y^2}{X - Y}$$

ist aus $XA[X, Y] + YA[X, Y]$, also $H(a, b) \in I$, $F(0) + H(a, b)$ Einheit in A und somit $a = b$.

Ist ferner $F(a) = 0$, so ist $F(0) = a(F'(a) + aG(a))$ und $F'(a) \equiv F(0) \bmod I$. Also ist $F'(a) + aG(a)$ Einheit und somit $a \in AF(0)$.

Es bleibt also noch zu zeigen: Ist $F(0)$ nilpotent modulo I und $F'(0)$ Einheit, so besitzt F eine Nullstelle aus I.

Dazu genügt zu zeigen: Es gibt ein $b \in I$ und $F(b) \in I$, weil man dann (H) auf $F(b + T)$ anwenden kann.

Wir zeigen das durch vollständige Induktion nach der Zahl n mit $F(0)^n \in I$. Der Fall $n = 1$ ist trivial, im Fall $n > 1$ gilt: Ist

$$F = F(0) + F'(0)\,T + G(T)\,T^2,$$

so gilt mit $b_0 = -F'(0)^{-1}\,F(0)$

$$F(b_0) = G(h_0)\,h_0^2,$$

also $F(b_0)^{n-1} \in I$, $b_0 \in \sqrt{I}$, und man kann die Induktionsvoraussetzung auf $F(b_0 + T)$ anwenden, q. e. d.

Diese Bemerkung zeigt, daß die Eigenschaft (H) nur von der abgeschlossenen Menge $V = V(I)$ von Spec A abhängt. Wir definieren daher:

Definition. Ein Ring A heißt *Henselsch* in einer abgeschlossenen Teilmenge V von Spec A, wenn für jedes Polynom $F(T) \in A[T]$, so daß $F(0) = 0$ auf V und $F'(0)$ Einheit auf V ist, eine Nullstelle a von F existiert, die gleich 0 auf V ist.

Die Ausdrucksweise: „$a \in A$ ist Null (bzw. Einheit) auf V" bedeutet: $a(P) = 0$ (bzw. $a(P) \neq 0$ für alle $P \in V$, wobei $a(P)$ das Bild von a bei der kanonischen Abbildung $A \to A_P/PA_P = k(P)$ bezeichnet.

Beispiele.

1°. Analytische Algebren sind Henselsch in jeder abgeschlossenen Teilmenge ihres Spektrums.

2°. Formale Potenzreihenringe über einem Körper und ihre homomorphen Bilder sind Henselsch in jeder abgeschlossenen Teilmenge ihres Spektrums.

3°. Es sei k ein reell bewerteter kompletter Körper, X ein topologischer Raum und $C_{X,x}$ ein Unterring des lokalen Ringes der in x stetigen Funktionskeime, der für jeden holomorphen Funktionskeim $u(y_1, \ldots, y_n)$ und jedes n-Tupel $(f_1, \ldots, f_n)$ von Funktionskeimen aus $C_{X,x}$ mit $f_i(x) = 0$ auch den Funktionskeim $v = u(f_1, \ldots, f_n)$ enthält. Dann ist $C_{X,x}$ Henselsch in der durch $n_x = \{f \in C_{X,x}, f(x) = 0\}$ definierten abgeschlossenen Teilmenge.

Beweis. Es sei $F(T) = a_1 + T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n$, $a_i \in C_{X,x}$. Es gibt einen analytischen ınktionskeim $u(y_1, \ldots, y_n)$, so daß $y_1u + y_2u^2 + \cdots + y_nu^n \equiv 0$ ist. Setzt man a_i für die y_i ı, so folgt die Existenz einer Nullstelle t von $F(T)$ in $C_{X,x}$ mit $t(x) = 0$, q.e.d.

Beispiel für $C_{X,x}$: Garbe aller stetigen bzw. aller differenzierbaren Funktionskeime der lasse C^r (im Fall $k = \mathsf{R}$).

4⁰. Es sei X ein analytischer Raum, V eine abgeschlossene Teilmenge von X und A_V die ‌gebra aller in einer beliebigen Umgebung von V definierten und dort holomorphen Funktionen ınn ist A_V Henselsch in der durch I_V definierten abgeschlossenen Teilmenge, wobei

$$I_V = \{f \in A_V, f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in V\}$$

t.

5⁰. Die analoge Konstruktion kann man für stetige und differenzierbare Funktionen durch- ıhren.

Beweis. Ist $F \in A_V[T]$, $F(0) \in I_V$, $F'(0)$ Einheit modulo I_V, so ist $F \in \mathcal{O}_{X,x}[T]$, $F(0) \in \mathfrak{m}_x$ laximalideal in x) für alle $x \in V$ und $F'(0)$ Einheit. Also gibt es eine in einer Umgebung von x *ndeutig* bestimmte holomorphe Funktion f mit $F(f) = 0$ und $f(x) = 0$. Die so definierten Funk- onskeime passen also zu einer global auf V definierten holomorphen Funktion zusammen vegen der Eindeutigkeit).

6⁰. Die Ringe $\mathbf{Z}_l$ aller l-adischen Zahlen sind Henselsch (vgl. 2.3.2.). Das war historisch ge- ıhen das erste Beispiel einer systematischen Verwendung Henselscher Ringe zum Studium iophantischer Gleichungen durch K. Hensel), und daher rührt auch der Name „Henselscher ing", der von Nagata eingeführt wurde.

‌.3. Einige elementare Eigenschaften Henselscher Ringe

‌.3.1. *Es sei A ein Ring, V eine abgeschlossene Teilmenge von* Spec (A) *und I ein* *deal in A. Dann gilt:*

1⁰. *Ist A in $V(I)$ Henselsch, $V \subseteq V(I)$ und A/I in V Henselsch, so ist A in V* *Ienselsch.*

2⁰. *Ist A in V Henselsch, so ist A/I in $V \cap V(I)$ Henselsch.*

Beweis. 1⁰. Es sei $F \in A[T]$, $F(0)$ auf V Null und $F'(0)$ auf V Einheit. Dann ;ibt es ein a, das auf V Null ist und so daß $F(a) \in I$ ist.

Da A in $V(I)$ Henselsch ist, folgt die Existenz einer Nullstelle $b \in I$ von $F(a + T) = 0$, und $c = a + b$ ist dann Nullstelle von $F(T)$ und gleich Null auf V.

2⁰. Es sei $\bar{F} \in (A/I)[T]$, F ein Repräsentant von $\bar{F}$ in $A[T]$. Ist $\bar{F}(0)$ Null auf $V \cap V(I)$ und $\bar{F}'(0)$ Einheit auf $V \cap V(I)$, so ist $F(0)$ Null auf $V \cap V(I)$ und $F'(0)$ Einheit auf $V \cap V(I)$, d. h., ist $V = V(J)$, so ist $F(0) = a_0 + b_0$, $a_0 \in \sqrt{I}$, $b_0 \in \sqrt{J}$ und $F'(0) = a_1 + b_1$, $a_1 \in \sqrt{I}$, b_1 Einheit modulo J.

Es genügt zu zeigen, daß $A/\sqrt{I}$ Henselsch in $V \cup V(I)$ ist, also o.B.d.A. $I = \sqrt{I}$ (nach 2.1.1.). Dann ist

$$F = F(0) + F'(0)\, T + G(T)\, T^2 = b_0 + b_1T + G(T)\, T^2 \bmod I,$$

also o.B.d.A. $a_0 = a_1 = 0$. Dann besitzt F aber eine Nullstelle $c \in \sqrt{J}$, da A in $V = V(J)$ Henselsch ist. Die Restklasse $\bar{c}$ in A/I ist Nullstelle von $\bar{F}$, q.e.d.

2.3.2. *Es sei $A =$* lim-proj (A_i), $(A_i)_{i \in I}$ *ein gefiltertes projektives System von Ringen. Ferner sei V eine abgeschlossene Teilmenge von* Spec (A) *und V_i ihr Urbild in* Spec (A) *bezüglich* Spec $(A_i) \to$ Spec (A) *(induziert durch die Projektion $A \to A_i$).*

Ist jedes A_i in V_i Henselsch, so ist A in V Henselsch.

Der Beweis ist (wegen der Eindeutigkeit der Nullstellen) trivial.

2.3.3. Korollar. *Es sei V eine abgeschlossene Teilmenge von* Spec (A) *und* $A^\wedge = \underset{V(I)=V}{\text{lim-proj}}\, (A/I)$. *Dann induziert $A \to A^\wedge$ einen Isomorphismus $V^\wedge \to V$ ($V^\wedge$ Urbild von V in* Spec $(A^\wedge)$*), und $A^\wedge$ ist in V Henselsch.*

2.3.4. Korollar. *Ist A ein bezüglich einer I-adischen Topologie kompletter Ring, so ist A in $V(I)$ Henselsch.*

2.3.5. *Ist $A =$* lim-ind (A_i), $(A_i)_{i \in I}$ *ein gefiltertes induktives System von Ringen, und sind V_i abgeschlossene Teilmengen von A_i, so daß A_i in V_i Henselsch ist, so ist* lim-proj $(V_i) = V$ *abgeschlossene Teilmenge von* Spec (A) *und A in V Henselsch.*

Beweis. Ist $P \in$ Spec (A) und $P \cap A_i = P_i$, so ist $V \simeq \{P, P_i \in V_i\} =$ Durchschnitt der Urbilder der V_i bezüglich Spec $(A) \to$ Spec (A_i).

Ein Polynom $F \in A[T]$ mit $F(0) = 0$ auf V und $F'(0)$ Einheit auf V wird durch ein Polynom aus einem $A_i[T]$ mit gleichen Eigenschaften bezüglich V_i repräsentiert, dieses hat eine Nullstelle in A_i, und das Bild dieser Nullstelle in A ist Nullstelle von F, q.e.d.

2.4. Der Satz von F. K. Schmidt und Anwendungen

Unter gewissen Voraussetzungen kann man zeigen, daß ein Henselscher Integritätsbereich durch seinen Quotientenkörper eindeutig bestimmt ist. Wir nennen einen Integritätsbereich *diskret normal*, wenn er Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen ist. Zum Beispiel ist die ganze Abschließung von Noetherschen Integritätsbereichen diskret normal (vgl. 1.2.). Dann gilt:

2.4.1. Satz. *Es sei A in $V = V(J)$ Henselsch, B ein diskret normaler Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K. Dann läßt sich jeder Morphismus $A \to K$ mit $JK \neq 0$ zu einem eindeutig bestimmten Morphismus $A \to B \subseteq K$ fortsetzen.*

Daraus folgt z. B., wenn A und B diskret normale Henselsche Integritätsbereiche mit gleichen Quotientenkörpern sind, daß $B = A$ ist.

Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von F. K. Schmidt über mehrfach perfekte Körper.

Zum Beweis kann man annehmen, daß $A \subseteq K$ ist. Nach Voraussetzung ist B Durchschnitt diskreter Bewertungsringe, und es genügt daher zu zeigen, daß A in jedem diskreten Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K enthalten ist, denn dann ist $A \subseteq B$.

Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K, w eine zugehörige Bewertung und $x \in J$. Dann betrachten wir die Gleichungen $F_n(T)$

$= T^n + T - x$, $n = 2, 3, \dots$ Dann ist $F_n'(0) = 1$ Einheit in A. Also besitzt F_n eine Nullstelle $y_n \in J$. Ist $w(y_n) \neq 0$, so ist $w(y_n{}^n) = nw(y_n) \neq w(y_n)$, also $w(x) = \min(nw(y_n), w(y_n))$ gleich $w(y_n)$, falls $w(x) \geqq 0$, bzw. gleich $nw(y_n)$, falls $w(x) < 0$ ist. Letzteres ist aber nicht möglich, wenn die Bewertung diskret ist. Im Fall $w(y_n) = 0$ ist $w(x) \geqq 0$.

Somit ist $J \subseteq R$ und nach Voraussetzung $\neq 0$, also $A \subseteq R$, da für alle $a \in A$, $x \neq 0$, $x \in J$

$$w(a^n x) = nw(a) + w(x)$$

gilt, q.e.d.

Anwendung auf komplexe Raumkeime

2.4.2. Korollar. *Sind (X, x), (Y, y) normale analytische Raumkeime und ist $\mathscr{M}_{X,x} \simeq \mathscr{M}_{Y,y}$ ($\mathscr{M}_{X,x}, \mathscr{M}_{Y,y}$ Keime meromorpher Funktionen in x, y), so ist $(X, x) \simeq (Y, y)$.*

Normale Raumkeime (X, x) sind solche Raumkeime, für die $\mathcal{O}_{X,x}$ ein normaler Integritätsbereich ist. Die Behauptung folgt daraus, daß $\mathcal{O}_{X,x}$ Noethersch und Henselsch und $\mathscr{M}_{X,x}$ Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{X,x}$ ist.

2.4.3. Korollar. *Ist Y ein normaler analytischer Raum, X ein analytischer Raum ohne Nullteiler und $p\colon X \to Y$ ein Morphismus, der für alle x Isomorphismen $\mathscr{M}_{Y,p(x)} \simeq \mathscr{M}_{X,x}$ induziert, dann ist p ein lokaler Isomorphismus.*

Anwendungen auf Steinsche Räume

Wir erinnern an die Definition eines Steinschen Raumes:

Ein komplexer Raum X mit der Garbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen heißt Steinsch, wenn folgendes gilt:

1°. X ist holomorph ausbreitbar: Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $X \to \mathbf{C}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ endlich in x_0 ist.

2°. X ist holomorph konvex: Zu jeder unendlichen diskreten Menge $D \subset X$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{O}_X(X)$, so daß $\sup |f(D)| = \infty$ ist.

Bezüglich der Eigenschaften Steinscher Räume kann man sich z. B. bei R. C. Gunning und H. Rossi [23], Kap. VII und VIII, informieren.

Wir wollen folgenden Satz beweisen:

2.4.4. Satz. *Es seien X, X' normale und irreduzible Steinsche Räume, V, V' abgeschlossene analytische Unterräume, und $\mathscr{M}_X(V)$ sei der Körper der in jedem Punkt von V definierten meromorphen Funktionen von X, analog $\mathscr{M}_{X'}(V')$. Dann folgt aus $\mathscr{M}_X(V) \simeq \mathscr{M}_{X'}(V')$, daß die Einbettungen $V \subset X$ und $V' \subset X'$ äquivalent sind (d. h., daß es isomorphe Umgebungen von V in X, V' in X' gibt und dabei V zu V' isomorph ist.*

Analoge Fragestellungen für Einbettungen von algebraischen Mannigfaltigkeiten sind von H. Hironaka [26] und H. Hironaka und H. Matsumura [27] untersucht worden.

Zum Beweis von 2.4.4. benutzen wir folgende Eigenschaften Steinscher Räume:

Theorem A. *Für jede kohärente analytische Garbe $\mathscr{F}$ auf X gilt: $\mathscr{F}_x$ wird als $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul durch die globalen Schnitte von $\mathscr{F}$ erzeugt ($x \in X$).*

Theorem B. *Für jede kohärente analytische Garbe $\mathscr{F}$ auf X gilt*

$$H^q(X, \mathscr{F}) = 0 \quad \textit{für} \quad q > 0.$$

Das sind die beiden wichtigsten Eigenschaften Steinscher Räume, und zusammen mit der Bedingung, daß die Topologie abzählbar ist, werden dadurch die Steinschen Räume unter allen komplexen Räumen charakterisiert.

Insbesondere erhält man daraus folgende Konsequenzen:

1°. Die Punkte von X entsprechen umkehrbar eindeutig den endlich erzeugten Maximalidealen von $A = \mathcal{O}_X(X)$.

2°. Ist x ein Punkt, $\mathfrak{m} \subset A$ das zugehörige Maximalideal, so gilt $\mathfrak{m}^n_{X,x} \cap A = \mathfrak{m}^n$ (wobei $\mathfrak{m}_{X,x} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das Maximalideal in x ist).

Beweis. 1°. Es sei $x \in X$ und $\mathfrak{m} = \{f \in A, f(x) = 0\}$. Dann ist $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal. Es sei $\mathscr{J}$ die zu x gehörige Idealgarbe ($\mathscr{J}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ für $y \neq x$, $\mathscr{J}_y = \mathfrak{m}_{X,x}$ für $y = x$). Dann ist $\mathfrak{m} = \mathscr{J}(X)$, und daher gibt es Funktionen $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}$, so daß $\mathfrak{m}_{X,x}$ durch die Keime von $f_1, \dots, f_r$ erzeugt wird (Theorem A und da $\mathcal{O}_{X,x}$ Noethersch ist). Es sei Z der abgeschlossene Unterraum $f_1 = \dots = f_r = 0$. Dann ist x isolierter Punkt von Z, und daher gibt es eine Funktion $f_0 \in A$, so daß $f_0(x) = 0$ und $f_0 \mid Z - \{x\} = 1$ ist (Theorem B). Dann wird $\mathfrak{m}$ durch $f_0, f_1, \dots, f_r$ erzeugt, da

$$\mathbf{C} = \Gamma\Big(X, \mathcal{O}_X\Big/\sum_{i=0}^{r} f_i \mathcal{O}_X\Big) = A\Big/\sum_{i=0}^{r} f_i A$$

ist. Es sei umgekehrt $\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugtes Maximalideal, und zwar durch Funktionen $f_0, \dots, f_r$, und Z der abgeschlossene Unterraum $f_0 = \dots = f_r = 0$. Da $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X \neq \mathcal{O}_X$ ist, ist $Z \neq \emptyset$, und nach Theorem B ist $\mathcal{O}_z(Z) = A/\mathfrak{m} = \mathbf{C}$, also ist Z ein Punkt.

2°. Es sei $f \in A \cap \mathfrak{m}^n_{X,x}$. Dann bilden wir $\mathscr{J} = \mathfrak{m}^n : f$; das ist eine kohärente Idealgarbe, und es ist $\mathscr{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}$. Nach Theorem A gibt es also eine Funktion $g \in \mathscr{J}(X)$, so daß $gf \in \mathfrak{m}^n$ und der Keim von g in x Einheit ist, also $g \notin \mathfrak{m}$ und somit $f \in \mathfrak{m}^n$, q.e.d.

Die Algebra A ist mit einer kanonischen Topologie versehen (gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen). Dabei ist $f \mapsto f(x)$ ($x \in X$) eine stetige Abbildung, und daher sind die zu Punkten $x \in X$ gehörigen Maximalideale von A abgeschlossen.

Umgekehrt definiert jedes abgeschlossene Maximalideal einen Punkt, so daß

$$x \mapsto \mathfrak{m}(x) = \{f \in A, f(x) = 0\}$$

eine Bijektion zwischen X und der Menge $S(X)$ der abgeschlossenen (= endlich erzeugten) Maximalideale ist. Die Topologie ist ebenfalls bereits durch A bestimmt: X ist mit der feinsten Topologie versehen, so daß alle Abbildungen $f \mapsto f(x) = f \bmod \mathfrak{m}$ stetig sind.

Ist $A^\wedge_x$ die Komplettierung von A bezüglich der $\mathfrak{m}(x)$-adischen Topologie, $A^\wedge_x = \text{lim-proj}\, A/\mathfrak{m}(x)^n$, so ist $A^\wedge_x = \mathcal{O}^\wedge_{X,x}$ nach 2° die Komplettierung des lokalen Ringes in x. Ist $\mathfrak{m}(x)$ durch $u_1, \dots, u_r$ erzeugt, so besteht $A^\wedge_x$ aus allen formalen Potenzreihen in $u_1, \dots, u_r$ über $\mathbf{C}$, und $\mathcal{O}_{X,x}$ ist der Unterring der konvergenten Potenzreihen. Also ist auch $\mathcal{O}_X$ durch A eindeutig bestimmt, und $X \mapsto A = \mathcal{O}_X(X)$ ist eine volle treue Einbettung der Kategorie der Steinschen Räume in die duale Kategorie der topologischen $\mathbf{C}$-Algebren.

Beweis von 2.4.4. A_V und A_V' sind Henselsch (vgl. 2.2.).

a) Da X normal und irreduzibel ist, ist

$$A = \mathcal{O}_X(X) \subseteq A_V = \{f \mid f \text{ in allen Punkten von } V \text{ holomorphe Funktion von } X\} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$$

für $x \in X$, und $A_V \subseteq \mathscr{M}_X(V) \subseteq \mathscr{M}_{X,x}$ für die meromorphen Funktionen. Analoges gilt für X', V', $A' = \mathcal{O}_{X'}(X')$.

Jeder Isomorphismus $\theta\colon \mathscr{M}_X(V) \simeq \mathscr{M}_X(V')$ induziert eine Inklusion $A_V \to \mathscr{M}_{X'}(V') \subseteq \mathscr{M}_{X',x'}$ für $x' \in V'$; da $\mathcal{O}_{X',x'}$ ein normaler Noetherscher Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathscr{M}_{X',x'}$ ist, folgt daraus $\theta(A_V) \subset \mathcal{O}_{X',x'}$. Für $f \in A_V$ ist also

$\theta(f)$ eine in allen $x' \in V'$ holomorphe Funktion, und somit induziert θ einen Isomorphismus $\theta_V: A_V \simeq A_{V'}$.

b) Es sei $N_V = \{f \in A_V, f(x) = 0$ für alle $x \in V\}$, $N_{V'}$ sei analog definiert. Dann folgt leicht, daß N_V das Jacobson-Radikal von A_V ist: Ist $f \in N_V$, so ist $1 + f$ nirgends 0 auf V, also Einheit in A_V; ist umgekehrt $f \in A_V$ und $1 + gf$ für alle $g \in A_V$ umkehrbar, so muß $f(x) = 0$ für alle $x \in V$ sein. Somit ist

$$A_V/N_V = \mathcal{O}_V(V) \simeq A_{V'}/N_{V'} = \mathcal{O}_{V'}(V')$$

(V, V' als abgeschlossene Unterräume mit der reduzierten komplexen Struktur versehen) und daher $V \simeq V'$ (Isomorphismen Steinscher Algebren sind auch stetig!).

c) Es seien x, x' korrespondierende Punkte von V, V'. Die Inklusionen $A \subseteq A_V \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ lassen sich zu Homomorphismen $A_x^\wedge \to A_{V,x}^\wedge \to \mathcal{O}_{X,x}^\wedge$ fortsetzen, deren Komposition der Isomorphismus $A_x^\wedge \simeq \mathcal{O}_{V,x}^\wedge$ ist. Hierbei bezeichnet $A_{V,x}^\wedge$ die $\mathfrak{m}(x)$-adische Komplettierung lim-proj $(A_V/\mathfrak{m}(x)^n A_V)$ von A_V. θ_V induziert einen Isomorphismus $A_{V,x}^\wedge \simeq A_{V',x'}^\wedge$, wobei $A_{V',x'}^\wedge$ die $\mathfrak{m}(x)$-adische Komplettierung von $A_{V'}$ ist. Nach Definition von $x \mapsto x'$ ist $\mathfrak{m}(x) A_{V'} \subseteq A_{V'} \cap \mathfrak{m}_{X',x'}$, und daher gibt es eine kanonische Fortsetzung von $A_{V'} \subset \mathcal{O}_{X',x'}$ zu einem Homomorphismus $A_{V',x}^\wedge \to \mathcal{O}_{X',x'}^\wedge$.

Insgesamt erhält man also durch Komposition dieser Homomorphismen mit der kanonischen Isomorphie $\mathcal{O}_{X,x}^\wedge \simeq A_x^\wedge$ einen Homorphismus $\theta_x^\wedge: \mathcal{O}_{X,x}^\wedge \to \mathcal{O}_{X',x'}^\wedge$, der auf A_V mit θ_V übereinstimmt. Wird $\mathfrak{m}(x)$ durch $z_1, \ldots, z_n$ erzeugt, so besteht $\mathcal{O}_{X,x}^\wedge$ aus den formalen Potenzreihen $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ über $\mathbf{C}$, und ist $w_i = \theta_V(z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, so ist

$$\theta_x^\wedge(f) = f(w_1, \ldots, w_n).$$

Konvergente Potenzreihen werden dabei in konvergente Potenzreihen übergeführt, und die Funktionen $z_i - z_i(x)$ erzeugen die Maximalideale in einer Umgebung von x; θ_V induziert somit einen Morphismus $\tilde{\theta}: \mathcal{O}_X | V \to \mathcal{O}_{X'} | V'$ über der Abbildung $V' \simeq V$, der im komplex-analytischen Sinne eingeschränkt den durch $A_V/N_V \simeq A_{V'}/N_{V'}$ induzierten Isomorphismus $V' \simeq V$ ergibt. Daher ist $\tilde{\theta}$ surjektiv, und dasselbe gilt für $\tilde{\theta}^{-1}$. Dann ist $\tilde{\theta}^{-1} \circ \tilde{\theta}$ eine Surjektion $\mathcal{O}_X | V \to \mathcal{O}_X | V$, und da die Halme Noethersch sind, folgt daraus leicht, daß $\tilde{\theta}^{-1} \circ \tilde{\theta}$ ein Automorphismus und somit $\tilde{\theta}$ ein Isomorphismus ist. Insgesamt induziert θ also einen Isomorphismus der Keime abgeschlossener Unterräume

$$(V', \mathcal{O}_{X'} | V') \simeq (V, \mathcal{O}_X | V),$$

q.e.d.

2.5. Zerlegungstheorie

Henselsche Ringe sind noch durch eine Reihe anderer Eigenschaften charakterisiert; die alle für gewisse Fragestellungen interessant sind. Bevor wir uns dem Studium dieser Eigenschaften zuwenden können, benötigen wir eine Zerlegungstheorie für

abgeschlossene Teilmengen eines Schemas. Sie enthält als Spezialfall die klassische Zerlegungstheorie eines Primideals in einer endlichen Galoiserweiterung.

2.5.1. Hilfssatz. *Es sei X ein topologischer Raum, auf dem eine endliche Gruppe G operiert, $p: X \to Y$ der Quotientenraum bezüglich G, und Y sei zusammenhängend. Dann gilt:*

1⁰. *X besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten, die bezüglich G zueinander konjugiert sind.*

2⁰. *Ist W eine Komponente von X, $Z \subseteq G$ der Stabilisator von W ($Z = \{s \in G; Ws = W\}$) und $X \xrightarrow{p'} Y' \xrightarrow{q} Y$ die Faktorisierung von p über den Quotienten $p': X \to Y'$ von X bezüglich Z, so ist $W' = p'(W)$ eine Zusammenhangskomponente von Y', und q induziert einen Isomorphismus $W' \simeq Y$.*

3⁰. *W ist die einzige Komponente von X, die über W' liegt.*

Beweis. Es sei $W(x)$ die Zusammenhangskomponente eines Punktes x in X. Dann gilt $W(x)s = W(xs)$ für $s \in G$. Ist M eine x enthaltende offene und abgeschlossene Teilmenge von X, so ist die Vereinigung N aller Konjugierten Ms von $M (s \in G)$ ebenfalls offen und abgeschlossen und stabil bezüglich G. Daher ist $p(M) \cap p(X - N) = \emptyset$; da Y zusammenhängend sein sollte, muß also $N = X$ gelten. Da $W(x)$ der Durchschnitt des Systems dieser Mengen M und dieses System nach unten gefiltert ist, folgt daraus

$$X = \bigcup_{s \in G} (\bigcap_M Ms) = \bigcup_{s \in G} W(xs) = \bigcup_{s \in G} W(x)s.$$

Also sind die Zusammenhangskomponenten zueinander konjugiert.

Es seien W, Z, Y', p', q wie oben definiert. Es ist $p'(W) \cap p'(X - W) = \emptyset$, da nach Definition von p' aus $p'(x) \in p'(W) \cap p'(X - W)$ mit $x \in W$ folgen würde, daß $xs \in X - W$ mit einem $s \in Z$ ist. Das widerspricht aber der Definition von Z. Also ist $p'(W) = W'$ eine Zusammenhangskomponente von Y' und W das volle Urbild von W'. Der Quotient von W bezüglich Z ist einerseits W' und andererseits Y, also ist $W' \simeq Y$, q.e.d.

Wir nennen Z die *Zerlegungsgruppe* von W. Allgemein definieren wir, wenn X in endlich viele disjunkte offene Unterräume W_i zerlegt ist, die bezüglich G zueinander konjugiert sind, als Zerlegungsgruppe Z von W_i den Stabilisator von W_i, $Z = \{s \in Z, W_i s = W_i\}$.

Der folgende Satz ist das im nächsten Abschnitt benötigte Resultat (bis auf die Aussage 4⁰, die später nicht benötigt wird und nur der Vollständigkeit halber und um den Anschluß an die klassische Zerlegungstheorie eines Primideals herzustellen, bewiesen wird).

2.5.2. Satz. *Es sei B ein Ring, auf dem eine endliche Gruppe G operiert, $A = B^G$, I ist ein Ideal in A mit $IB \cap A = I$ (z. B., wenn $I = \sqrt{I}$ ist). Es sei $I = I_1 \cdots I_n$ eine Zerlegung von I in komaximale Ideale I_r, die bezüglich G zueinander konjugiert sind. Z sei die Zerlegungsgruppe von I_1 (der Stabilisator von I_1) und $A' = B^Z$. Dann gilt:*

1⁰. *Ist $I_1' = I_1 \cap A'$, $I_1'' = (I_2 \cdots I_n) \cap A'$, so sind I_1', I_1'' komaximal, und es ist $A'/I_1' \simeq A/I$.*

2^0. $I_1'B = I_1$.

3^0. *Ist* $c \in \sqrt{I_1'}$, *so daß* $1 - c = d \in I_1''$ *ist, so genügt* c *einer normierten Gleichung* $F \in A[T]$ *vom Grade* $m = [G:Z]$ *mit* $F(0) \in \sqrt{I}$, $F'(0) \equiv 1 \bmod I$.

4^0. *Sind* c *und* F *wie in* 3^0 *definiert, so induziert* $T \mapsto c$ *einen Isomorphismus*

$$(A[T]/FA[T])_{S_0} \simeq A[c]_S \simeq A_S'$$

mit

$$S_0 = 1 + TA[T] + \sqrt{I}A[T], \qquad S = 1 + c \cdot A[c] + \sqrt{I}A[c].$$

Beweis. Daß I_1', I_1'' komaximal sind, folgt analog zu 2.5.1. (angewendet auf $X = V(IB)$, $W = V(I_1)$).

Es sei $c \in \sqrt{I_1'}$, $d \in I_1''$, so daß $c + d = 1$ ist. Ist $c^n \in I_1$, so setzen wir $d' = (c+d)^n - c^n$. Dann ist $d' \in dA'$ und $c^n + d = 1$. Wegen

$$I_1' \cdot I_1'' \cap A \subseteq I_1 \cdot (I_2 \cdots I_n) \cap A = I$$

ist $d'c^n \in I \cdot A'$, und hieraus folgt $I_1 = IB + c^nB$ (wegen $d'I_1 \subseteq IB$) sowie $I_1'B = I_1$ und $I_2 \cdots I_n = IB + dB$.

Es sei $G = s_1Z \cup s_2Z \cup \cdots \cup s_nZ$ eine Zerlegung von G in Nebenklassen mit $s_1 = 1$. Ist $a' \in A'$, so ist $a = \sum_{i=1}^{m} s_i(a'd')$ G-invariant, also aus A, und

$$a - a'd' = \sum_{i=2}^{m} s_i(a'd') \equiv 0 \bmod I_1$$

(da $s_i^{-1}I_1 \neq I_1$ für $i \neq 1$ und $d' \in s_i^{-1}I_1$ ist, ist $s_i(d) \in I_1$ für $i \neq 1$). Also ist

$$a - a' = a - a'd' - a'(1 - d') \in I_1 \cap A' = I_1'.$$

Andererseits folgt aus $A \cap I_1 = A \cap I_2 = \cdots = A \cap I_n$ (da die I_j konjugiert zueinander sind), daß $A \cap I_1 = I$ und somit $A \cap I_1' = I$ ist. Also ist $A/I \simeq A'/I_1'$.

Das Element c genügt der Gleichung $F(T) = \prod_{i=1}^{m}(T - s_i(c))$, die Koeffizienten dieser Gleichung sind G-invariant, also aus A. Ferner ist

$$F(0) = (-1)^m \prod_{i=1}^{m} s_i(c) \equiv 0 \bmod \sqrt{I}$$

und

$$F'(0) = (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} s_j(c) \equiv (-1)^{m-1} \prod_{j=2}^{m} s_j(c) \bmod \sqrt{I_1}$$

und

$$s_j(c) = 1 - s_j(d') \equiv 1 \bmod I_1 \quad \text{für} \quad j \geqq 2,$$

also

$$F'(0) \equiv (-1)^{m-1} \bmod I.$$

Damit sind 1^0, 2^0 und 3^0 bewiesen. Diese Aussagen bleiben gültig, wenn man die I_j durch I_j^n und I durch $I(n) = I^nB \cap A$ ersetzt, da bezüglich dieser Ideale dieselben Voraussetzungen gelten wie für I_j, I.

Insbesondere ist also wegen $(A[T]/FA[T])_{S_0} \otimes_A A/I \simeq A_S' \otimes_A (A/I)$ (mit dem oben definierten S und S_0) auch

$$(A[T]/FA[T])_{S_0} \otimes_A (A/I(n)) \simeq A_S' \otimes_A (A/I(n)).$$

Ist A Noethersch und B endlich über A, so ist A_S' endlich über $A[c]_S$, und $IA[c]_S$ ist im Jacobson-Radikal enthalten. Daraus folgt $A_S' = A[c]_S$. Außerdem ist dann für jedes $m > 0$

$$I(n) \subseteq I^m \quad \text{für} \quad n \gg 0$$

(Lemma von Artin-Rees). Also ist der Kern von $(A[T]/FA[T])_{S_0} \to A_S'$ in jeder Potenz $I^m(A[T]/FA[T])_{S_0}$ enthalten und somit gleich 0.

Sind A, B beliebig, so stelle man B als Vereinigung des gefilterten Systems aller endlich erzeugten, bezüglich G stabilen Unterringe dar, die c enthalten; ist B_0 endlich erzeugt, so ist $B_0^G = A_0$ ebenfalls endlich über A_0. Dann ist A Vereinigung der entsprechenden A_0 und S Vereinigung der S_0, und hieraus folgt die Behauptung allgemein, q. e. d.

2.5.3. Korollar. *Es sei* B *ein Ring, auf dem eine endliche Gruppe* G *operiert,* $A = B^G$ *und* V *eine abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge von* Spec (A). *Dann gilt:*

a) *Das Urbild* W *von* V *besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten, die bezüglich* G *zueinander konjugiert sind.*

b) *Ist* W_1 *eine Komponente,* $Z_1 \subseteq G$ *die zugehörige Zerlegungsgruppe,* $A' = B^{Z_1}$, *so gibt es ein* $c \in A'$, *so daß folgende Aussagen gelten:*

1^0. $W_1 = W \cap V(cB)$,

2^0. $c^2 \equiv c$ *auf* W,

3^0. c *ist Nullstelle einer normierten Gleichung* $F \in A[T]$ *vom Grad* $m = [G:Z]$ *und* $F(0) = 0$ *auf* W, $F'(0) = (-1)^{m-1}$ *auf* W.

In dieser Form benötigen wir die Zerlegungstheorie im folgenden Abschnitt

2.6. Charakterisierung Henselscher Ringe

2.6.1. Satz[1]). *Es sei* A *ein Ring* $V = V(J) \subseteq$ Spec (A) *eine abgeschlossene Teilmenge, die alle abgeschlossenen Punkte von* Spec (A) *enthält. Dann sind folgende Eigenschaften zueinander äquivalent:*

(1) *A ist Henselsch in V.*

(2) *Jedes normierte Polynom* $F \in A[X]$ *mit* $F(0) \equiv 0 \bmod J$ *und* $F'(0)$ *Einheit* $\bmod J$ *besitzt eine Nullstelle in* J.

(3) *Ist* B *eine ganze* A*-Algebra der Form* $B = A[x] \simeq A[X]/FA[X]$, F *ein normiertes Polynom, so läßt sich jede Zerlegung* $B/JB \simeq \overline{B}_1 \times \overline{B}_2$ *zu einer Zerlegung* $B \simeq B_1 \times B_2$ *liften* ($\overline{B}_i = B_i/JB_i$).

[1]) Weitere Verschärfungen dieses Satzes werden in 3.4. und 3.7. gegeben.

(4) *Sind $F, G, H \in A[X]$ normierte Polynome und ist $F \equiv GH \bmod JA[X]$ und $GA[X] + HA[X] + JA[X] = A[X]$, so gibt es eine Zerlegung $F = G_1H_1$ in normierte Polynome*

$$G_1 \equiv G \bmod JA[X], \qquad H_1 \equiv H \bmod JA[X].$$

(5) *Ist B eine endliche A-Algebra und $b \in B$ idempotent modulo JB, so gibt es ein idempotentes Element $b_0 \in B$ mit $b_0 \equiv b \bmod JB$.*[1]

(6) *Ist B eine ganze A-Algebra und $V(JB) = V_1 \cup V_2$, V_1, V_2 offene disjunkte Teilmengen, so gibt es eine Zerlegung* $\operatorname{Spec}(B) = X_1 \cup X_2$, *$X_1, X_2$ offene disjunkte Teilmengen mit $X_i \cap V(JB) = V_i$.*

Die Äquivalenz von (5) und (6) ist klar, da jeder Zerlegung eines affinen Schemas in zwei disjunkte offene Unterschemata ein Paar orthogonaler idempotenter Elemente entspricht.

(2) ist Spezialfall von (1), also gilt die Implikation $(1) \Rightarrow (2)$.

Beweis von $(4) \Rightarrow (5)$. Es sei $b \in B$ idempotent mod JB und $b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in A$. Aus $JB \cap A[b] = \sqrt{JA[b]}$ folgt dann für $n \gg 0$

$$(b^2 - b)^n = c_0 + \cdots + c_{m-1}b^{m-1}, \quad c_i \in J.$$

Für $n \geqq m$ ist

$$F(X) = (X^2 - X)^n - (c_0 + c_1X + \cdots + c_{m-1}X^{m-1})$$

ein normiertes Polynom in $A[X]$ und $F \equiv X^n(X-1)^n \bmod JA[X]$. Aus (4) folgt daher

$$F = GH, \quad G \equiv X^n \bmod JA[X], \quad H \equiv (X-1)^n \bmod JA[X].$$

Hieraus folgt

$$G(b) \equiv b^n \equiv b \bmod JB, \quad H(b) \equiv (b-1)^n \equiv (-1)^n (1-b) \bmod JB.$$

Insbesondere sind $G(b)\,B, H(b)\,B$ zueinander komaximal, $G(b) \cdot c + H(b) \cdot d = 1$ (da B im Jacobson-Radikal enthalten ist). Dann ist $b_0 = G(b)\,c \equiv b \bmod J$, wegen

$$1 = G(b)\,c + H(b)\,d \equiv bc + (-1)^n (1-b)\,d \bmod JB$$

und

$$1 = b + (1 - b).$$

Beweis von $(3) \Rightarrow (4)$. Ist $F \equiv GH \bmod A[X]$, so daß $GA[X] + HA[X] + JA[X] = A[X]$ gilt, so betrachte man $B = A[x] = A[X]/FA[X]$. Dann ist $B/JB \simeq \overline{B}_1 \times \overline{B}_2$, $\overline{B}_1 = A[X]/GA[X] + JA[X]$, $\overline{B}_2$ analog (da $GA[X] + JA[X]$ und $HA[X] + JA[X]$ komaximal sind und ihr Produkt gleich $FA[X] + JA[X]$ ist). Nach (3) läßt sich diese Zerlegung zu einer Zerlegung $B = B_1 \times B_2$ liften. Sind e_1, e_2 die zugehörigen orthogonalen Idempotenten, dann wird B_1 durch e_1x und B_2 durch e_2x erzeugt. Da B_1 endlich über A und J im Jacobson-Radikal enthalten ist, folgt aus dem Lemma von Nakayama, daß e_1x (bzw. e_2x) einer normierten Gleichung $G_1(X) \equiv G(X) \bmod JA[X]$ (bzw. $H_1(X) \equiv H(X) \bmod JA[X]$) genügt. Dann ist

$$G_1(x) = G_1(e_1x + e_2x) = G_1(e_1x) + e_2G_1(x) = e_2G_1(x),$$

$H_1(x) = e_1H_1(x)$, also $(G_1H_1)(x) = 0$, also $F = G_1H_1$. Wir haben also bisher folgende Implikationen gezeigt: $(1) \Rightarrow (2)$ und $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$; es bleibt noch zu zeigen, daß $(6) \Rightarrow (1)$ und $(2) \Rightarrow (3)$ gilt.

Beweis von $(6) \Rightarrow (1)$. Es sei $F \in A[X]$, $F(0) \equiv 0 \bmod J$ und $F'(0)$ Einheit mod J. Wir betrachten $C =: A[X]/FA[X]$ und die ganze Abschließung B von A in C. Es sei $t \in C$ die Restklasse von X. Wir müssen einen A-Homomorphismus $C \to A$ konstruieren, bei dem t in ein Element aus J übergeht. Nach 1.2.7. gilt

$$F(T) = \sum_{\nu=3}^{n} (b_\nu T - c_\nu)\, T^{\nu-1} + (aT^2 + bT + c)$$

mit $b_\nu, c_\nu \in B$, $b_\nu t = c_\nu$. Dasselbe gilt schon in einer endlichen Erweiterung B von A. Nach Voraussetzung ist $c = F(0) \in J$ und $b = F'(0)$ Einheit in A. Außerdem ist $a \cdot t \in B$ wegen $(at)^2 + (bat) + ac = 0$. Ist $f = at + b$, dann ist $B_f = C_f$, da

$$t = \frac{-c}{at + b} = -\frac{c}{f} \in JB_f$$

ist. Der Homomorphismus $C \to A/J$, $t \mapsto 0 \bmod J$ induziert daher einen Isomorphismus $B_f/JB_f \simeq A/J$. Ist also $J_1 =: JB_f \cap B$, so ist $at \in J_1$, da

$$at = -\frac{ac}{f} \in JB_f \cap B$$

ist, und es gilt $fat = a(at^2 + bt) = -ac \in J$, $f - at = b$, und b ist Einheit in A. Also ist

$$V(JB) = V(J_1) \cup V(JB + fB)$$

und

$$V(J_1) \cup V(JB + fB) = \emptyset.$$

Aus (6) und $(6) \Leftrightarrow (5)$ folgt daher

$$B \simeq B_1 \times B_2 \quad \text{mit} \quad B_1/JB_1 \simeq B/J_1 \simeq A/J.$$

Der Zerlegung entspricht ein Paar e_1, e_2 orthogonaler idempotenter Elemente $e_1 + e_2 = 1$. Bei $B_1 \to B_1/JB_1 \simeq A/J$ geht $(at)\,e_1$ in 0, also fe_1 in 1 über, und daher ist f in B_1 umkehrbar und $C_f = B_f = B_1 \times (B_2)_f$. Da man sich auf endliche Erweiterungen B beschränken kann, folgt aus dem Lemma von Nakayama $B_1 \simeq A$, also gibt es einen A-Homomorphismus $C_f \to A$, bei dem $t = -\frac{c}{f} \in JC_f$ in ein Element aus J übergeht, q.e.d.

Beweis von $(2) \Rightarrow (3)$. Reduktion auf den Fall: $V(J)$ zusammenhängend. Es sei $B = A[x] \simeq A[X]/FA[X]$, F ein normiertes Polynom. Es gibt einen endlich erzeugten Unterring $A_0 \subseteq A$, der die Koeffizienten von F enthält und so, daß eine vorgegebene Zerlegung $B/JB = \overline{B}_1 \times \overline{B}_2$ eine analoge Zerlegung von B_0/J_0B_0 in-

[1] B braucht nicht notwendig kommutativ zu sein; den nicht-kommutativen Fall kann man sofort auf den kommutativen Fall reduzieren, indem man B durch $A[b]$ ersetzt.

duziert ($B_0 =: A_0[X]/FA_0[X]$). Man ersetze A durch den Ring $A' = (A_0 + J)_{1+J}$; dann ist J Ideal in A', und (A', J) besitzt ebenfalls Eigenschaft (2). Ferner ist $A'/J \simeq A_0/J \cap A_0$ Noethersch und zerfällt daher in ein endliches Produkt von Ringen mit zusammenhängenden Spektren. Ist $a \in A'$ Repräsentant modulo J eines idempotenten Elementes, so ist $a \bmod J$ Nullstelle der Gleichung $p(T) = T^2 - T$, und $p'(a) = 2a - 1$ ist Einheit (da $(2a-1)^2 = 4(a^2 - a) + 1$ Einheit in A ist), also besitzt p eine Nullstelle $e \equiv a \bmod J$. Also besitzt jedes idempotente Element aus A'/J einen idempotenten Repräsentanten, d. h., Spec (A) ist disjunkte Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Unterschemata, deren Durchschnitt mit $V(J)$ zusammenhängend ist.

2.6.2. Hilfssatz. *Es sei $V(J)$ zusammenhängend und $B = A[X]/FA[X] = A[x]$. Dann gilt: Wenn (A, J) Eigenschaft* (2) *besitzt, ist* Spec (B) *disjunkte Vereinigung endlich vieler Zusammenhangskomponenten* Spec (B_i), *so daß die* Spec (B_i/JB_i) *zusammenhängend sind.*

Beweis. Es sei $F = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Wir betrachten n Unbestimmte $X_1, \ldots, X_n$, deren elementarsymmetrische Funktionen

$$Y_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} X_i, \ldots, Y_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} X_i$$

und den universellen Zerfällungsring von F

$$C = A[X_1, \ldots, X_n] \Big/ \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - a_i)\, A[X_1, \ldots, X_n] =: A[x_1, \ldots, x_n].$$

Dann ist $B \subseteq C$ (durch $x \mapsto x_1$). Auf C und auf $A[X_1, \ldots, X_n]$ operiert die symmetrische Gruppe $G = S_n$, und es ist $A \subseteq C^G$; es sei H die zu B gehörige Untergruppe von G. Wir werden folgendes zeigen:

1. Es sei $W \subseteq$ Spec (C) das Urbild von V in Spec (C). Dann ist C direktes Produkt endlich vieler Ringe $C_1, \ldots, C_r$ mit zusammenhängenden Spektren, so daß auch $W \cap$ Spec $(C_i) \subseteq$ Spec (C) zusammenhängend ist.

2. Wir betrachten die Abbildung q: Spec $(C) \to$ Spec (C^H). Da S_n und damit H auf der Menge der Zusammenhangskomponenten von Spec (C) operiert, gilt:

Die Bilder zweier Zusammenhangskomponenten von Spec (C) in Spec (C^H) sind entweder gleich oder disjunkt. Also hat Spec (C^H) die Zusammenhangskomponenten $q(\text{Spec}\,(C_i))$, $i = 1, \ldots, r$, wobei eventuell einige zusammenfallen.

Dann sind $q(W \cap \text{Spec}\,(C_i))$ die Zusammenhangskomponenten von $q(W) =$ Urbild von V in Spec (C^H). Da Spec (B) homöomorph zu Spec (C^H) ist, folgt daraus die Behauptung.

Es bleibt also 1. zu zeigen. Es sei $R = A[Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$, $S = A[X_1, \ldots, X_n]$; durch $Y_i \mapsto a_i$, $X_i \mapsto x_i$ wird ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

induziert, so daß V abgeschlossene Teilmenge von Spec (R) und W ihr volles Urbild in Spec (S) ist. Es sei W_1 eine Zusammenhangskomponente von W. Wir wenden nun 2.5.3. auf die Ringe R, S und die Mengen V und W_1 an. Es sei $Z \subseteq G$ die Zerlegungsgruppe von W_1 und $R = S^Z$. Ferner sei $I \subseteq R$ das Ideal mit $V(I) = V$ und $I = \sqrt{I}$. Nach 2.5.3. gibt es dann ein Element $c_0 \in C^Z$ mit den folgenden Eigenschaften:

1°. $V(IS^Z + c_0 S^Z)$ ist das Bild von W_1 in Spec (S^Z).

2°. $c_0^2 - c_0 \equiv 0 \bmod IS^Z$.

3°. c_0 ist Nullstelle eines normierten Polynoms $F_0 \in R[T]$ vom Grade $m = [G:Z]$ mit $F_0(0) \equiv 0 \bmod I$ und $F_0'(0) \equiv (-1)^{m-1} \bmod I$.

Es sei $F \in A[T]$ das Bild von F_0. Dann ist $F(0) \equiv 0 \bmod \sqrt{J}$ und $F'(0)$ Einheit in A. Aus (2) folgt dann die Existenz einer Nullstelle $a \in \sqrt{J}$ von F, d. h.

$$F(T) = (T - a)\, G(T), \quad a \in J.$$

Dann gilt $F' = (T - a)\, G' + G$, also ist $G(a) = F'(a) \equiv F'(0) \bmod \sqrt{J}$, $G(a)$ ist Einheit in A.

Es sei jetzt c das Bild von c_0 in C. Dann ist $G(c) \equiv G(a) \bmod (c - a)\, C$. Da $G(a)$ Einheit in A ist, folgt hieraus $G(c)\, C + (c - a)\, C = C$, $G(c)\,(c - a) = F(c) = 0$. Also ist $C = C_1 \times C_1'$, $C_1 \simeq C/(c-a)\, C$ und daher $V(JC_1) = W \cap$ Spec $(C_1) = W_1$. Da C_1 ganz über A ist, enthält $V(JC_1)$ alle abgeschlossenen Punkte von Spec(C_1), und daher ist Spec(C_1) zusammenhängend (da $V(JC_1) = W_1$ zusammenhängend ist).

2.6.3. Korollar. *Ist A in $V = V(J)$ Henselsch, $\bar{E}$ ein endlich erzeugter projektiver A/J-Modul, so läßt sich $\bar{E}$ zu einem bis auf Isomorphie eindeutigen endlich erzeugten projektiven A-Modul E liften.*

Beweis. $\bar{E}$ ist direkter Summand eines freien Moduls $A^n \otimes_A (A/J)$ und $\text{End}\,(A^n) \otimes_A A/J \simeq \text{End}_A(A^n \otimes_A A/J) =: \bar{B}$; man wende (5) auf das $\bar{E}$ entsprechende idempotente Element von $\bar{B}$ an.

2.6.4. Korollar. *Ist A Henselsch in $V = V(J)$ und A' eine ganze A-Algebra, so ist A' Henselsch in $V(JA')$.*

Beweis. Die Eigenschaft (5) bleibt bei ganzen Erweiterungen erhalten.

2.6.5. Korollar. *Jede endliche Erweiterung eines lokalen Henselschen Ringes ist direktes Produkt endlich vieler lokaler Henselscher Ringe.*

2.7. Relative Henselsche Abschließung

Die von Natur aus in der algebraischen Geometrie vorkommenden Ringe, d. h. vor allem Polynomringe und ihre Restklassenringe, sind nicht Henselsch. Sie sind jedoch im Ring der formalen Potenzreihen bzw. der konvergenten Potenzreihen, also in Henselschen Ringen enthalten. Adjungiert man alle Funktionen, die algebraisch über den Ring der Polynome sind und einfache Nullstellen eines Polynoms in allen Punkten einer abgeschlossenen Teilmenge V sind, so ist zu erwarten, daß der resultierende Ring Henselsch in V ist. Diese Frage werden wir hier untersuchen.

Folgende Terminologie ist sehr bequem: Wir betrachten Paare (A, V), A ein Ring, $V \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge. Morphismen solcher Paare $(A, V) \to (B, W)$ sind solche Ringhomomorphismen $A \to B$, daß $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ eine Abbildung von W in V induziert.

Ist $V = V(J)$, $W = V(I)$, so bedeutet das $JB \subseteq \sqrt{I}$. Ferner ist $V(I \cap A)$ die abgeschlossene Hülle des Bildes von W in V und $V(JB)$ das Urbild von V in $\operatorname{Spec}(B)$.

Ein Paar (A, V) nennen wir *Henselsch*, wenn A Henselsch in V ist.

Wir setzen generell in diesem Abschnitt voraus, daß W alle abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec}(B)$ enthält.

Wir betrachten einen Morphismus $(A, V) \to (B, W)$, so daß A Unterring von B ist und das Bild von W in V dicht ist. Dann adjungieren wir zu A alle Elemente $b \in B$, die auf W verschwinden und einer normierten Gleichung $F \in A[X]$ genügen, für die $F'(b)$ auf W umkehrbar ist. Aus dem so erhaltenen Ring bilden wir noch den Quotientenring nach dem multiplikativ abgeschlossenen System aller Elemente, die in B umkehrbar sind; auf diese Weise erhalten wir einen Ring $A' \subseteq B$, und wir nennen das Paar (A', V'), wobei V' die abgeschlossene Hülle des Bildes von W in $\operatorname{Spec} A'$ ist, die *Henselsche Abschließung von* (A, V) *in* (B, W). Bezüglich dieser relativen Henselschen Abschließung gilt folgender Satz:

2.7.1. Satz. *Es sei $(A, V) \to (B, W)$ wie oben definiert, und alle in B umkehrbaren Elemente aus A seien auch in A umkehrbar. (A', V') sei die Henselsche Abschließung von (A, V) in (B, W). Für jedes Ideal J in A mit $V(J) = V$ und $JB \cap A = J$ gilt:*

a) $A'/JA' \simeq A/J$.

b) *A' ist Vereinigung eines gefilterten Systems von Unterringen der Form $A[x]_f$, wobei:*

1. *$x \in JA'$ ist und x einer normierten Gleichung $F \in A[X]$ genügt, für die $F'(0)$ Einheit in A ist,*

2. *$f \equiv 1 \bmod (JA[x] + xA[x])$ gilt.*[1])

Beweis. Es sei $W = W(I)$, I ein Ideal in B mit $I = \sqrt{I}$. Da das Bild von W in V dicht ist, gilt $I \cap A = \sqrt{J}$. Wenn $x \in B$ auf W verschwindet, ist $x \in I$, und ist F ein Polynom und $F(x) = 0$, $F'(x)$ umkehrbar auf W, so ist $F(0) = 0 \bmod \sqrt{J}$ und $F'(0)$ Einheit in A (da $F'(0)$ umkehrbar in B ist). Dann besitzt $F \bmod J$ eine Nullstelle modulo J. Also kann man x durch $x - u$, $F(X)$ durch $F(X + u)$ ersetzen, so daß $F(0) \equiv 0 \bmod J$ und $F'(0)$ Einheit in A ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $F'(0) = 1$. Dann ist $F(X) = F(0) + X + G(X)X^2$. Einsetzen von x ergibt

$$(*) \qquad x = a + bx^2, \qquad a \in JA[x], \qquad b \in A[x],$$

also $x(1 - bx) \in JA[x]$, $x \in JA[x]_f$ mit $f = 1 - bx \in 1 + xA[x]$. Somit ist

$$A[x]_f/JA[x]_f \simeq A/J$$

[1]) Mit anderen Worten: A' ist Vereinigung von A-Etalalgebren; vgl. 3.6., insbesondere 3.6.3.

(da $x \in JA[x]_f$ und $J \subseteq JA[x]_f \cap A \subseteq JB \cap A = J$ ist). Ist $u \in A[x]$ und u Einheit in B, so ist $u \bmod JA[x]_f$ Einheit in $A[x]_f/JA[x]_f \simeq A/J$. Also gibt es ein $a \in A$ und ein f^n, so daß $f^n au \in 1 + JA[x] + xA[x]$ ist. Also ist A' Vereinigung solcher Ringe, wie in b) angegeben.

Es bleibt noch zu zeigen, daß zwei Ringe dieses Typs, etwa erzeugt durch x und y, in einem dritten enthalten sind. Nach den vorangehenden Überlegungen gibt es Elemente b, c aus $A[x]$, $A[y]$ mit $x(1 - bx) \in JA[x, y]$ und $y(1 - cy) \in JA[x, y]$. Es sei

$$J_1 = xA[x, y] + yA[x, y] + JA[x, y],$$
$$J_2 = (1 - bx)(1 - cy)A[x, y] + JA[x, y].$$

Dann ist $J_1 + J_2 = A[x, y]$, $J_1J_2 = J$. Ist $t \in J_1$, so daß $t - 1 \in J_2$ ist, dann ist

$$t^2 - t \in J_1J_2 = JA[x, y] \cap A[t] \subseteq \sqrt{JA[t]},$$

und es existiert ein $z \equiv t \bmod \sqrt{JA[t]}$ mit $z^2 - z \in JA[t]$ (nach 1.2.1.). Dann ist

$$A/J \simeq A[t]_{1-z}/JA[t]_{1-z} = A[t]_{1-t}/JA[t]_{1-t}$$
$$= A[t]_{1+J+tA[t]}/JA[t]_{1+J+tA[t]}.$$

Insbesondere ist dann $(t - 1)^r t \in JA[t]$ für hinreichend große n. Genügt t einer normierten Gleichung vom Grade $m \subseteq n + 1$, so erhält man $(t - 1)^n t \in J + Jt + \cdots + Jt^n$. Also gibt es ein normiertes Polynom $F \in A[X]$ vom Grade $n + 1$ mit $F(t) = 0$, $F(0) \equiv 0 \bmod J$, $F'(0) \equiv (-1)^n \bmod J$. Ferner ist $(1 - t)x$, $(1 - t)y \in JA[x, y]$, also, wenn R der Ring $A[t]_S$ $(S = 1 + J + tA[t])$ ist,

$$R[x, y]/JR[x, y] \simeq A/J \simeq R/J,$$

und nach dem Lemma von Nakayama ist daher $R = R[x, y]$, also $x, y \in A[t]_f$ mit einem $f \in 1 + J + tA[t]$, q.e.d.

2.7.2. Korollar. *Die relative Henselsche Abschließung bezüglich (B, W) induziert einen Hüllenoperator $A \mapsto A'$ im Verband der Unterringe von B.*

Es sei A ein Unterring, V die abgeschlossene Hülle des Bildes von W in $\operatorname{Spec}(A)$, (A', V') die Henselsche Abschließung von (A, V) in (B, W), (A'', V'') die Henselsche Abschließung von (A', V') in (B, W). Es bleibt lediglich $A'' = A'$ zu zeigen. Dazu genügt zu zeigen: Wenn $y \in JB$ Nullstelle einer normierten Gleichung $F \in A'[X]$ ist und $F(0) \equiv 0 \bmod JA'$, $F'(0)$ Einheit in A', dann ist $y \in A'$. Dabei können wir o.B.d.A. folgende vereinfachten Voraussetzungen machen:

1. Alle in B umkehrbaren Elemente aus A sind in A umkehrbar.

2. f ist aus einem der in Satz 2.7.1. angegebenen Unterringe von A', etwa definiert durch ein Element x.

3. Nach Multiplikation von y mit einem geeigneten Element aus $1 + xA[x]$ kann man noch annehmen, daß $F \in A[x][X]$ und $y = c + dy^2$ mit $c \in JA[x, y]$, $d \in A[x, y]$ ist (analog der Gleichung $(*)$ im Beweis des Satzes 2.7.1.).

Für x gilt eine analoge Gleichung $x = a + bx^2$, $a \in JA[x]$, $b \in A[x]$. Wie am Schluß des Beweises von 2.7.1. folgt daraus, daß x und y in einem der in Satz 2.7.1. angegebenen Unterringe von A' enthalten sind, q.e.d.

Wir nennen (B, W) *relativ zu* (A, V) *Henselsch*, wenn jedes normierte Polynom $F \in A[X]$, für das $F(0)$ auf V verschwindet und $F'(0)$ auf V Einheit ist, eine Nullstelle $b \in B$ besitzt, die auf W verschwindet. Aus Satz 2.7.1. und da $A \mapsto A'$ ein Hüllenoperator ist, folgt

2.7.3. Korollar. *Ist* (B, W) *relativ zu* (A, V) *Henselsch, so ist die Henselsche Abschließung von* (A, V) *in* (B, W) *Henselsch.*

Für die folgenden Korollare sei stets folgende Voraussetzung erfüllt: Alle in B umkehrbaren Elemente aus A seien umkehrbar modulo J in A.

2.7.4. Korollar. *Ist A Noethersch und konvergiert die Folge $J^nB \cap A$, $n = 1, 2, \ldots$, gegen Null bezüglich der J-adischen Topologie von A, so ist A' flach über A, und die in Satz 2.7.1. angegebenen Unterringe von A' sind isomorph zu $(A[X]/FA[X])_S$ mit $S =: 1 + J + XA[X]$ bei dem durch $X \mapsto x$ induzierten Homomorphismus.*

Beweis. Man kann W durch $V(JB) \subseteq W$ ersetzen. Dann ist (A', V') immer noch die Henselsche Abschließung in $(B, V(JB))$ (nach 2.7.1.). Wegen $V(JB) = V(J^pB)$ und da nach Voraussetzung $J^pB \cap A \subseteq J^n$ für große p ist, ist nach 2.7.1.

$$A'/J^nA' \simeq A/J^n \simeq A[x]_{1+J+xA[x]} \otimes_A A/J^n \simeq (A[X]/FA[X]_{1+J+XA[X]}) \otimes_A A/J^n$$

(die letzte Isomorphie gilt, da $F(0)$ nilpotent mod J^n und $F'(0)$ Einheit mod J^n ist). Also ist nach dem Krullschen Durchschnittssatz (vgl. etwa O. Zariski und P. Samuel [58])

$$A[x]_{1+J+xA[x]} \simeq (A[X]/FA[X])_{1+J+XA[X]}.$$

Alle diese Ringe sind A-flach, also auch A', q.e.d.

2.7.5. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* 2.7.4. *gilt: Jeder Morphismus* $(A, V) \to (B', W')$ *in ein Henselsches Paar* (B', W') *besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung* $(A', V') \to (B', W')$.

2.7.6. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* 2.7.4. *ist* A' *Noethersch.*

Beweis. Es sei o.B.d.A. J im Jacobson-Radikal enthalten. Nach 2.7.4. ist A' Vereinigung von Noetherschen Ringen A_i, so daß A_i A-flach ist und $A/J^n \simeq A_i/J^nA_i$ für alle n gilt. Daraus folgt, daß die Folge $(J^nB \cap A_i)$, $n = 1, 2, \ldots$, bezüglich der (JA_i)-adischen Topologie in A_i gegen Null konvergiert und daß $A_i \subseteq A_i^\wedge = A^\wedge$ ist. Also ist $A^\wedge$ treuflache Erweiterung jedes A_i, $A' = \text{lim-proj}\,(A_i) \subseteq A^\wedge$ und damit $A^\wedge$ treuflache Erweiterung von A'. Da A Noethersch ist, folgt daraus die Behauptung.

2.8. Henselsche Abschließung[1])

2.8.1. Satz. *Es sei A ein Ring, $V = V(J)$ abgeschlossene Teilmenge seines Spektrums. Dann gibt es stets eine A-Algebra $A_V{}^h$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$A_V{}^h$ ist Henselsch in $V(JA_V{}^h) = V^h$.*

[1]) Man vergleiche diesen Abschnitt auch mit den Ergebnissen von 3.7.

(2) *Ist $(A, V) \to (B, W)$ ein Morphismus in ein Henselsches Paar (B, W), so gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $(A_V{}^h, V^h) \to (B, W)$.*

Durch diese beiden Eigenschaften ist $A_V{}^h$ bis auf kanonische Isomorphie eindeutig charakterisiert. Wir nennen $A_V{}^h$ die *Henselsche Abschließung von A in V* oder die *Henselsche Abschließung von (A, V)*. Das ist also der „kleinste" Ring, der A enthält und im Urbild von V Henselsch ist.

2.8.2. Satz. *$A_V{}^h$ hat folgende Eigenschaften:*

(1) *$A_V{}^h$ ist flache A-Algebra.*

(2) *Ist $V = V(J)$, so ist $A/J \simeq A_V{}^h/JA_V{}^h$ ein Isomorphismus.*

(3) *$A_V{}^h$ ist treuflache A-Algebra, falls V alle abgeschlossenen Punkte enthält.*

(4) *$A_V{}^h$ ist Noethersch, falls A Noethersch ist.*

(5) *$A_V{}^h$ ist induktiver Limes eines gefilterten Systems von A-Algebren A' der Form $A' \simeq (A[T]/FA[T])_f$, wobei f alle Elemente von $1 + JA[T] + TA[T]$ durchläuft und F alle normierten Polynome mit $F(0) = 0 \bmod J$, $F'(0)$ umkehrbar $\bmod J$.*

Beweis der beiden Sätze: A sei Noethersch. Ist $A^\wedge$ J-adische Komplettierung, so ist $A^\wedge$ Henselsch (vgl. die Beispiele in Kap. 2), und aus 2.7.3. und 2.7.5. folgt, daß die Henselsche Abschließung von A in $A^\wedge$ die in 2.8.1. angegebenen Eigenschaften besitzt. Aus 2.7.4. folgt die Eigenschaft (5) von Satz 2.8.2. und hieraus die Eigenschaften (1), (2) und (3) von 2.8.2. Schließlich ist die Eigenschaft (4) eine Folgerung aus 2.7.6.

Es sei $A = \text{lim-ind}\,A_\alpha$, (A_α) ein gefiltertes induktives System, $V_\alpha \subseteq \text{Spec}(A_\alpha)$ abgeschlossene Teilmengen, so daß (A_α, V_α) ein induktives System von Paaren ist. Ist $V = \text{lim-proj}\,(V_\alpha)$, $V \subseteq \text{Spec}(A)$, dann gilt:

Gibt es Ringe $A^h_{\alpha V_\alpha}$ mit den in 2.8.1. angegebenen Eigenschaften, so bilden diese wegen Eigenschaft (2) von 2.8.1. in kanonischer Weise ein induktives System, und $\text{lim-ind}\,A^h_{\alpha V_\alpha} =: A_V{}^h$ hat die in 2.8.1. angegebenen Eigenschaften. Das folgt daraus, daß sich jeder Morphismus $(A, V) \to (B, W)$ in ein Henselsches Paar (B, W) eindeutig auf das induktive System der $A^h_{\alpha V_\alpha}$ fortsetzen läßt.

Der allgemeine Beweis von 2.8.1. ergibt sich daraus, daß man A als gefilterten induktiven Limes seiner endlich erzeugten Unterringe darstellen kann und daß diese Noethersch sind. Außerdem bleibt die Eigenschaft (5) von 2.8.2. dabei bestehen und hieraus folgen die Eigenschaften (1), (2) und (3), q.e.d.

2.9. Henselsche Abschließung reduzierter und normaler Ringe

2.9.1. Satz. *Ist B eine A-Algebra, $V = V(J) \subseteq \text{Spec}(A)$ und B reduziert (bzw. normal) in $P \in V(JB)$, so ist $B \otimes_A A_V{}^h$ reduziert (bzw. normal) in dem P eindeutig entsprechenden Punkt $P' \in V(JB \otimes_A A_V{}^h)$.*

Beweis. Man ersetze B durch B_P, so daß es wegen 2.8.2 genügt, folgendes zu zeigen: Ist B ein reduzierter (bzw. normaler) lokaler Ring mit dem Maximalideal M, $B = (B[T]/FB[T])$ und $F'(0) \neq 0 \bmod M$, $F(0) \equiv 0 \bmod M$, so ist B' reduziert (bzw. normal) in $M' = MB' + tB'$ ($t \equiv T \bmod FB[T]$). Die Behauptung ergibt sich aus folgenden beiden Resultaten:

2.9.2. Satz. *Ist B ein Ring, $F \in B[T]$ ein normiertes Polynom und F' nicht aus dem Nilradikal, so ist $P(B[T]/FB[T])_{F'}$ für jedes Primideal $P \in \operatorname{Spec}(B)$ Durchschnitt endlich vieler Primideale, deren Restklassenkörper endlich separabel über $k(P) = B_P/PB_P$ sind.*

Beweis. Ist B ein Körper, so ist $F = F_1^{e_1} \dots F_r^{e_r}$, F_i irreduzible Polynome, und dann ist

$$(B[X]/FB[X])_{F'} = \prod_{\substack{e_i = 1 \\ F_i' \neq 0}} (B[X]/F_iB[X]),$$

und der allgemeine Fall folgt daraus durch Übergang zu

$$(B[T]/FB[T])_{F'} \otimes_B k(P) \simeq (k(P)[T]/\bar{F}k(P)[T])_{\bar{F}'}.$$

2.9.3. Satz. *Ist $B = A[t] \simeq A[T]/FA[T]$ reduziert, A ein normaler Integritätsbereich und F ein normiertes Polynom vom Grade n, so ist für jedes A-ganze Element*

$$x = q_0 + q_1t + \dots + q_{n-1}t^{n-1} \in K[t] = K[T]/FK[T]$$

(K Quotientenkörper von A)

$$F'(t)\, x \in A[t].$$

Beweis. Wir werden zeigen: Ist $F(T) = (T - t) \sum_{i=0}^{n-1} b_iT^i$ in $B[T]$, so gilt für alle $x \in K[t]$

$$(*) \qquad F'(t)\, x = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Tr}_{B/A}(b_ix)\, t^i;$$

$\operatorname{Tr}_{B/A}$ bedeutet „Spur von B über A". Ist x ganz über A, so ist $\operatorname{Tr}_{B/A}(b_ix) \in A$, da A normal ist. Hieraus folgt die Behauptung.

Die Gleichung $(*)$ folgt aus

2.9.4. Satz. *Ist A beliebig, $F \in A[T]$ ein normiertes Polynom vom Grade n,*

$$B = A[t] = A[T]/FA[T], \qquad F(t) = 0$$

und

$$F(T) = (T - t) \sum_{i=0}^{n-1} b_iT^i,$$

so gilt für alle $x \in B$

$$F'(t)\, x = \prod_{i=0}^{n-1} \operatorname{Tr}_{B/A}(b_ix)\, t^i.$$

Beweis. Es sei

$$C_0 =: \mathsf{Z}[u_0, \dots, u_{n-1}, t_1, \dots, t_n],$$
$$A_0 =: \mathsf{Z}[u_0, \dots, u_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}],$$

wobei $u_0, \dots, u_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ Unbestimmte und $y_0, \dots, y_{n-1}$ die elementarsymmetrischen

Funktionen in $t_1, \dots, t_n$ sind. Dann ist

$$F_0(T) =: \prod_{i=1}^{n} (T - t_i) = T^n + \prod_{i=0}^{n-1} y_iT^i = (T - t_i) \prod_{j=0}^{n-1} v_jT^j$$

mit gewissen $v_j \in A_0[t_1]$. Die symmetrische Gruppe $G = S_n$ operiert auf C_0 (so daß $C_0{}^G = A_0$ ist). Es sei $H = S_{n-1}$ die Untergruppe, die t_1 invariant läßt und $G = Hs_1 \cup \dots \cup Hs_n$ eine Zerlegung in Nebenklassen, $s_1 = 1$, $s_i(t_1) = t_i$. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{n-1} s_i(v_j)\, T^j = \frac{F_0(T)}{T - t_i} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=0}^{n-1} s_j(v_j)\, t_i{}^j = 0,$$

also für $u = \sum_{i=0}^{n-1} u_it_1{}^i \in C_0$

$$F'(t_1)\, u = \sum_{j=0}^{n-1} v_jt_1{}^ju = \sum_{j=0}^{n-1} t_1{}^j \sum_{i=1}^{n} s_i(v_ju)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(v_ju) = \operatorname{Tr}_{A_0[t_1]/A_0}(v_ju).$$

Also gilt der Satz für den Ring A_0 und F_0, t_i und u.

Für beliebige Ringe und

$$F = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_iT^i, \qquad x = \sum_{i=0}^{n-1} q_it^i$$

erhält man durch $u_i \mapsto q_i$, $y_i \mapsto a_i$ einen Homomorphismus $A_0 \to A$, so daß F_0 in F und u in x übergeht und $A_0[t_1] \otimes_{A_0} A \simeq B$, $t_1 \mapsto t$ gilt. Dabei bleibt die Formel erhalten, da die Spur linear ist, q.e.d.

2.9.5. Bemerkung. *Wenn A Noethersch oder normal ist und V alle abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec}(A)$ enthält, kann man das in 2.8.2., Eigenschaft (5) angegebene induktive System noch so wählen, daß alle Ringe in $A_V{}^h$ enthalten sind.*

Beweis. Ist A Noethersch, so folgt die Behauptung aus 2.7.4. Es sei A normal, $V = V(J)$ ein Element aus $JA_V{}^h$, das einer normierten Gleichung F genügt, $F(0) = 0 \bmod J$, $F'(0)$ umkehrbar in A. Wir betrachten $A[x] \subseteq A_V{}^h$ und $K[x] \subseteq K \otimes_A A_V{}^h$, K der Quotientenkörper von A. Da $A_V{}^h$ treuflach über A ist, ist $A_V{}^h \subseteq K \otimes_A A_V{}^h$, $A[x] \subseteq K[x]$, und $K[x]$ ist reduziert nach 2.9.1. Es sei $F_0 \in K[T]$ das Minimalpolynom von x. Da A normal ist, ist $F_0 \in A[T]$ (da alle normierten irreduziblen Fakto renaus $A[T]$ sind). Also ist $A[x] \simeq A[T]/F_0A[T]$ und $F(T) = F_0(T)\, G(T)$. Aus $F'(x) = F_0'(x)\, G(x)$ folgt (da $x \in JA_V{}^h$ und $F'(0)$ Einheit ist), daß $F_0'(x)$ und $G(x)$ Einheiten sind, also auch $F_0'(0)$ und $G(0)$, und daher ist $F_0(0) = F(0)\, G(0)^{-1} \notin J$, q.e.d.

2.9.6. Satz. *Ist A normal und $V = V(J)$ zusammenhängend, dann ist $A_V{}^h$ ein normaler Integritätsbereich und $Q(A_V{}^h) =: K_V{}^h$ separabel algebraisch über $Q(A) =: K$. Ist K_s eine separable algebraische Abschließung von $K_V{}^h$, A_s die ganze Abschließung* *von A in K_s, B_s diejenige von $A_V{}^h$ in K_s und $I = JB_s \cap A_s$, so gilt $B_s = A_{s(1+I)}$ und*

$$\mathrm{Gal}(K_s/K_V{}^h) = Z =: \{s \in \mathrm{Gal}\, K_s/K);\ s(I) = I\},$$

also $A_V{}^h = K_s{}^Z \cap A_{s(1+I)}$.

Das ergibt eine Konstruktion für die Henselsche Abschließung normaler lokaler Integritätsbereiche im Maximalideal: *Man bilde die ganze Abschließung B in K_s, wähle darin ein Maximalideal P (alle Maximalideale sind zueinander konjugiert!) und definiere $B \cap K^Z$ als Henselsche Abschließung.* Das ist NAGATAS Methode der Konstruktion der Henselschen Abschließung lokaler Ringe.

Beweis von 2.9.6. $A_V{}^h$ ist normal und das Spektrum zusammenhängend. Also ist $A_V{}^h$ ein Integritätsbereich, und $K_V{}^h$ ist separabel algebraisch über K. Da B_s ganz über $A_V{}^h$ ist, ist $\sqrt{JB_s} \cap A_V{}^h = \sqrt{JA_V{}^h}$. Außerdem ist $V(JB_s)$ zusammenhängend nach 2.6.1., Eigenschaft (6). Da JB_s im Jacobson-Radikal von B enthalten ist, ist $A_{s(1+I)} \subseteq B_s$, und für jedes $A_V{}^h$-ganze Element x gibt es nach Konstruktion von $A_V{}^h$ ein Element f derart, das A-ganz ist und $\equiv 1 \bmod JA_V{}^h$, so daß fx A-ganz ist. Hieraus folgt $A_{s(1+I)} = B_s$. Offensichtlich gilt $s(I) = I$ für $s \in \mathrm{Gal}(K/K_V{}^h)$.

Es sei $s \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$ und $s(I) = I$. Dann wollen wir zeigen, daß $s \in \mathrm{Gal}(K_s/K_V{}^h)$ ist. Dazu genügt es zu zeigen (nach Konstruktion von $A_V{}^h$): Genügt $t \in A_V{}^h$ einer normierten Gleichung $F(T) \in A[T]$, so daß $F(0) \in J$ und $F'(0)$ Einheit auf V ist, so ist $s(t) = t$.

Es ist $F(T) = (T - t)\, G(T)$ in $A_V{}^h T$ und $F'(0) = G(0) - tG'(0)$, also $G(0)$ Einheit in $A_V{}^h$. Wäre $s(t) \neq t$, so wäre $G(s(t)) = 0$ und daher $s(t)$ Einheit in B im Widerspruch zu $t \in I$, q.e.d.

Für einen Ring A bezeichne $\bar{A}$ die ganze Abschließung im vollen Quotientenring. Ist $V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge, so sei $\bar{V} \subseteq \mathrm{Spec}(\bar{A})$ ihr Urbild.

2.9.7. Satz. *Es ist $\bar{A}_{\bar{V}}{}^h = (A_V{}^h)^-$.*

Beweis. Jeder Homomorphismus $(\bar{A}, \bar{V}) \to (B, W)$, so daß (B, W) Henselsch ist, induziert eindeutig bestimmte Morphismen $A_V{}^h \to B$ und $A_V{}^h \otimes_A \bar{A} \to B$. Außerdem ist $A_V{}^h \otimes_A \bar{A}$ ganz über $A_V{}^h$, also Henselsch in $\bar{V}$, also $A_V{}^h \otimes_A \bar{A} = (\bar{A})_{\bar{V}}{}^h$. Außerdem ist $\bar{A}_{\bar{V}}{}^h$ normal und im vollen Quotientenring von $A_V{}^h$ enthalten, also $(A_V{}^h)^- = \bar{A}_{\bar{V}}{}^h$.

2.9.8. Korollar. *Es sei A ein Noetherscher Integritätsbereich, $V \subset C = \mathrm{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann enthält V nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, und es gibt eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der Zusammenhangskomponenten von V und den irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}(A_V{}^h)$.*

Beweis. Die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}(A_V{}^h)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Spec}(\bar{A}_{\bar{V}}{}^h)$ und somit den Zusammenhangskomponenten von $\bar{V}$, q.e.d.

Beispiel. Ist A ein lokaler Ring (in einem Punkt P einer algebraischen Mannigfaltigkeit), so entsprechen die Punkte der Normalisierung, die über P liegen, umkehrbar eindeutig den „algebraischen Zweigen" in P (Komponenten von $\mathrm{Spec}(A_P{}^h)$), und wir werden sehen, daß diese umkehrbar eindeutig den analytischen bzw. „algebraischen Zweigen" in P (Komponenten von $\mathrm{Spec}(A_P)$) entsprechen.

Wir betrachten als Beispiel die Kurve $C: (x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$ (Lemniskate). Durch

$$(t_0 : t_1) \mapsto \left(\frac{t_0 t_1(t_0{}^2 + t_1{}^2)}{t_0{}^4 + t_1{}^4}, \frac{t_0 t_1(t_0{}^2 - t_1{}^2)}{t_0{}^4 + t_1{}^4}\right)$$

erhält man eine birationale Abbildung $\mathrm{P}^1 \to C$ (wegen $\dfrac{x - y}{x + y} = \left(\dfrac{t_1}{t_0}\right)^2$ ist die Abbildung birational), und ist $A = \mathcal{O}_{C,0}$, so gibt es genau zwei Maximalideale in $\bar{A}$, die den beiden Punkten $(0:1)$ und $(1:0)$ von P^1 entsprechen. (Die Charakteristik des Grundkörpers sei $\neq 2$).

Betrachten wir R, den lokalen Ring der Ebene im Nullpunkt, so gibt es eine Funktion $u \in R^h$ mit $u^2 = 8x^2 + 1$ (als Nullstelle der Gleichung $F(T) = T^2 - 8x^2 - 1 = 0$, da $F(1) = -8x^2 = 0$ in $(0, 0)$ und $F'(1) = 2 \neq 0$ in $(0, 0)$ ist). Also zerfällt

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$$

in R^h in

$$\left[x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(1 + u)\right]\left[x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(1 - u)\right].$$

Unter den beiden Lösungen von $T^2 - 8x^2 - 1 = 0$ sei u diejenige mit $u \equiv 1 \bmod (x)$, wegen $(u + 1)(u - 1) = 8x^2$, $u + 1 \equiv 2 \bmod (x)$ ist $u - 1 \equiv 4x^2 \bmod (x^3)$, d. h. $u - 1 = 4x^2 + x^3 v$ mit $v \in R$. Der Faktor $\left(x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}(1 - u)\right)$ von $F(x, y)$ ist daher von der Form $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}(1 - u) = y^2 - x^2(1 + xv)$ (der andere ist Einheit in R^h!). Die Gleichung $T^2 = 1 + xv$ besitzt in R^h eine Lösung w. Also ist $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}(1 - u) = (y - wx)(y + wx)$, und $y - wx = 0$, $y + wx = 0$ definieren die algebraischen (und analytischen) Zweige von C in 0. Alle Zweige sind glatt. Also ist $0 \in C$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt.

Als Anwendung von 2.9.7. kann man z. B. zeigen:

2.9.9. Satz. *Ist A ein Noetherscher Integritätsbereich, so gilt:*

1⁰. *Für alle $P \in \mathrm{Spec}\, A$ gibt es nur endlich viele Primideale $\bar{P} \in \mathrm{Spec}\, \bar{A}$ über P, und es ist $[k(\bar{P}) : k(P)] < \infty$.*

2⁰. *$\bar{A}$ ist eine endliche diskrete Hauptordnung (d. h. Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen, so daß jedes Element $a \neq 0$ in fast allen dieser Bewertungsringe Einheit ist).*

Beweis. Die Anzahl der Primideale von $\bar{A}$ über P ist gleich der Anzahl der Komponenten von $A_P{}^h$, also endlich. Durch Induktion nach $ht(P)$ folgt $[k(P) : k(P)] < \infty$. (Induktionsanfang nach 2.4.3.; ferner kann man annehmen, daß nur ein Primideal $\bar{P}$ über P liegt).

Zum Beweis von 2⁰ wurde bereits gezeigt (vgl. 1.2.10.), daß $\bar{A} = \bigcap \bar{A}_{\bar{P}}$ ist, wobei $\bar{P}$ alle Punkte von $\mathrm{Spec}(\bar{A})$ durchläuft, für die $\bar{A}_{\bar{P}}$ diskreter Bewertungsring ist. Wir müssen noch zeigen, daß ein $a \in A$, $a \neq 0$, nur in endlich vielen dieser $\bar{A}_{\bar{P}}$ keine Einheit ist. Dazu zeigen wir: Ist $a \in P$ ($\bar{A}_{\bar{P}}$ ein diskreter Bewertungsring), so ist

$P = \overline{P} \cap A$ ein zu aA gehöriges Primideal. Wir dürfen dabei annehmen, daß A lokaler Ring und P das Maximalideal ist. Ist $P \notin \mathrm{Ass}(A/aA)$, so gibt es dann ein $b \in A$ und $aA : b = aA$ und somit $A = A_a \cap A_b$ (da durch Induktion nach n folgt, daß $\frac{A}{a^n} \cap A_b = A$ ist). Dann gilt aber auch $\overline{A} = \overline{A}_a \cap \overline{A}_b$; denn ist $x \in \overline{A}_a \cap \overline{A}_b$, so gibt es ein $c \in A$, $c \neq 0$ und $cx^n \in A_a \cap A_b = A$ für $n = 1, 2, \ldots$. Hieraus folgt $x \in \overline{A}$. Hieraus folgt $\overline{A}_{\overline{P}} = (\overline{A}_{\overline{P}})_a \cap (\overline{A}_{\overline{P}})_b$ im Widerspruch zu $a, b \in \overline{P}$ und $ht(\overline{P}) = 1$, q.e.d.

2.10. Algebraische Potenzreihen

Es sei A ein Ring. Dann bezeichnen wir mit $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ die Henselsche Abschließung des Polynomringes $A[T_1, \ldots, T_n]$ in der durch $T_1 = \cdots = T_n = 0$ definierten abgeschlossenen Teilmenge. Die Elemente aus $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ nennen wir *algebraische Potenzreihen.* Diese Bezeichnung wird im folgenden gerechtfertigt werden; es wird sich zeigen, daß unter einigen Voraussetzungen über A dieser Ring die algebraische Abschließung von $A[T_1, \ldots, T_n]$ in $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ ist.

Anschaulich hat $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ folgende Bedeutung: A sei der Koordinatenring einer affinen algebraischen Mannigfaltigkeit X über $\mathbf{C}$. Dann ist $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ der Ring aller komplex holomorphen Funktionen auf $X \times \mathsf{A}_{\mathbf{C}}^n$, die in allen Punkten von $X \times \{0\}$ definiert und algebraisch über dem Körper der rationalen Funktionen von $X \times \mathsf{A}_{\mathbf{C}}^n$ sind. Einen Henselschen Ring B nennen wir *von endlichem Typ über* A, wenn B Restklassenring von $A[X_1, \ldots, X_m]\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ ist.

Im folgenden sei A ein Noetherscher Ring. Ist $V = V(I)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$, so bezeichnen wir mit $A_V^\wedge$ die I-adische Komplettierung von A (diese hängt nur von V ab!). Anschaulich ist das der Ring der formal holomorphen Funktionen auf $\mathrm{Spec}(A)$ längs V (vgl. O. Zariski [57]). Nach Konstruktion ist $A_V^h \subset A_V^\wedge$, und wir werden zeigen, daß unter einigen Voraussetzungen $A_V{}^h$ die algebraische Abschließung von A in $A_V^\wedge$ ist.

Es sei k ein Körper. Eine k-Algebra R heißt *geometrisch reduziert,* wenn $R_{k'} = R \otimes_k k'$ für jeden Erweiterungskörper k' von k reduziert ist. Hinreichend dafür ist, daß das für jede endliche rein inseparable Körpererweiterung k' gilt.

2.10.1. Hilfssatz. *A sei nullteilerfrei und K der Quotientenkörper von A. Ist für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$ der Ring $A_V^\wedge \otimes_A k(P)$ geometrisch reduziert über $k(P)$ und $A_V^\wedge \otimes_A K$ normal, so ist $A_V^\wedge \otimes_A \overline{A}$ Normalisierung von $A_V^\wedge$.*

Bemerkung. Es genügt, daß für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $\mathrm{codh}(A_P) = 1$ gilt: $A_V^\wedge \otimes_A k(P)$ ist geometrisch reduziert.

Beweis. $A_V^\wedge \otimes_A \overline{A}$ ist in $(A_V^\wedge)^-$ enthalten und $(A_V^\wedge)^- \subseteq A_V^\wedge \otimes_A K$. Es genügt also zu zeigen: Ist $a \in A_V^\wedge \otimes_A \overline{A}$, $f \in A$, $f \neq 0$ und $\frac{a}{f}$ $A_V^\wedge$-ganz, so ist $\frac{a}{f} \in A_V^\wedge \otimes_A \overline{A}$. $\overline{A}$ ist endliche diskrete Hauptordnung, also gilt: Ist $S = \{s \in \overline{A},\ \overline{A}f : s = \overline{A}f\}$, so ist $B =: (\overline{A})_S$ semilokaler Hauptidealring.

Ist $C = A_V^\wedge \otimes_A B$, so gilt:

a) $B \subseteq C \subseteq A_V^\wedge \otimes_A K$.

b) $fC \cap (A_V^\wedge \otimes_A \overline{A}) = f(A_V^\wedge \otimes_A \overline{A})$.

c) $P \in \mathrm{Spec}(B)$, $P \neq 0 \Rightarrow C/PC = A_V^\wedge \otimes_A k(P)$.

Wegen b) genügt es zu zeigen, daß $\frac{a}{f} \in C$ ist, und daher genügt es zu zeigen: Ist p ein Primfaktor von f in B, so ist $\frac{a}{p} \in C$.

Nach c) gilt: pC ist Durchschnitt von minimalen Primidealen Q_α und nach a) ist C_{Q_α} diskreter Bewertungsring. Also ist $a \in C \cap \left(\bigcap_\alpha p\, C_{Q_\alpha}\right) = pC$ und somit $\frac{a}{p} \in C$, q.e.d.

2.10.2. Satz. *Ist A ein reduzierter Noetherscher Ring, $V = V(J)$ und für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$ der Ring $A_V^\wedge \otimes_A k(P)$ geometrisch reduziert über $k(P)$ und $A_V \otimes_A k(P)$ normal für $ht(P) = 0$, so ist $A_V{}^h$ die algebraische Abschließung von A in A_V.*

Beweis. Nach 2.9.1. kann man A durch $A_V{}^h$ ersetzen, und wir zeigen zunächst, daß A separabel algebraisch abgeschlossen in $A^\wedge = A_V^\wedge$ ist. Ist $Q(A)$ der volle Quotientenring von A, so ist $A^\wedge \cap Q(A) = A$. Man kann daher A durch A/P, $A^\wedge$ durch $A^\wedge/PA^\wedge$ ersetzen für alle P mit $ht(P) = 0$. Es sei also A ein Henselscher Integritätsbereich.

Ist $x \in A^\wedge$ separabel algebraisch, so wollen wir zeigen, daß $x \in A$ ist, und dazu kann man x noch mit beliebigen $a \in A$, $a \neq 0$ multiplizieren, da $Q(A) \cap A^\wedge = A$ ist. Daher kann man voraussetzen, daß x einer normierten irreduziblen Gleichung

$$f(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0$$

mit $a_i \in J$ genügt. Also ist $A[x] \simeq A[X]/fA[X]$ ein Henselscher Integratitätsbereich. Außerdem ist

$$(A^\wedge \otimes_A A[x]) \otimes_{A[x]} Q(A[x]) = A^\wedge \otimes_A Q(A[x])$$

normal (nach 2.9.1.), und für $P \in \mathrm{Spec}(A[x])$ ist

$$(A^\wedge \otimes_A A[x]) \otimes_{A[x]} k(P) = A^\wedge \otimes_A k(P)$$

geometrisch reduziert über $k(P)$. Nach 2.10.1. ist also $A^\wedge \otimes_A (A[x])$ normal, und

$$\begin{aligned} A^\wedge \otimes_A (\overline{A}[x])/J(A^\wedge \otimes_A (\overline{A}[x])) &\simeq (A/J) \otimes_A (\overline{A}[x]) \\ &\simeq \overline{A}[X]/X^m(\overline{A}[x]) \end{aligned}$$

hat ein zusammenhängendes Spektrum (da A ein Henselscher Integrationsbereich ist). Da $A^\wedge \otimes_A (\overline{A}[x])$ Henselsch ist, ist also $\mathrm{Spec}(A^\wedge) \otimes_A (\overline{A}[x])$ zusammenhängend, und daher ist $A^\wedge \otimes_A (\overline{A}[x])$ und somit

$$A^\wedge \otimes_A A[x] = A^\wedge[X]/fA[X]$$

ein Integritätsbereich. Somit ist f ein lineares Polynom, $x \in A$. Also ist A separabel algebraisch abgeschlossen in A.

Angenommen, es sei $x \in A^\wedge$ und $x^p \in A$ (p Charakteristik von A). $A^\wedge \otimes_A A[x]$ ist reduziert. Also ist $x \in A$, also A algebraisch abgeschlossen in $A^\wedge$, q.e.d.

Wir wollen noch hinreichende Bedingungen dafür angeben, wann die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind. Zunächst einige Vorbereitungen.

Für einen Modul E über einem Noetherschen Ring A bezeichnen wir mit $\mathrm{Ass}_A(E)$ die zu E assoziierten Primideale, d. h. per definitionem

$$P \in \mathrm{Ass}_A(E) \Leftrightarrow \exists\, x \quad (x \in E \text{ und } P = \text{Annullator } (x)).$$

Das sind genau diejenigen, die zu einer Primärzerlegung von 0 in E gehören.

Es gilt: *Ist B flache A-Algebra, so ist*

$$\mathrm{Ass}_B(B \otimes_A E) = \cup \{\mathrm{Ass}_B((B/PB)) \mid P \in \mathrm{Ass}_A(E)\}.$$

Beweis. Aus $Q \in \mathrm{Ass}_B(B/PB)$, $P \in \mathrm{Ass}_A(E)$ folgt: Es gibt Injektionen $B/Q \to B/PB$ und $A/P \to E$, also auch $B/Q \to B \otimes_A E$, da $B \otimes_A (A/P) \to B \otimes_A E$ injektiv ist. Ist $x \in B \otimes_A E$ Bild der 1, so ist Q der Annullator von (x):

$$Q \in \mathrm{Ass}_B(B \otimes_A E).$$

Es sei umgekehrt $Q \in \mathrm{Ass}_B(B \otimes_A E)$. Dann gilt die Behauptung schon, wenn man E durch einen geeigneten, endlich erzeugten Untermodul ersetzt. Also sei E Noethersch. Die Primärzerlegung von 0 in E liefert eine Injektion in eine endliche direkte Summe $\bigoplus_\alpha E_\alpha$, so daß $\mathrm{Ass}_A(E_\alpha)$ aus nur einem Element besteht. Dann ist

$$Q \in \mathrm{Ass}_B(B \otimes_A E) \subseteq \bigcup_\alpha \mathrm{Ass}_B(B \otimes_A E),$$

also o.B.d.A. $\mathrm{Ass}_A(E) = \{P\}$.

Man kann noch A, E, B durch A_P, E_P und $A_P \otimes B$ ersetzen. $Q \in \mathrm{Ass}_B(B/PB)$ folgt dann durch Induktion nach der Zahl n mit $P^nE = 0$ (da $\mathrm{Ass}_B(B \otimes_A PE) = \mathrm{Ass}_B(B \otimes_A E)$ gilt, falls $PE \neq 0$ ist), q.e.d.

2.10.3. Satz (M. Nagata, D. Rees). *Ist A ein lokaler Noetherscher Ring und $A^\wedge$ reduziert, so ist die Normalisierung von A endlich über A.*

Beweis. Wegen $A^\wedge \otimes_A \bar{A} \subseteq \bar{A}^\wedge$, und da $A^\wedge/A$ treuflach ist, genügt es, die Behauptung für A zu zeigen. Also genügt es zu zeigen, daß die Normalisierung eines kompletten lokalen Noetherschen Integritätsbereichs A endlich über A ist. A ist endliche Erweiterung eines kompletten regulären lokalen Unterringes A_0 (vgl. M. Nagata [39]), und die Behauptung folgt durch Induktion nach $\dim A$ aus folgendem Satz:

2.10.4. Satz (J. Tate). *Ist A ein normaler Noetherscher Integritätsbereich $\pi \in A$, so daß A komplett bezüglich der π-adischen Topologie ist, $\pi A = P$ ein Primideal und für jeden endlichen Erweiterungskörper L von $k(P)$ die ganze Abschließung von A/P in L endlich über A ist, dann ist für jeden endlichen Erweiterungskörper K von $Q(A)$ die ganze Abschließung von A in K endlich.*

Beweis. Durch Induktion nach n folgt

$$f \in A - P \Rightarrow \pi^n A : f = \pi^n A.$$

Also ist $\pi^n A_P \cap A = \pi^n A$. Es genügt zu zeigen: Ist K rein inseparabel, $K^q \subseteq Q(A)$ für eine Potenz q der Charakteristik von K, so ist die ganze Abschließung von A in K endlich über A. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sqrt[q]{\pi} =: \pi' \in K$; $A' = (A^{q^{-1}}) \cap K$ ist die ganze Abschließung von A in K.

Ist $P' = P^{q^{-1}} \cap K$, so ist $\pi'^n A'_{p'} \cap A' = \pi'^n A'$ (da aus $a'b' \in \pi'^n A'$, $b' \notin P'$ folgt, daß $a'^q b'^q \in \pi'^n A$, $b'^q \notin P$, also $a'^q \in \pi^n A$, $a' \in \pi'^n A'$ ist). Da $A'_{p'}$ ganz über A_p und $[k(P') : k(P)] < \infty$ ist, ist $A'/\pi' A'$ endlich über $A/\pi A$. Also ist $A'/\pi A'$ endlich über A, und da die A'-adische Topologie separiert ist, folgt daraus, daß A' endlich über A ist, q.e.d.

Definition. Ein Noetherscher Integritätsbereich A heißt *J-Ring* (Japanischer Ring), wenn für jeden endlichen Erweiterungskörper K von $Q(A)$ die ganze Abschließung von A in L endlich ist.

Ein Noetherscher Ring A heißt *universeller J-Ring*, wenn A/P für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$ ein J-Ring ist (vgl. A. Grothendieck [18], Kap. IV. 1).

Beispiele.

1°. Komplette lokale Ringe sind universelle J-Ringe (insbesondere Körper).

2°. Ist A von der Charakteristik 0 und sind alle Restklassenkörper vollkommen, so ist A universeller J-Ring (Beispiel: $\mathbb{Z}$).

3°. Restklassenringe, Quotientenringe und endliche Erweiterungen universeller J-Ringe sind universelle J-Ringe.

4°. Die Henselschen Abschließungen universeller J-Ringe sind universelle J-Ringe.

5°. Analytische und quasianalytische Algebren sind universelle J-Ringe.

2.10.5. Satz (M. Nagata).

(1) *Die Komplettierung reduzierter universeller J-Ringe A in einer abgeschlossenen Teilmenge $V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ ist reduziert.*

(2) *Ist A universeller J-Ring, B eine A-Algebra von endlichem Typ, so ist B universeller J-Ring.*

Insbesondere folgt daraus also:

a) *Ist A universeller J-Ring, so ist für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$ der Ring $A_V^\wedge \otimes k(P)$ geometrisch reduziert über $k(P)$.*

b) *A-Algebren von endlichem Typ über Körpern oder über $\mathbb{Z}$ sind universelle J-Ringe.*

Beweis.

(1) Wir betrachten folgende Lineartopologie in A:

Ein Ideal I sei offen $\Leftrightarrow \dim (A/I) = 0$.

Ist $A^\wedge$ die Komplettierung von A bezüglich dieser Topologie, dann ist $A^\wedge = \prod_m A_m^\wedge$, wobei m alle Maximalideale durchläuft (vgl. H. Kurke [33]). Jedes Ideal $J \subseteq A$ ist abgeschlossen bezüglich dieser Topologie. Ist $V = V(J)$, dann ist die kanonische Abbildung $A_V^\wedge \to A^\wedge$ injektiv, da $A/J^n \to A^\wedge/J^n A^\wedge$ injektiv, also

$$A_V^\wedge = \text{lim-proj } (A/J^n) \to \text{lim-proj } A^\wedge/J^n A^\wedge = A^\wedge$$

injektiv ist. Also ist zu zeigen, daß $A_m^\wedge$ reduziert ist, d. h., man kann annehmen, daß A ein lokaler Ring ist. Ferner kann man A durch die Normalisierung ersetzen. Also ist zu zeigen:

Ist A ein normaler lokaler universeller J-Ring, so ist $A^\wedge$ reduziert.

Induktion nach $\dim A$: Für $\dim A = 1$ ist A und somit $A^\wedge$ ein diskreter Bewertungsring, also reduziert.

Ist $\dim A > 1$, $f \in \mathfrak{m}$, dann ist (nach 2.10.1.)

$$\mathrm{Ass}_{A^\wedge}(A^\wedge/fA^\wedge) = \bigcup\{\mathrm{Ass}_{A^\wedge}(A^\wedge/PA^\wedge) : P \in \mathrm{Ass}_{A^\wedge}(A/fA)\},$$

und $A^\wedge/PA^\wedge$ ist nach Induktionsvoraussetzung reduziert. Da A_P für $P \in \mathrm{Ass}_A(A/fA)$ diskreter Bewertungsring ist, ist daher auch $A_Q^\wedge$ diskreter Bewertungsring für alle $Q \in \mathrm{Ass}_{A^\wedge}(A^\wedge/fA^\wedge)$ (mit dem Maximalideal $PA_Q^\wedge$, falls $Q \in \mathrm{Ass}_{A^\wedge}(A^\wedge/PA^\wedge)$ ist. Also ist $A^\wedge$ reduziert, q.e.d.

(2) Es genügt zu zeigen: Ist A universeller J-Ring, so ist $A[X]$ universeller J-Ring, d.h., ist $P \in \mathrm{Spec}(A[X])$, $[L : k(P)] < \infty$, so ist die ganze Abschließung von $A[X]/P$ in L endlich über $A[X]$. Man kann A durch $A/(P \cap A)$ ersetzen; es sei $B = A[X]/P = A[x]$. Dann genügt es also zu zeigen, daß die ganze Abschließung von B in L endlich über B ist. Dazu kann man noch A durch die ganze Abschließung in L ersetzen.

Fall 1. x transzendent über A.

Es gibt eine endliche, rein inseparable, ganz abgeschlossene Erweiterung $A' = A[y_1, \ldots, y_q]$ von A und eine Wurzel $\sqrt[q]{x} = x'$ (q eine Potenz der Charakteristik von L), so daß $L' = L(y_1, \ldots, y_q, x')$ endlich separabel über $Q(A'[x'])$ ist. Damit ist die ganze Abschließung von B in L endlich über $A'[x']$, also auch über A, q.e.d.

Fall 2. x algebraisch über A.

Da A ganz abgeschlossen in L ist, ist $L = Q(A)$. Es gibt ein $f \in A$ mit $B_f = A_f$. Dann ist

$$B_f \cap \bigcap \{B_p ; P \in \mathrm{Ass}_B(B/fB)\} = B;$$

denn aus $\dfrac{b}{f} \in B_p$, $P \in \mathrm{Ass}_B(B/fB)$ folgt

$$b \in B \cap [\bigcap \{fB_p : P \in \mathrm{Ass}_B(B/fB)\}] = fB,$$

also $\dfrac{b}{f} \in B$. Ist

$$c \in B_f \cap [\bigcap \{(B_p)^-,\ P \in \mathrm{Ass}_B(B/fB)\}],$$

so gibt es ein $d \in B$, $d \neq 0$ und $dc^n \in B_p$, für alle $n \geqq 0$ und $P \in \mathrm{Ass}_B(B/fB)$, also $dc^n \in B$ für alle n und somit $c \in \overline{B}$.

Also genügt zu zeigen: Ist $P \in \mathrm{Ass}_B(B/fB)$, so ist $(B_p)^-$ endlich über B_p. Es genügt, daß für ein Maximalideal $M \supseteq P$ die Normalisierung $(B_M)^-$ endlich über B_M ist. Nach 2.4.2. ist $B \simeq A[X]/\sum_\nu (a_\nu X - b_\nu)\, A[X]$, also $B/xB \simeq A/(Ax \cap A)$, und ist $x = \dfrac{b}{a}$, so ist $Ax \cap A = Ab{:}a$. Für alle zu $A/Ab{:}a$ assoziierten Primideale Q ist A_Q diskreter Bewertungsring und $x \in A_Q$, also ist B_Q für alle zu B_M/xB_M assoziierten Primideale Q diskreter Bewertungsring und

$$B_M/QB_M = (A/Q \cap A)_{(M \cap A)},$$

also $B_M^\wedge/QB_M^\wedge$ reduziert und daher (nach 2.10.1.) $B_M^\wedge$ reduziert, und aus 2.10.3. folgt die Behauptung, q.e.d.

Im folgenden sei A ein Noetherscher Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper K. Es sollen hinreichende Bedingungen angegeben werden dafür, daß $A_V^\wedge \otimes_A K$ normal ist ($V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge).

(1) *Wenn für alle Maximalideale $P \in V$ der Ring $A_P^\wedge \otimes_A K$ normal ist, so gilt das auch für $A_V^\wedge \otimes_A K$.*

Damit läßt sich also die Frage der Normalität auf den lokalen Fall zurückführen.

(2) *Existiert eine treuflache Erweiterung B von A und ist $B_W^\wedge \otimes_A K$ normal (W Urbild von V in $\mathrm{Spec}(B)$), so ist $A_V^\wedge \otimes_A K$ normal.*

(3) *Ist A endlich über einem Unterring A_0, K separabel über $K_0 = Q(A_0)$ und V Urbild einer abgeschlossenen Menge $V_0 \subseteq \mathrm{Spec}(A_0)$, dann ist $A_V^\wedge \otimes_A K$ normal, falls $A_{0V_0}^\wedge \otimes_{A_0} K_0$ normal ist.*

Beweis von (1). Wie bereits weiter oben bemerkt, ist $A_V^\wedge \subseteq \prod A_P$, wobei P alle Maximalideale aus V durchläuft, ferner ist diese Erweiterung treuflach, also auch

$$A_V^\wedge \otimes_A K \subseteq (\prod A_P^\wedge) \otimes_A K.$$

Außerdem ist jede Lokalisierung des Ringes $(\prod A_P^\wedge) \otimes_A K$ in einem Primideal auch Lokalisierung eines der Ringe $A_P^\wedge \otimes_A K$ in einem Primideal, d.h., $(\prod A_P^\wedge) \otimes_A K$ ist normal. Eigenschaft (1) ergibt sich daher aus folgender Bemerkung: Ist B eine treuflache A-Algebra und B normal, so ist auch A normal.

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß $B \cap Q(A) = A$ (der Durchschnitt in $Q(B)$ gebildet), was aus der Treuflachheit folgt:

$$\frac{a}{b} \in B \Rightarrow a \in Bb \cap A = Ab \quad \text{für} \quad a, b \in A.$$

Beweis von (2). Der Beweis folgt ebenfalls aus dieser Bemerkung, da $A_V^\wedge \to B_W^\wedge$ eine treuflache Erweiterung ist, also auch $A_V^\wedge \otimes_A K \to B_W^\wedge \otimes_A K$ (die Tensorprodukte sind Quotientenringe von $A_V^\wedge$ bzw. $B_W^\wedge$ bezüglich des multiplikativ abgeschlossenen Systems aller regulären Elemente aus A).

Beweis von (3). Es ist

$$A^\wedge \otimes_A K = (A_0^\wedge \otimes_{A_0} A) \otimes_A K = A_0^\wedge \otimes_{A_0} K.$$

Ist $t \in K$ ein primitives Element von K/K_0, $f \in K_0[T]$ das Minimalpolynom von t, so ist $f'(t) \neq 0$ und $(A^\wedge \otimes_A K)_{f'(t)} = A^\wedge \otimes_A K$ normal (nach 2.9.), q.e.d.

Als Beispiel für die Anwendung zeigen wir

2.10.6. Satz. *Es sei A ein regulärer und universell japanischer lokaler Ring. Dann ist $B^\wedge \otimes_B Q(B)$ für jede ganze reduzierte A-Algebra B normal.*

Beweis. Ist $Q(B)$ separabel über K, so folgt die Behauptung aus (3). $Q(B)$ ist separabel über K sicher dann, wenn $Q(B)$ separabel über $Q(A)$ ist (da die Minimalpolynome eines Elementes $t \in B$ über A und über $A^\wedge$ gleich sind wegen

$$B^\wedge \supseteq (A[t])^\wedge \simeq A[t] \otimes_A A^\wedge).$$

Ist $Q(B)$ nicht separabel über $Q(A)$, so ist die Charakteristik von A eine Primzahl p, und A enthält einen Körper. Durch Adjunktion einer endlichen Zahl q-ter Wurzeln zu $A^\wedge$ (q eine Potenz von p) erreicht man, daß jedes Element von B einem separablen Polynom über dem so erhaltenen Erweiterungsring genügt.

Es sei $t_1, \ldots, t_n$ ein System regulärer Parameter in A; $A^\wedge$ ist von der Form $k[[t_1, \ldots, t_n]]$, und falls k vollkommen ist, sind die zu adjungierenden Wurzeln aus

$$k\left[\left[\sqrt[q]{t_1}, \ldots, \sqrt[q]{t_n}\right]\right].$$

$A\left[\sqrt[q]{t_1}, \ldots, \sqrt[q]{t_n}\right] =: A'$ ist regulär, und ist

$$B' = B\left[\sqrt[q]{t_1}, \ldots, \sqrt[q]{t_n}\right],$$

so ist $Q(B^{\wedge\prime})$ separabel über $Q(D'^\wedge)$, also $Q(B')$ separabel über $Q(A')$, d.h., $B'^\wedge \otimes_{B'} Q(B')$ ist normal. Eventuell gilt das schon für $B' = B\left[\sqrt[q_1]{t_1}, \ldots, \sqrt[q_n]{t_n}\right]$ mit $1 \leqq q_i \leqq q$; wir zeigen, daß diese Behauptung schon für $q_1 = \cdots = q_n = 1$, also $B' = B$ zutrifft.

Ist etwa $q_n = p^e > 1$, so betrachten wir $p^{e-1} =: q$ und den regulären lokalen Ring

$$A\left[\sqrt[q_1]{t_1}, \ldots, \sqrt[q_{n-1}]{t_{n-1}}, \sqrt[q]{t_n}\right] = A_1$$

sowie die Normalisierung B_1 von $B\left[\sqrt[q_1]{t_1}, \ldots, \sqrt[q_{n-1}]{t_{n-1}}, \sqrt[q]{t_n}\right]$. Ist $\sqrt[q]{t_n} = X$, dann ist $B_1\left[\sqrt[p]{x}\right]$ flach über B_1 und separabel über dem regulären lokalen Ring $A_1\left[\sqrt[p]{x}\right]$, also nach (3) $B_1^\wedge \otimes_{B_1} Q(B_1)$ normal. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß das schon für $B\left[\sqrt[q_1]{t_1}, \ldots, \sqrt[q_{n-1}]{t_{n-1}}, \sqrt[q]{t_n}\right]$ anstelle von B_1 gilt. Damit ist 2.10.6. für den Fall, daß der Restklassenkörper von A vollkommen ist, bewiesen.

Der allgemeine Fall ergibt sich dann, indem man zu einem flachen, algebraischen Erweiterungsring A' von A übergeht, so daß $A'/\mathfrak{m}A'$ eine algebraische Abschließung von $A/\mathfrak{m}A$ ($\mathfrak{m}$ Maximalideal von A) ist (vgl. Kap. 1) unter Verwendung von (3), q.e.d.

2.10.7. Satz. *Ist A ein Noetherscher semi-lokaler Integritätsbereich und $A^\wedge \otimes_A Q(A)$ normal, P ein Primideal in A, so ist auch $(A_P)^\wedge \otimes_A Q(A)$ normal.*

Beweis. Ist $Q \subseteq A^\wedge$ ein über P gelegenes Primideal von $A^\wedge$, dann ist $B = A_Q^\wedge$ eine treuflache Erweiterung von A_p, und es genügt nach (2) zu zeigen, daß $P^\wedge \otimes_A Q(A)$ normal ist. Man kann von vornherein A (nach 2.6.3.) durch seine Normalisierung ersetzen; dann ist $A^\wedge$ und somit B normal. Aus den Struktursätzen über komplette lokale Ringe folgt, daß B Lokalisierung einer endlichen Erweiterung eines universell japanischen regulären lokalen Ringes ist. Also ist $B^\wedge$ nach Satz 2.10.6. normal, q.e.d.

2.10.8. Korollar. *Für folgende Klassen von Noetherschen Integritätsbereichen A ist $A_V^\wedge \otimes_A Q(A)$ normal (V eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von* Spec (A)*):*

a) *A ist die Lokalisierung eines endlich erzeugten Ringes über einem Körper oder einem universell japanischen eindimensionalen Ring.*

b) *A ist analytische Algebra bzw. Lokalisierung einer analytischen Algebra.*

c) *A ist Lokalisierung eines kompletten lokalen Noetherschen Ringes.*

Alle Aussagen folgen unmittelbar aus 2.10.6. und 2.10.7. bis auf den Fall, daß $A \supseteq R$ ist, R ein universell japanischer eindimensionaler Ring; o.B.d.A. sei R lokal und A endlich erzeugt über R und normal. Es genügt zu zeigen, daß $A_p^\wedge$ normal ist für alle Maximalideale P mit $P \cap R \neq 0$. Man kann R als diskreten Bewertungsring voraussetzen; mit q bezeichnen wir ein Primelement von R. Es sei $q, t_1, \ldots, t_n \in A$ ein System von Parametern in A_p. Aus Zariskis Hauptsatz (vgl. 3.2.1.) folgt dann, daß A Lokalisierung einer ganzen $R[t_1, \ldots, t_n]$-Algebra ist, und aus 2.10.6. folgt daher die Behauptung, q.e.d.

Diese Beispiele zeigen also, daß alle in der algebraischen, arithmetischen und analytischen Geometrie vorkommenden Ringe die gewünschten Eigenschaften besitzen.

2.11. Der Satz über implizite Funktionen für algebraische Potenzreihen

2.11.1. Vorbemerkungen

a) Der Ring $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Für jede A-Algebra B und jedes n-Tupel $t = (t_1, \ldots, t_n) \in B^n$, so daß B Henselsch in $V(t_1, \ldots, t_n)$ ist, gibt es genau einen Homorphismus von A-Algebren

$$A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \to B$$

mit $T_i \mapsto t_i$.

Beweis. Die kanonische Abbildung $A[T_1, \ldots, T_n] \to B$, $T_i \mapsto t_i$ läßt sich eindeutig auf $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ fortsetzen (2.8.1.). In diesem Sinne ist also die „Einsetzung" $f \mapsto f(t) \in B$, $f \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ definiert, sie stimmt für Polynome mit der üblichen überein, ebenso für konvergente Potenzreihen (im Fall eines bewerteten Grundkörpers).

b) Es sei A ein Ring, $V \subseteq$ Spec (A) eine abgeschlossene Teilmenge. Jede Derivation D von A mit Werten in einem $A_V^\wedge$-Modul M besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer Derivation $A_V{}^h \to M$.

Beweis. Es sei $A_V{}^h = \text{lim-ind}\,(A[T]/FA[T])_f$ wie in Satz 2.8.2., Eigenschaft (5). Insbesondere ist $F'(t)$ in jedem der $A[t]_f$ Einheit ($A[t] =: A[T]/FA[T]$, t Restklasse von T). Die Fortsetzung von D ist eindeutig bestimmt durch

$$\tilde{D}(t) =: -\frac{F^D(t)}{F'(t)}$$

(da t im wesentlichen nur die Relation $F(t) = 0$ erfüllt). ($F^D(t)$ bedeutet: Anwendung der Derivation D auf die Koeffizienten von F; es sei also $F^D(t) \in M$!). Für $g(t) \in A[t]$

ist dann

$$\tilde{D}\big(g(t)\big) = g^D(t) + g'(t)\,\tilde{D}(t).$$

Dadurch ist also für $f \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ in sinnvoller Weise $\partial f/\partial T_1, \ldots, \partial f/\partial T_n$ definiert).

2.11.2. Satz.[1]) *Es seien $f_1, \ldots, f_n \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$. Existiert ein $t = (t_1, \ldots, t_n) \in A^n$, so daß A Henselsch in $V = V(t_1, \ldots, t_n)$, $f_i(t) = 0$ auf V und*

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial T}(t)\right) =: \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\right)$$

Einheit ist, so gibt es eine Lösung $t' = (t_1', \ldots, t_n') \in A^n$ des Gleichungssystems $f_1 = \cdots = f_n = 0$ mit $t' \equiv t$ auf V.

Der Beweis wird im Anschluß an 3.4.4. als Anwendung von Zariskis Hauptsatz gebracht. Als Konsequenz dieses Satzes beweisen wir die folgende Verschärfung:

2.11.3. Satz (Newtonsches Lemma). *Es seien $f_1, \ldots, f_m \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, $m \leqq n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in A^n$, so daß A Henselsch in $V = V(t_1, \ldots, t_n)$ ist. Ferner sei $\mathfrak{d}$ das von den $m \times m$-Minoren der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\right)$ erzeugte Ideal in A. Dann gilt: Ist $f(t) \equiv 0 \bmod \mathfrak{d}^2 I$, wobei I ein Ideal mit $V(I) \supseteq V(t_1, \ldots, t_n)$ ist, so besitzt das Gleichungssystem $f_1 = \cdots = f_m = 0$ eine Lösung $t' = (t_1', \ldots, t_n') \in A^n$ mit $t_i' \equiv t \bmod \mathfrak{d} I$.*

Vorbemerkung zum Beweis. Wir verwenden des öfteren den folgenden Hilfssatz:

Ist $\varphi\colon A^n \to A^m$ ein Homomorphismus und $a \in A$, so daß $aA^m \subseteq \varphi(A^n)$ gilt, so gibt es einen Homomorphismus $\nu\colon A^m \to A^n$ mit

$$\varphi \circ \nu = a\,\mathrm{id}_{A^m}.$$

Ist $e_1, \ldots, e_m$ Basis von A^m, so ist $ae_i \in \varphi(A^n)$, also $ae_i = \varphi(v_i)$, und wir definieren $\nu(e_i) = v_i \in A^m$.

Beweis von 2.11.3. Es sei $\varphi\colon A^n \to A^m$ der durch die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\right)$ gegebene Homomorphismus. Aus der Cramerschen Regel für lineare Gleichungssysteme folgt sofort $\mathfrak{d}A^m \subseteq \varphi\,(A^n)$. Wegen $f_i(t) \subseteq \mathfrak{d}^2 I$ ist $f_i(t)$ von der Form

$$f_i(t) = \sum_j a_{ij} b_j \quad \text{mit} \quad a_{ij} \in \mathfrak{d}, \quad b_j \in \mathfrak{d} I,$$

und es gibt $\nu_{ij}\colon A^m \to A^n$ mit $\varphi \circ \nu_{ij} = a_{ij}\,\mathrm{id}_{A^m}$. Ist

$$\nu_i =: \sum_{i=1}^{m} b_j\,\nu_{ij}\colon A^m \to \mathfrak{d} T A^n,$$

dann ist

$$\varphi \circ \nu_i = f_i(t)\,(\mathrm{id}_{A^m}).$$

---

[1]) Vgl. auch 2.11.4.

Ist $u = \nu_1(e_1) + \cdots + \nu_m(e_m)$ ($e_1, \ldots, e_m$ kanonische Basis von A^m), dann ist $u \in \mathfrak{d} I A^n$ und

$$(1) \qquad \varphi\,(u) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix} =: f(t).$$

u ist aus $\mathfrak{d} I A^n$, also von der Form

$$(2) \qquad u = d_1 u_1 + \cdots + d_r u_r$$

mit gewissen $d_i \in \mathfrak{d}$, $u_i \in \mathfrak{d} I A^n$, und daher gibt es Homomorphismen

$$(3) \qquad w_i\colon A^m \to A^n \quad \text{mit} \quad \varphi \circ w_i = d_i(\mathrm{id}_{A^n}) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Durch eine lineare Koordinatentransformation können wir der Einfachheit halber $t = 0$ annehmen. Taylor-Entwicklung für $f(T) = \begin{pmatrix} f_1(T) \\ \vdots \\ f_n(T) \end{pmatrix}$ liefert (mit den oben eingeführten Bezeichnungen)

$$(4) \qquad f(T) = f(0) + \varphi T + \psi(T),$$

wobei $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$ und $\psi(T) \in A[T_1, \ldots, T_n]^m$ von der Ordnung $\geqq 2$ ist.

Wir machen den Lösungsansatz

$$(5) \qquad t = \sum_{i=1}^{r} d_i y_i$$

mit den d_i aus Gleichung (2) und Unbestimmten $y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{in} \end{pmatrix}$. Setzt man (5) in (4) ein und benutzt (1), (2) und (3), so ergibt sich

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} \varphi \circ w_i \Big(\varphi(u_i) + \sum_{i=1}^{r} \varphi \circ w_i \varphi(y_i)\Big) + \sum_{i,j} \psi_{ij}\, d_i d_j$$

mit gewissen $\psi_{ij}(y) \in A\langle y_{11}, \ldots, y_{rn}\rangle$ von der Ordnung $\geqq 2$. Unter Verwendung von (3) und mit der Abkürzung

$$\sum_j w_j\big(\psi_{ij}(y)\big) = r_i(y)$$

erhält man

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} (\varphi \circ w_i \circ \varphi)\,\big(u_i + y_i + r_i(y)\big),$$

und es gilt $f(t) = 0$, falls man die y_i so wählt, daß

$$(6) \qquad u_i + y_i + r_i(y) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

ist. Das sind rn Gleichungen in den rn Unbestimmten y. Da $u_i \in IA^n$, A in $V(I)$ Henselsch und die Ordnung der r_i mindestens 2 ist, ist $y = 0$ eine Anfangslösung von (6), für die die Funktionalmatrix von (6) die Einheitsmatrix ist. Aus 2.11.2. folgt daher die Existenz von Lösungen $\bar{y}_i \in IA^n$ von (6), und diese in (5) eingesetzt liefern eine Lösung $t \in \mathfrak{b}IA^n$ des Ausgangssystems, q.e.d.

Der folgende Satz ist eine Variante von 2.11.2.

2.11.4. Satz. *Es sei* $B = A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$, *A sei in* $V = V(I)$ *Henselsch und* $X =: \mathrm{Spec}(B) \xrightarrow{p} Y =: \mathrm{Spec}(A)$ *sei glatt*[1]. *Dann besitzt jeder A-Morphismus* $s_0\colon V \to X$ *eine Fortsetzung zu einem Schnitt* $s\colon Y \to X$ *von p.*

Beweis. Ist $J = \mathrm{Kern}(B \xrightarrow{s_0^*} A/I)$, so ist B in $V(J)$ Henselsch, und J/J^2 entspricht dem Konormalbündel des Schnittes $s_0\colon V \to V \times_Y X$ und ist daher (A/I)-projektiv (da p glatt ist). Nach 2.6.3. gibt es einen endlich erzeugten projektiven A-Modul E und einen Isomorphismus $A/I \otimes_A E \xrightarrow{\sim} J/J^2$. Dieser läßt sich zu einer A-linearen Abbildung $i_0\colon E \to J$ liften und wegen $i_0(E)B + IB = J$ zu einem A-Algebrahomomorphismus $i_0\colon A\langle E\rangle \to B$ fortsetzen ($A\langle E\rangle$ Henselsche Abschließung der symmetrischen Algebra $A[E]$ in $EA[E]$). Man zeigt unmittelbar (Übergang zu Lokalisierungen $A_P{}^h$, $P \in V$), daß i injektiv ist. Außerdem ist

$$A\langle E\rangle/(IA\langle E\rangle + EA\langle E\rangle) \to B/J$$

surjektiv, und in 3.4.5. wird gezeigt, daß daraus die Surjektivität von i folgt.[2] Also ist $B \simeq A\langle E\rangle$, und die kanonische Argumentation $A\langle E\rangle \to A$ definiert den gewünschten Schnitt s, q.e.d.

Analoge Fragen werden weiterhin in Kapitel 5 untersucht.

[1] „glatt" bedeutet, daß $\mathrm{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(P)\right) = n - \dim(B_P \otimes_A k(p(P)))$ in jedem abgeschlossenen Punkt $P \in X$ gilt; vgl. 3.8.

[2] Ist A Henselsche Abschließung eines endlich erzeugten reduzierten Ringes, so kann man wie folgt schließen: $A\langle E\rangle^\wedge = B^\wedge$, und aus 2.10.2. folgt dann $A\langle E\rangle = B$. Den allgemeinen Fall kann man hierauf zurückführen.

3. Struktur von quasiendlichen und Etalmorphismen

Eine wichtige Rolle in der lokalen analytischen Geometrie spielt der Satz, daß ein Morphismus $A \to B$ analytischer Algebren endlich ist, wenn $[B/\mathfrak{m}_A B : k] < \infty$ ist (vgl. 2.1.1.). Daraus folgt z. B. leicht, daß ein Morphismus $p\colon X \to Y$ analytischer Räume, so daß ein Punkt $x \in X$ isoliert in seiner Faser $p^{-1}p(x)$ ist, in einer Umgebung U von x folgende Struktur hat: U ist offener Unterraum einer endlichen (verzweigten) Überlagerung einer offenen Teilmenge von Y (und p die Einschränkung der Überlagerungsabbildung). Im Fall algebraischer Mannigfaltigkeiten gilt ein analoges Resultat und hat wichtige Konsequenzen. In diesem Kapitel behandeln wir im ersten Teil diesbezügliche Resultate. Es ist nicht schwierig und für spätere Anwendungen zweckmäßig, diese in einem etwas allgemeineren Rahmen zu entwickeln (geometrische Räume). Am Schluß des Kapitels werden Etalmorphismen behandelt, deren Bedeutung für die algebraische Geometrie erst im letzten Jahrzehnt entdeckt wurde.

Dazu sind zuvor einige Ausführungen über Differentialrechnung im algebraischen Sinne erforderlich.

3.1. Geometrische Räume

Viele Beispiele von geometrischen Strukturen bestehen aus topologischen Räumen X, versehen mit einer Garbe $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ (U offen in X) von Ringen, so daß die Halme in jedem Punkt $x \in X$ lokale Ringe sind (Ring der in x differenzierbaren bzw. analytischen bzw. rationalen Funktionen).

Einige Eigenschaften gelten ganz allgemein für solche Räume (über geometrische Räume vgl. 1.1.).

Sind X, T, S geometrische Räume, so schreiben wir oft $X(T)$ anstelle von $\mathrm{Hom}(T, X)$ und $X(T)_S$ anstelle von $\mathrm{Hom}_S(T, X)$ = Menge aller S-Morphismen von T in X, wobei T und X S-Räume sind (d.h. versehen mit einem fixierten Morphismus in S; ein S-Morphismus ist dann per definitionem ein Morphismus, der komponiert mit dem fixierten Morphismus von X nach S den von T nach S ergibt). S spielt hierbei entweder die Rolle eines Grundkörpers oder eines „Raumes von Parametern".

Die Zuordnung $T \mapsto X(T)$ bzw. $T \mapsto X(T)_S$ hängt kofunktoriell von T ab, und die Morphismen (bzw. S-Morphismen) $X \to Y$ entsprechen dabei umkehrbar eindeutig den natürlichen Transformationen des Kofunktors $T \mapsto X(T)$ (bzw. $T \mapsto X(T)_S$) in den Funktor $T \mapsto Y(T)$ (bzw. $T \mapsto Y(T)_S$) (Lemma von YONEDA, Beweis als leichte Übungsaufgabe; die Zuordnung „natürliche Transformation" $\mapsto$ „Morphismus" ist wie folgt: $v \mapsto v_X(\mathrm{id}_X) \in Y(X) = \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Wir machen daher keine Unterscheidung zwischen Morphismen und den zugehörigen natürlichen Transformationen. Für Morphismen $T \xrightarrow{p} X \xrightarrow{q} Y$ schreiben wir auch $q(p)$ anstelle von $q \circ p$.

3.1.1. Projektive Limites

Die *Existenz von endlichen projektiven Limites* in der Kategorie der geometrischen Räume sei kurz skizziert. Es existiert ein Endobjekt Spec(Z), und es genügt daher, die Existenz von Faserprodukten $X \times_S Y$ nachzuweisen für ein vorgegebenes Diagramm $X \xrightarrow{u} S \xleftarrow{v} Y$. Es sei Z die disjunkte Vereinigung aller zugrunde liegenden Mengen von $\mathrm{Spec}\big(k(x) \otimes_{k(s)} k(y)\big)$, wobei (x, y, s) alle Tripel von Punkten aus X, Y und S mit $u(x) = v(y) = s$ durchläuft. Dann gibt es Projektionen $\underline{p}\colon Z \to \underline{X}$, $\underline{q}\colon Z \to \underline{Y}$ mit $\underline{u} \circ \underline{p} = \underline{v} \circ \underline{q} =: \underline{r}$.

Mit $k(z)$, $z \in Z$, bezeichnen wir den Restklassenkörper von $\mathrm{Spec}\big(k(x) \otimes_{k(s)} k(y)\big)$ in z. Zu jedem geometrischen Raum T und jedem Paar (p', q') aus $X(T) \times_{S(T)} Y(T)$ gibt es dann eine eindeutig bestimmte Abbildung $\underline{h}\colon \underline{T} \to Z$ und eindeutig bestimmte Faktorisierungen $\underline{p}' = \underline{p} \circ \underline{h}$, $\underline{q}' = \underline{q} \circ \underline{h}$.

In Z definieren wir als Topologie die feinste Topologie, so daß alle diese Abbildungen $\underline{h}$ stetig sind. Man überzeugt sich leicht, daß dann $\underline{p}, \underline{q}$ stetig sind. Dann sei $\mathscr{A} =: \underline{p}^{-1}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\underline{r}^{-1}(\mathcal{O}_S)} \underline{q}^{-1}(\mathcal{O}_Y)$; das ist eine Garbe von Ringen auf Z, und zu jedem $z \in Z$ und jeder offenen Umgebung U von z in Z gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathscr{A}(U) \to k(z)$, $f \mapsto f(z)$.

Für $f \in \mathscr{A}(U)$ ist $U_f =: \{z \in U, f(z) \neq 0\}$ offen und $M(U) =: \{f \in \mathscr{A}(U), f(z) \neq 0$ für alle $z \in U\}$ multiplikativ abgeschlossen. Es sei $\mathcal{O}_Z$ die zu der Prägarbe $U \mapsto \mathscr{A}(U)_{M(U)}$ assoziierte Garbe; das ist eine Garbe von lokalen Ringen, und $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist Faserprodukt von X, Y über S.

Wir nennen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

geometrischer Räume *universell*, wenn $X' \simeq X \times_Y Y'$, d. h., wenn für alle Y-Morphismen $T \to Y$

$$X'(T)_Y \simeq X(T)_Y \times Y'(T)_Y$$

gilt. Eine Eigenschaft von Morphismen heißt *universell*, wenn sie sich in allen universellen Diagrammen von den unteren auf den oberen Morphismus überträgt.

Beispiel. Unter einer *offenen Einbettung* $j\colon X \to Y$ verstehen wir einen solchen Morphismus, daß $j\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ eine offene Einbettung topologischer Räume und $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y | \underline{X}$ ist (wenn wir $\underline{X}$ als Unterraum von $\underline{Y}$ auffassen). Wir sagen dazu auch: X ist *offener Unterraum* von Y.

Die Klasse der offenen Einbettungen ist universell.

3.1.2. Morphismen von endlichem Typ und von endlicher Darstellung

Die Morphismen eines geometrischen Raumes X in den „affinen Raum" $\mathsf{A}^n = \mathrm{Spec}\,\mathsf{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ entsprechen umkehrbar eindeutig den n-Tupeln von Funktionen auf X.

Ist S ein geometrischer Raum und $\mathscr{K}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie der geometrischen Räume über S, so sei $\mathsf{A}_S{}^n$ der „affine Raum in $\mathscr{K}$", der durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist: Die S-Morphismen von T in $\mathsf{A}_S{}^n$ entsprechen umkehrbar eindeutig den n-Tupeln von Funktionen auf T (Koordinaten!). Diese Korrespondenz ist funktoriell in T. Ferner sei $\mathsf{A}_Y{}^n = \mathsf{A}_S{}^n \times_S Y$ für Objekte Y aus $\mathscr{K}$; das ist „der affine Raum" über Y in $\mathscr{K}$. Wir benötigen hier nicht deren Darstellbarkeit als Objekt der betrachteten Kategorie und benutzen diese Bezeichnung lediglich der Anschaulichkeit halber, es kommt aber in Wahrheit nur auf die funktorielle Charakterisierung an.

Definition. Es sei $j\colon X \to \mathsf{A}_Y{}^n$ ein Y-Morphismus eines Objektes X über Y, gegeben durch n Funktionen $(t_1, \ldots, t_n)$ auf X. Wir sagen, daß j eine *abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ* (bzw. *von endlicher Darstellung*) über Y ist, wenn es beliebig viele (bzw. endlich viele) Polynome F_α in n Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_Y(Y)$ gibt, so daß folgendes gilt:

1⁰. $F_\alpha(p)\,(t_1, \ldots, t_n) = 0$ auf X ($p\colon X \to Y$ Strukturmorphismus).

2⁰. Die Zuordnung

$$q \in X(T)_Y \mapsto \big(t_1(q), \ldots, t_n(q)\big) \in V_Y\big((F_\alpha)\big),$$
$$V_Y\big((F_\alpha)\big) =: \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathsf{A}_Y(T); F_\alpha(r)\,(u_1, \ldots, u_n) = 0\},$$

für jedes $r\colon T \to Y$ in $\mathscr{K}$ ist bijektiv.[1])

Diese Definition ist also weiter nichts als die direkte Verallgemeinerung des Begriffs „affine algebraische Mannigfaltigkeit" und kann als Familie von algebraischen Mannigfaltigkeiten in der betrachteten Kategorie angesehen werden.

Die Eigenschaften „abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ über Y" und „von endlicher Darstellung" sind universell.

Beispiel. Es sei $S = \mathrm{Spec}(\mathsf{C})$ und $\mathscr{K}$ die Kategorie der komplexen Räume. Dann ist $\mathsf{A}_S{}^n$ der komplexe affine Raum, aufgefaßt als komplexe Mannigfaltigkeit, und $\mathsf{A}_Y{}^n$ sein Produkt mit Y. Die abgeschlossenen Einbettungen in $\mathsf{A}_Y{}^n$ sind dann gerade die analytischen Familien von algebraischen Untermannigfaltigkeiten des $\mathsf{A}_S{}^n$, aufgefaßt als komplexe Räume.

Von besonderer Bedeutung sind im weiteren solche Morphismen $p\colon X \to Y$, die lokal von dem oben beschriebenen Typ sind.

Definition. Der Morphismus $p\colon X \to Y$ heißt *von endlichem Typ* (bzw. *von endlicher Darstellung*) in $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U_1 von x Umgebungen U von x, V von $p(x)$ und Funktionen $(t_1, \ldots, t_n)$ auf U gibt, so daß $U \subset p^{-1}(V) \cap U_1$

[1]) $F_\alpha(r)$ bedeutet, daß man die Koeffizienten der F_α durch ihre Bilder auf T ersetzt, r spielt also die Rolle eines Parameters.

und $(t_1, \ldots, t_n)$ eine abgeschlossene Einbettung von U in $\mathsf{A}_V{}^n$ von endlichem Typ (bzw. von endlicher Darstellung) definiert.

Ferner heißt p *lokal von endlichem Typ* (*lokal von endlicher Darstellung*), wenn das in allen Punkten $x \in X$ gilt.

Bemerkung. Enthält $A \subseteq \mathcal{O}_Y(V)$ die Koeffizienten der Polynome F und ist $B = A[T_1, \ldots, T_n] \big/ \sum_\alpha F_\alpha A[T_1, \ldots, T_n]$, $V_0 = \operatorname{Spec}(A)$, $U_0 = \operatorname{Spec}(B)$, so gibt es kanonische Morphismen von geometrischen Räumen $V \to V_0$, $U \to U_0$, so daß

$$\begin{array}{ccc} U & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_0 & \to & V_0 \end{array}$$

ein Faserproduktdiagramm in der Kategorie aller Kofunktoren auf der Kategorie $\mathscr{K}$ ist, d. h., für alle T aus $\mathscr{K}$ ist

$$U(T)_S \to V(T)_S \times_{V_0(T)} U_0(T)$$

bijektiv. $V \to V_0$ und $U \to U_0$ sind gemäß 3.1.1. definiert, und es gilt

$$U(T)_V = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{O}_T(T)^n;\quad F_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = 0\} = U_0(T)_{V_0}.$$

Es ist unmittelbar klar, daß diese Eigenschaften universell sind.

Wir wenden uns jetzt speziellen Morphismen zu, die lokal von endlichem Typ sind; das sind die sogenannten quasiendlichen Morphismen. Zunächst zeigen wir noch folgende einfache Beziehungen:

3.1.2.1. *Es sei $X \to \mathsf{A}_Y{}^n$ eine abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ in der Kategorie aller geometrischen Räume. Dann ist die Faser in y bezüglich $p: X \to Y$ isomorph zur abgeschlossenen Teilmenge von* $\operatorname{Spec}(k(y)\,[T_1, \ldots, T_n])$, *die durch die Polynome* $F_\alpha(y) \in k(y)\,[T_1, \ldots, T_n]$ *definiert wird.*

Beweis. $X \to \mathsf{A}_Y{}^n$ sei durch $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n$ gegeben. Wegen $p(x) = y$ genügt $(t_1(x), \ldots, t_n(x))$ dem Gleichungssystem $F_\alpha(y)\,(T_1, \ldots, T_n) = 0$ und definiert daher ein Primideal

$$P \in V(F_\alpha(y)) \subseteq \operatorname{Spec}(k(y)\,[T_1, \ldots, T_n]).$$

Umgekehrt definiert ein solches Primideal einen Morphismus $\operatorname{Spec}(k(P)) \to X$ ($k(P)$ Restklassenkörper in P) auf Grund des kanonischen Morphismus $\operatorname{Spec}(k(P)) \to \operatorname{Spec}(k(y)) \to Y$ und der Relationen

$$F_\alpha(y)\,(T_1 \bmod P, \ldots, T_n \bmod P) = 0.$$

Das Bild in X ist ein Punkt der Faser in y, und die beiden Zuordnungen sind zueinander invers.

3.1.2.2. *Es sei $X \to \mathsf{A}_Y{}^n$ eine abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ in der Kategorie aller geometrischen Räume, durch $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n$ gegeben. Für jedes $x \in X$ ist dann $\mathcal{O}_{X,x}$ Lokalisierung der von $t_1, \ldots, t_n$ erzeugten Unteralgebra von $\mathcal{O}_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{Y,p(y)}$ $(p: X \to Y)$.*

Beweis. Es sei R die von $t_1, \ldots, t_n$ erzeugte Garbe von Unteralgebren über $p^{-1}\mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_X$ die Garbe auf X, die man aus R durch Inversion aller lokalen Schnitte erhält, die in $\mathcal{O}_X$ umkehrbar sind. Dann ist $X' =: (\underline{X}, \mathcal{O})$ ein geometrischer Raum über Y und $q \in X'(T)_Y$ durch die Bilder der t_i eindeutig bestimmt, also $X \to X'$ (induziert durch die identische Abbildung von $\underline{X}$ und die Inklusion $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_X$) ein Isomorphismus. Also ist $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_x$ Lokalisierung der von $t_1, \ldots, t_n$ über $\mathcal{O}_{Y,y}$ erzeugten Unteralgebra von $\mathcal{O}_{X,x}$, q.e.d.

3.2. Zariskis Hauptsatz — lokale Version

Wir betrachten dieselbe Situation wie oben.

Definition. Ein S-Morphismus $p: X \to Y$ heißt *quasiendlich* in $x \in X$, wenn folgendes gilt:

1°. p ist von endlichem Typ in x.
2°. x ist isoliert in $p^{-1}(p(x))$.

Der Hauptsatz von Zariski macht Aussagen über die Struktur von Morphismen in Punkten, in denen der Morphismus quasiendlich ist.

3.2.1. Satz (affine Form von Zariskis Hauptsatz). *Sind A, B Ringe, $B = A[t_1, \ldots, t_n]$ endlich erzeugt über A, so ist die Menge U aller $P \in \operatorname{Spec}(B)$, die isoliert in ihrer Faser bezüglich der Abbildung $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ sind, offen (eventuell leer). Ferner enthält B eine ganze A-Algebra B_0, so daß der Morphismus $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(B_0)$ auf U eine offene Einbettung induziert.*

Zum Beweis kann man A durch seine ganze Abschließung in B ersetzen, und es genügt dann zu zeigen, daß U offen ist und $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ eine offene Einbettung auf U induziert.

3.2.1.1. Hilfssatz. *Ist A ein in B ganz abgeschlossener Ring und $x \in B$, dann wird der Kern I des A-Homomorphismus $A[X] \to B$, der X in x überführt, durch lineare Polynome erzeugt.*

Dieser Hilfssatz wurde bereits in Kapitel 1 bewiesen (vgl. 1.2.7.).

Beweis des Satzes.

Fall 1. $B = A[t_1]$.

Ist $P \in \operatorname{Spec}(B)$ isoliert in seiner Faser, dann ist der Kern von $A[T] \to B$, $T \mapsto t_1$ nicht in P enthalten (sonst wäre $B/(P \cap A)\,B \simeq (A/P)[T]$. Also gibt es Relationen $at_1 = b$, $a, b \in A$ und $a \notin P$ oder $b \notin P$. Ist $b \notin P$, so ist $PB_b = B_b$, also $a \in P$. Folglich gibt es stets Relationen $at_1 = b$, $a \in A$, $a \notin P$. Dann ist $B_a = A_a$, q.e.d. für Fall 1.

Fall 2: B ganz über $A[t_1]$.

Es sei $F(B|A)$ die Menge aller $P \in \operatorname{Spec}(B)$, die *nicht* isoliert in ihrer Faser sind, $F_1(B|A)$ das Komplement in $\operatorname{Spec}(B)$ der Menge aller $P \in \operatorname{Spec}(B)$, so daß B_P Lokalisierung einer ganzen A-Algebra $B_0 \subseteq B$ ist. $F_1(B|A)$ ist abgeschlossen in

$\mathrm{Spec}(B)$, und ist A in B ganz abgeschlossen, so ist $\mathrm{Spec}(B) - F_1(B|A) \to \mathrm{Spec}(A)$ eine offene Einbettung. Denn ist $P \notin F_1(B|A)$, so ist $B_P = B_{0(P \cap B_0)}$ und B_0 o.B.d.A. endlich über A (da B endlich erzeugt über A ist). Dann gibt es ein $f \in B_0 - P$, so daß $B \subseteq (B_0)_f$, also $B_f = (B_0)_f$ ist.

Für F und F_1 gilt:

(1) $F(B|A) \subseteq F_1(B|A)$.
(2) Ist $A \subseteq A_1 \subseteq B$, so ist $F(B|A) \supseteq F(B|A_1)$ und $F_1(B|A) \supseteq F_1(B|A_1)$.
(3) $F(B_S|A_S) = F(B|A) \cap \mathrm{Spec}(B_S)$, $\quad F_1(B_S|A_S) = F_1(B|A) \cap \mathrm{Spec}(B_S)$ für multiplikativ abgeschlossene Teilmengen $S \subseteq A$.
(4) Ist $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist $F(B/IB|A) = F(B|A) \cap V(IB)$.

Wir müssen zeigen, daß $F_1(B|A) \subseteq F(B|A)$ ist.

3.2.1.2. Hilfssatz. *Es sei B ganz über $A[t_1]$. Ist $P \in F(B|A)$, so ist $V(P) \subseteq F(B|A)$.*

Beweis. Wegen (4) kann man annehmen, daß $P \cap A = 0$ ist (B durch $B/(P \cap A)B$ und A durch $A/P \cap A$ ersetzen). Außerdem kann man B durch B/P_0 ersetzen, wobei P_0 ein in P enthaltenes minimales Primideal von B ist, das über $P \cap A$ liegt. A und B seien also Integritätsbereiche, $A \subseteq B$ und $P \cap A = 0$. Wir zeigen, daß dann $F(B|A) = \mathrm{Spec}(B)$ ist.

Ist K der Quotientenkörper von A, so ist $K \subseteq K[t_1] \subseteq K \otimes_A B$ und $K[t_1] \subseteq K \otimes_A B$ eine ganze Erweiterung. Da das Bild von P in $K \otimes_A B$ (nach (3)) kein isolierter Punkt von $\mathrm{Spec}(K \otimes_A B)$ ist, ist t_1 transzendent über A. Dann ist aber für jedes $P_0 \in \mathrm{Spec}(A)$

$$k(P_0) \subseteq k(P_0) \otimes_A A[t_1] \subseteq k(P_0) \otimes_A B,$$

also jede Komponente der Faser von P_0 eindimensional, q.e.d.

3.2.1.3. Hilfssatz. *Ist B ganz über $A[t_1]$ und P minimal in $F_1(B|A)$ (bezüglich der Inklusionsrelation) und $P_0 = P \cap A$, so ist $(B/P) \otimes_A k(P_0)$ transzendent über $k(P_0)$.*

Beweis. Wegen (3) kann man A durch A_{P_0} ersetzen; also sei A ein lokaler Ring, P_0 sein Maximalideal. Ferner sei o.B.d.A. der Ring A ganz abgeschlossen in B. Wäre $(B/P) \otimes_A k(P_0)$ algebraisch über $k(P_0)$, so gäbe es ein normiertes Polynom $f(X) \in A[X]$, so daß

$$y =: f(t_1) \in P$$

gilt. Dann ist B endlich über $A[y]$ (da t_1 ganz über $A[y]$ und B ganz und endlich erzeugt über $A[t_1]$ ist). Da P minimal in $F_1(B|A)$ ist, gibt es zu jedem Primideal $Q_\alpha \subsetneqq P$ ein Element $f(\alpha) \in A$, $f(\alpha) \notin Q_\alpha$, so daß $B_{f(\alpha)} = A[y]_{f(\alpha)} = A_{f(\alpha)}$ ist. Da B endlich über $A[y]$ ist, kann man $f(\alpha)$ so wählen, daß $f(\alpha)B \subseteq A[y]$ ist ($f(\alpha)$ durch geeignete Potenz von sich selbst ersetzen!). Ist $I =: \{b \in B, bB \subseteq A[y]\}$, dann ist also I ein Ideal in B, das in keinem Primideal $Q \subsetneqq P$ enthalten ist. Aus $I \not\subseteq P$ würde

$$B_P = A[y]_{(P \cap A[y])}$$

folgen, also $P \notin F_1(B|A)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist P ein minimales Primideal über I. Da $y \in P$ ist, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $(I : y^n) \not\subseteq P$ ist (da $y^n \in IB_P$ für $n \gg 0$ und $(I : y^n)B_P = IB_P : y^n$ gilt). Also ist $I \subsetneqq I : y$ und daher $I : y \not\subseteq A[y]$. Für $z \in I : y$, $z \notin A[y]$ ist dann $zy \in A[y]$.

Man kann sogar annehmen, daß $zy \in A$ ist. Hat dann zy die Darstellung

$$zy = a_0 + a_1 y + \cdots + a_k y^k, \qquad a_0, \ldots, a_k \in A,$$

so ersetze man z durch $z - (a_1 + a_2 y + \cdots + a_k y^{k-1})$.

Indem man eventuell noch eine Einheit aus A zu z addiert, kann man stets erreichen, daß $z \notin P$ ist. Es gilt also:

1°. B ist endlich erzeugt über A, und A ist ganz abgeschlossen in B.
2°. Es gibt Elemente $y, z \in B$, so daß $yz \in A$, $z \notin P$ und ganz über $A[y]$ ist.
3°. $F_1(B|A[y]) = \emptyset$.

Hieraus folgt $z \in A\left[y, \frac{1}{z}\right] \subseteq B_z$ (da z ganz über $A[y]$ ist) und

$$A\left[y, \frac{1}{z}\right] = A\left[yz, \frac{1}{z}\right] = A\left[\frac{1}{z}\right].$$

Also ist $z \in A\left[\frac{1}{z}\right]$, und hieraus folgt, daß z A-ganz, also aus A ist. Ebenso ist $\frac{1}{z} \in A$, da $z \notin P_0$ gilt. Dann gilt aber $y = \frac{1}{z}(zy) \in A$ und somit $A[y] = A$, $F_1(B|A) = \emptyset$ im Widerspruch zu $P \in F_1(B|A)$, q.e.d. für den Hilfssatz.

Hieraus folgt, daß jedes minimale Primideal aus $F_1(B|A)$ auch aus $F(B|A)$ ist. Da $F_1(B|A)$ abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(B)$ ist, folgt daher aus 3.2.1.2. $F_1(B|A) \subseteq F(B|A)$, q.e.d. für Fall 2.

Allgemeiner Fall (Induktion nach n)

Ist $P \notin F(B|A)$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung und nach (2) eine ganze Erweiterung $B_1 \subseteq B$ von $A[t_1]$, so daß $B_P = B_{1(P \cap B_1)}$ ist. Da B endlich erzeugt über A ist, kann man B_1 endlich über A wählen. Dann ist $P_1 = P \cap B_1 \notin F(B_1|A)$, also nach Fall 2 $P_1 \notin F_1(B_1|A)$ und daher wegen $B_P = (B_1)_{P_1}$ auch $P \notin F_1(B|A)$, q.e.d.

3.3. Lokale Form des Hauptsatzes von Zariski

Wir nennen einen Morphismus $p : X \to Y$ geometrischer Räume *endlich*, wenn zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung Y_0 existiert und eine abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ $X_0 \to \mathbb{A}^n \times Y_0$ (definiert durch Funktionen $t_1, \ldots, t_n$ auf X_0; $X_0 =: p^{-1}(Y_0)$), so daß jedes t_i einem normierten Polynom mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_Y(Y_0)$ genügt. Der Morphismus p heißt *lokal endlich*, wenn p lokal Komposition einer offenen Einbettung mit einem endlichen Morphismus ist, d. h., wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U_1 von x eine Umgebung $U \subseteq U_1$ von x, eine Umgebung V von $p(x)$ in Y mit $p(U) \subseteq V$ und Funktionen $z_0, z_1, \ldots, z_n$ auf U gibt, die ganz über $\mathcal{O}_Y(V)$ sind, und so daß $z_0 \neq 0$ auf U und $\left(\frac{1}{z_0}, z_0, z_1, \ldots, z_n\right) = \varphi$ eine abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ $U \to \mathbb{A}_V^{n+2}$ definiert.

Die lokale Form von ZARISKIS Hauptsatz für beliebige geometrische Räume ist der folgende Satz:

3.3.1. Satz. *Ist $p: X \to Y$ ein Morphismus geometrischer Räume, dann gilt:*

1°. *Die Menge X_0 der Punkte $x \in X$, in denen p quasiendlich ist, ist offen in X.*

2°. *$p|X_0$ ist lokal endlich.*

Beweis. Zum Beweis kann man annehmen, daß $X = U_1$ und $X \to Y$ über eine abgeschlossene Einbettung $X \to \mathsf{A}_Y{}^n$ von endlichem Typ faktorisiert werden kann. Dann gibt es affine Schemata X_0, Y_0 und ein Faserproduktdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \xrightarrow{p_0} & Y_0 \end{array}$$

$(X_0 = \operatorname{Spec}(B),\ Y_0 = \operatorname{Spec}(A))$, so daß $X_0 \to Y_0$ von endlichem Typ ist. Dann ist p_0 in $q(x)$ quasiendlich, und aus der affinen Form von ZARISKIS Hauptsatz folgt unmittelbar die Existenz von Funktionen $z_1, \ldots, z_m$ auf X_0, die ganz über A sind, und eines $f \in A[z_1, \ldots, z_n]$, so daß $f(q(x)) \neq 0$ und $B_f = A[z_1, \ldots, z_n]_f$ ist. Hieraus folgt die Behauptung 2° (mit $z_0 = f$). [Ebenso folgt die Behauptung 1°.) q.e.d.

Man erhält sofort das folgende Korollar:

3.3.2. Korollar. *Ist für alle $x \in X_0$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$ ganz abgeschlossen in $\mathcal{O}_{X,x}$, so ist $p|X_0$ eine offene Einbettung $X_0 \to Y$.*

(Das trifft z. B. zu auf birationale Morphismen normaler algebraischer Varietäten und ist die ursprüngliche Form von ZARISKIS Hauptsatz.)

Bemerkung. *Ist $p: X \to Y$ quasiendlich und außerdem von endlicher Darstellung in $x \in X$, so kann man U, V, $z_a, \ldots, z_m$ so wählen, daß $U_{z_0} \to \mathsf{A}_V{}^{m+1}$ eine abgeschlossene Einbettung von endlicher Darstellung ist.* (Das folgt unmittelbar aus dem Beweis von 3.3.1.)

3.4. Beispiele und Anwendungen

Vor allem werden wir Anwendungen auf Henselsche Ringe geben. Als Spezialfall erhält man unter anderem die allgemeine Form eines Henselschen Lemmas. Weiterhin wird der Weierstraßsche Vorbereitungssatz für algebraische Potenzreihen und daraus der Satz über implizite Funktionen für algebraische Potenzreihen hergeleitet. Alle diese Sätze beruhen auf dem folgenden Resultat, das man als Verallgemeinerung der Eigenschaft Henselscher Ringe, idempotente Elemente auf dem Urbild von V in einer ganzen Erweiterung B von A zu idempotenten Elementen in B fortzusetzen, betrachten kann: Anstelle einer A-Algebra B genügt es, ein A-Schema X zu betrachten, und anstelle der Bedingung „B ganz über A" genügt es, daß eine Zusammenhangskomponente von $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} V$ ganz über V ist.

3.4.1. Satz. *Es sei A in V Henselsch, X ein quasikompaktes, separiertes A-Schema und W das volle Urbild von V in X. Gibt es ein offenes Unterschema $V' \subset W$ mit den Eigenschaften:*

1°. *$X|A$ ist von endlichem Typ in allen Punkten von V',*

2°. *$V' \to V$ ist ein ganzer Morphismus,*

so gibt es ein (eindeutig bestimmtes) offenes Unterschema X' von X mit folgenden Eigenschaften:

a) *$X' \cap W = V'$.*

b) *X' ist ganz über A.*

Dieses X' ist dann außerdem abgeschlossen in X.

Beweis. $X \to \operatorname{Spec}(A)$ ist in allen Punkten von V' quasiendlich, da die Eigenschaften „von endlichem Typ" und „$V' \to V$ ganz" die Eigenschaft „quasiendlich" implizieren. Ist X affin über A, so ersetze man A durch die ganze Abschließung von A in $B =: \mathcal{O}_X(X)$, so daß man also A in B als ganz abgeschlossen voraussetzen kann. Da X über A in allen Punkten von V' quasiendlich ist, kann man B durch einen über A endlich erzeugten Unterring B_0 ersetzen, so daß $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(B_0)$ in einer Umgebung von V' eine offene Einbettung ist. Nach der affinen Version von ZARISKIS Hauptsatz ist dann $\operatorname{Spec}(B_0) \to \operatorname{Spec}(A)$ und damit $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ eine offene Einbettung in einer Umgebung von V'. Insbesondere ist $V' \to V$ eine offene Einbettung und andererseits nach Voraussetzung ganz, also abgeschlossen. Also zerfällt V in disjunkte offene Teilmengen V', $V'' = V - V'$, und da A Henselsch ist, zerfällt $\operatorname{Spec}(A)$ entsprechend in $\operatorname{Spec}(A')$ und $\operatorname{Spec}(A'')$. Wir zeigen, daß dann

$$X_0' =: (X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A')) \to \operatorname{Spec}(A')$$

einen Schnitt besitzt; daraus folgt die Behauptung des Satzes für den affinen Fall.

Wegen $X_0' \times_{\operatorname{Spec}(A)} V = X \times_{\operatorname{Spec}(A)} V' = V'$ und da A' ganz abgeschlossen in $\mathcal{O}_{X'}(X')$ ist und V' alle abgeschlossenen Punkte enthält, ist nach dem Hauptsatz von ZARISKI $X_0' \to \operatorname{Spec}(A')$, eingeschränkt auf die offene Menge X' der über A' quasiendlichen Punkte, ein Isomorphismus $X' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(A')$, der inverse Isomorphismus liefert einen Schnitt $\operatorname{Spec}(A') \to X_0'$. Im Fall, daß X nicht affin ist, betrachte man zunächst $X \xrightarrow{p} \operatorname{Spec}(B)$, $B =: \mathcal{O}_X(X)$. Ist dann X quasiendlich in $x \in X$ über A, so auch über B.

Da $B^h_{p(x)}$ flach über B ist, gilt weiterhin, wenn wir mit X_x das $B_{p(x)}$-Schema $X \times_{\operatorname{Spec}(B)} \operatorname{Spec}(B^h_{p(x)})$ bezeichnen,

$$\Gamma(X_x, \mathcal{O}_{X_x}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_B B^h_{p(x)} = B^h_{p(x)}$$

($B^h_{p(x)}$ Henselsche Abschließung im abgeschlossenen Punkt). Es genügt zu zeigen, daß $X_x \to \operatorname{Spec}(B^h_{p(x)})$ ein Isomorphismus ist, weil daraus $\mathcal{O}_{X,x} \simeq B_{p(x)}$ folgt und nach ZARISKIS Hauptsatz $X \to \operatorname{Spec}(B)$ auf der Menge der quasiendlichen Punkte eine offene Einbettung ist.

Zum Beweis von **3.4.1.** kann man dann X durch $\operatorname{Spec}(B)$ ersetzen. Es genügt also, noch zu zeigen:

3.4.2. Satz. *Ist A ein lokaler Henselscher Ring, X ein A-Schema, so daß*

a) *$\mathcal{O}_X(X) \simeq A$ ist,*

b) *die spezielle Faser aus nur einem Punkt x besteht,*
c) *X in x quasiendlich über A ist,*
dann ist $X \simeq \operatorname{Spec}(A)$.

Beweis. Wegen b) und c) gibt es eine affine Umgebung U von x, eine endliche A-Algebra A' und eine offene Einbettung $U \to \operatorname{Spec}(A')$, so daß $U \to \operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$ gleich dem Strukturmorphismus $U \to \operatorname{Spec}(A)$ ist. A ist Henselsch, also ist A' direktes Produkt endlich vieler lokaler Ringe, und man kann ohne Einschränkung annehmen, daß A' lokaler Ring ist. Dann ist $U \to \operatorname{Spec}(A')$ offen und daher surjektiv (da x über dem speziellen Punkt von $\operatorname{Spec}(A')$ liegt), also $U \simeq \operatorname{Spec}(A')$, also $U \to \operatorname{Spec}(A)$ endlich.

Der Graph $U \to (U \times_{\operatorname{Spec}(A)} X)$ von $U \to X$ ist eine abgeschlossene Einbettung, die Projektion $U \times_{\operatorname{Spec}(A)} X \to X$ ist endlich, also ist $U \to X$ auch abgeschlossen und daher

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(X - U) \simeq A$$

nach a). Hieraus folgt $X - U = \emptyset$, $U \simeq \operatorname{Spec}(A)$, da der lokale Ring A außer 0 und 1 keine weiteren idempotenten Elemente enthält, q.e.d.

Das folgende Korollar zu 3.4.1. wird Henselsches Lemma genannt (für den lokalen Fall vgl. M. Nagata [39]).

3.4.3. Korollar (Henselsches Lemma). *Sind F, G, H Polynome aus $A[T]$, so daß*

$$F \equiv GH \bmod (JA[T]),$$

$$GA[T] + HA[T] + JA[T] = A[T]$$

gilt, G normiert, und ist A in $V = V(J)$ Henselsch, so gibt es Polynome

$$G_1 = G \bmod (JA[T]), \qquad H_1 = H \bmod (JA[T]),$$

G_1 normiert und $F = G_1H_1$.

Beweis. Man kann annehmen, daß A nullteilerfrei und Noethersch ist, indem man die Koeffizienten der Polynome F, G, H und die in die Voraussetzung eingehenden endlich vielen Größen durch Unbestimmte ersetzt und zur Henselschen Abschließung des Polynomringes in diesen Unbestimmten über $\mathbb{Z}$ (in einer geeigneten abgeschlossenen Menge) übergeht.

Da $X = \operatorname{Spec}(A[T]/FA[T])$ und $V' = \operatorname{Spec}(A[T]/(JA[T] + GA[T]))$ den Voraussetzungen von 3.4.1. genügen, ist $X = X' \coprod X''$, $X' = \operatorname{Spec}(A[t'])$, $X'' = \operatorname{Spec}(A[t''])$, so daß t' ganz über A,

$$A[t'] \times A[t''] \simeq A[T]/FA[T]$$

und

$$A[t']/JA[t'] \simeq A[T]/(JA[T] + GA[T])$$

ist. Nach dem Lemma von Nakayama folgt aus der letzten Isomorphie, daß t' einer normierten Gleichung $G_1 \equiv G \bmod (JA[T])$ genügt. Ist P ein Maximalideal, so ist in $k(P)$

$$\bar{F} = \bar{G}\bar{H} \quad \text{und} \quad \bar{G}k(P)[T] + \bar{H}k(P)[T] = k(P)[T],$$

also ist $\bar{H} \neq 0$ (falls G nicht konstant ist), also $\bar{F} \neq 0$. Daher bleibt die Folge

$$0 \to A[T] \xrightarrow{F} A[T] \to A[T]/FA[T] \to 0$$

exakt in allen $k(P)$, und hieraus folgt, daß $A[T]/FA[T]$ und damit $A[t']$ A-flach ist. Dann ist $A[t']$ projektiv von konstantem Rang $m = \deg G$, und somit erzeugt G_1 alle Relationen für t'. Ist $F = G_1H_1 + R$ in $A[T]$ mit $\deg(R) < \deg(G_1)$, so folgt aus $R(t') = F(t') = 0$, daß $R = 0$, also $F = G_1H_1$ und $H_1 = H \bmod JA[T]$ ist, q.e.d.

3.4.4. Korollar (Weierstraßscher Vorbereitungssatz für algebraische Potenzreihen). *Es sei A ein in $V = V(J)$ Henselscher Ring, $f \in A\langle T\rangle$ eine algebraische Potenzreihe und*

$$f \equiv aT^{n+1} \bmod (JA\langle T\rangle + T^{n+2}A\langle T\rangle)$$

mit einer Einheit $a \in A$. Dann ist $A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle$ freier Modul vom Rang $n+1$ über A mit den Erzeugenden $1, T, T^2, \dots, T^n \bmod f$.

Beweis. Es gibt eine $A[T]$-Algebra B von endlichem Typ, so daß $A\langle T\rangle$ auch Henselsche Abschließung von B in $JB + T^{n+2}B$ ist, $f \in B$ mit der Eigenschaft $f \equiv aT^{n+1} \bmod (JB + T^{n+2}B)$ (vgl. 2.7.1.). Ist $\bar{B} = B/fB$, dann folgt daraus

$$\bar{B}/J\bar{B} + T^{n+2}\bar{B} = (A/JA)[T]/(T^{n+1}).$$

Nach Satz 3.4.1. folgt dann, daß man B so wählen kann, daß $\bar{B}$ ganz über A ist. Da $A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle$ die Henselsche Abschließung von $\bar{B}$ und $\bar{B}$ (als ganze A-Algebra) selbst schon Henselsch ist, gilt somit:

$$A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle = \bar{B}$$

ist endlich über A, erzeugt durch $1, T, T^2, \dots, T^n \bmod f$ (Lemma von Nakayama).

Genau wie beim Beweis des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes im analytischen Fall (vgl. 2.1.2.) folgt, daß $A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle$ flach über A ist, und durch Lokalisierung $A_p{}^h$ in Maximalidealen $P \in V$ findet man, daß $A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle$ konstanten Rang $n+1$ hat, also frei vom Rang $n+1$ ist, q.e.d.

Wir können nun den Satz über implizite Funktionen für algebraische Potenzreihen in der Form von Kapitel 1 beweisen:

Es seien $f_1, \dots, f_n \in A\langle T_1, \dots, T_n\rangle$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ so, daß A in V Henselsch ist und $V(t_1, \dots, t_n) \supseteq V$ gilt. Wir wollen zeigen: Ist $f_i(t_1, \dots, t_n) \equiv 0$ auf V und $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\right)$ umkehrbar, so besitzt $f_1 = \dots = f_n = 0$ eine Lösung in A, die auf V mit t übereinstimmt.

Durch eine lineare Koordinatentransformation $T_i = t_i + \sum_j a_{ij}T_j'$ mit der zu $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\right)$ inversen Matrix kann man

$$t_i = 0, \qquad f_i = a_i + T_i + g_i \qquad (i = 1, \dots, n)$$

mit $V(a_i) \supseteq V$ und Potenzreihen g_i der Ordnung $\geqq 2$ voraussetzen. Aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz in der obigen Form folgt dann

$$A\langle T_1, \dots, T_n\rangle/f_1A\langle T_1, \dots, T_n\rangle + \dots + f_nA\langle T_1, \dots, T_n\rangle \simeq A.$$

Die Bilder der T_i in A sind dann die Lösungen des Gleichungssystems, q.e.d.

Eine weitere wichtige Anwendung, die im Kapitel 5 benötigt wird, ist:

3.4.5. Satz. *Es sei B ein in $V(J)$ Henselscher Ring, C eine B-Algebra von endlichem Typ, B' Henselsche Abschließung von C in $V(I)$, $I = JB' \cap C$. Ist $B/JB \to B'/JB'$ surjektiv, so ist $B \to B'$ surjektiv.*

Beweis. Ist $S = 1 + I \subseteq C$, dann ist B' treuflach über C_S, also $JB' \cap C_S = JC_S$ und $B'/JB' \simeq C_S/JC_S = C/I$. Dann ist $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(B)$ in allen Punkten von $V(I)$ quasiendlich. Ist $C' \subseteq C$ die ganze Abschließung von B in C, so ist also $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(C')$ in einer Umgebung von $V(I)$ eine offene Einbettung, und in dieser Umgebung wird I durch J erzeugt. Hieraus folgt, daß $V(I) \to V(JC')$ eine offene Einbettung ist. Außerdem ist $B/JB \to C'/JC' \to C/I$ surjektiv, also $V(I) \to V(JC')$ auch abgeschlossen, also $V(I)$ Komponente von $V(JC')$. Da C' in $V(JC')$ Henselsch ist, folgt aus 3.4.1. $C' = C_1' \times C_2'$, C_1' ist die $V(I)$ entsprechende Komponente, $C_S = C_1'$ und daher $B' = C_1' = C_f$ für ein geeignetes $f \in S$. Also ist B' endlich über B, und da $B/JB \to B'/JB'$ surjektiv ist, ist auch $B \to B'$ surjektiv, q.e.d.

3.5. Elemente der Differentialrechnung

3.5.1. Derivationen

Definition. Es sei B eine A-Algebra und M ein B-Modul. Eine Abbildung $D : B \to M$ heißt eine *A-Derivation* von B mit Werten in M, wenn D A-linear ist und für alle $f, g \in B$

$$D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

gilt.

Beispiel 1. $B = A[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist jede A-Derivation von der Form

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial X_n}, \qquad f_i = D(X_i) \in M \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

und jeder solche Ausdruck mit $f_i \in M$ definiert eine Derivation.

Beweis. Jedes Polynom f ist eindeutig A-Linearkombination von Monomen, und es genügt, die Behauptung für Monome nachzuweisen.

Beispiel 2. $B = A\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$. In diesem Fall gilt ein völlig analoges Resultat (vgl. 2.10.1.).

Beispiel 3. B eine freie analytische Algebra über einem reell bewerteten Körper $k : B = k\{X_1, \ldots, X_n\}$, M ein endlich erzeugter B-Modul. Dann besitzt jede k-Derivation ebenfalls eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial X_n}, \qquad f_i = D(X_i) \in M \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Jeder solche Ausdruck definiert eine Derivation, und ist umgekehrt D gegeben, $D' = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) \frac{\partial}{\partial X_i}$ und $D'' = D - D'$, so ist $D''(X_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, und es genügt daher, zu zeigen: Gilt für eine k-Derivation $D : B \to M$

$$D(X_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so ist $D = 0$.

Das folgt unmittelbar aus $D(\mathfrak{m}^{n+1}) \subseteq \mathfrak{m}^n M$ ($\mathfrak{m}$ Maximalideal von B).

Beispiel 4. Analog Beispiel 2 für $B = A[[X_1, \ldots, X_n]]$ und Noethersche B-Moduln M.

Beispiel 5. $A = \mathsf{R}$, B Algebra der reellen C^∞-Funktionen auf einer offenen konvexen Teilmenge $U \subseteq \mathsf{R}^n$, M ein freier B-Modul von endlichem Typ. Dann läßt sich jede R-Derivation eindeutig in der Form

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

($x_1, \ldots, x_n$ Koordinaten des R^n, $f_i \in M$) darstellen, und jeder solche Ausdruck ist eine Derivation. Die Derivationen entsprechen also umkehrbar eindeutig den Vektorfeldern auf U.

Beweis. Jeder solche Ausdruck ist eine Derivation, und es genügt wieder zu zeigen: Ist $D(x_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $D(f) = 0$ für alle $f \in B$. Dazu genügt zu zeigen, daß $D(f)(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in U$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$ und $f(0) = 0$. Es sei

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt;$$

das sind C^∞-Funktionen auf U, und $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$. Dann ist

$$D(f)(0) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)(0)\, g_i(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i(0) D(g_i)(0) = 0,$$

q.e.d.

Beispiel 6. $A = \mathsf{R}$, $B = C^\infty_{\mathsf{R}^n,0}$ Algebra der Keime reeller C^∞-Funktionen im Nullpunkt. Dann ist analog jede Derivation von B mit Werten in R (als B-Algebra durch $f \mapsto f(0)$ aufgefaßt) eindeutig von der Form

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0), \qquad c_i \in \mathsf{R} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(also entsprechen die Derivationen in diesem Fall umkehrbar eindeutig den Ortsvektoren in 0).

Beispiel 7. Es sei $\alpha : B \to C$ ein Homomorphismus von A-Algebren, I ein Ideal in C mit $I^2 = 0$. Dann entsprechen die A-Algebrahomomorphismen $\beta : B \to C$, die modulo I mit α übereinstimmen, umkehrbar eindeutig den A-Derivationen $D : B \to I$ (I als B-Modul vermöge der Abbildung α aufgefaßt). Die Zuordnung ist $\beta \mapsto D = \beta - \alpha$ und $D \mapsto \beta = \alpha + D$.

Beispiel 8. Es sei B eine lokale k-Algebra mit dem Restklassenkörper k. Die k-Derivationen $D : B \to k$ entsprechen umkehrbar eindeutig den k-Algebrahomomorphismen $u : B \to k[t]/(t^2)k[t]$, indem man jedem D den Homomorphismus $u : B \to k[t]/(t^2)\,k[t]$, $u(a) = \bar{a} + D(a)\,t$ ($\bar{a}$ Restklasse von a in k) zuordnet. Andererseits entsprechen diese Algebrahomomorphismen umkehrbar eindeutig den k-Linearformen $u : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ (durch $u(a) = D(a)$, $a \in \mathfrak{m}$). (Spezialfall von Beispiel 7: $C = k[t]/(t^2)k[t]$, $I = (t)C$, $\alpha : B \to C$ Restklassenabbildung.) Hieraus folgt erneut die Behauptung von Beispiel 6.

Beispiel 9. Es sei K ein endlich erzeugter Körper über einem Grundkörper der Charakteristik p. Jede k-Derivation von K ist auch eine kK^p-Derivation. Ist $b_1, \ldots, b_n$ eine p-Basis von K über k, d. h. $K = kK^p(b_1, \ldots, b_n)$ und $[K : kK^p] = p^n$, so läßt sich jede k-Derivation eindeutig in der Form

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial b_i}$$

schreiben (mit $f_i = D(b_i)$), und jeder solche Ausdruck definiert eine Derivation. Insbesondere gilt also $K = kK^p$ genau dann, wenn es außer 0 keine k-Derivation von K gibt. Das ist ferner gleichbedeutend damit, daß K separabel über k ist.

3.5.2. Universelle Derivation

Das Studium von Derivationen kann in folgendem Sinne linearisiert werden: Man zeigt die Existenz einer universellen A-Derivation $d : B \to \Omega_{B|A}$ mit Werten in einem B-Modul $\Omega_{B|A}$, so daß jede A-Derivation mit Werten in einem B-Modul M Komposition von d mit einer B-linearen Abbildung $\Omega_{B|A} \to M$ ist. Es genügt dann, die universelle Derivation bzw. den universellen Differentialmodul $\Omega_{B|A}$ und die linearen Abbildungen $\Omega_{B|A} \to M$ zu studieren.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}_{B|A}(M)$ den B-Modul der A-Derivationen von B mit Werten in M. Dieser Modul hängt funktoriell von M ab, und die Existenz eines universellen Differentialmoduls bedeutet die Darstellbarkeit des Funktors $M \mapsto \mathrm{Der}_{B|A}(M)$.

Die Existenz ist leicht nachzuweisen. Wir bilden den von der B zugrunde liegenden Menge B, deren Elemente wir der Deutlichkeit halber mit $\underline{f}$ bezeichnen, erzeugten freien B-Modul und bezeichnen mit $\Omega_{B|A}$ den bezüglich der Relationen

(1) $\quad \underline{f_1} + \underline{f_2} = \underline{f_1 + f_2}, \qquad f_1, f_2 \in B,$

(2) $\quad a\underline{f} = \underline{af}, \qquad a \in A, \qquad f \in B,$

(3) $\quad \underline{f_1 f_2} = f_1\underline{f_2} + f_2\underline{f_1}, \qquad f_1, f_2 \in B,$

gebildeten Restklassenmodul. Die Restklasse von $\underline{f}$ in $\Omega_{B|A}$ bezeichnen wir mit df. Dann ist $\Omega_{B|A}$ ein B-Modul und $d : B \to \Omega_{B|A}$, $f \mapsto df$, eine A-Derivation (wegen (1), (2), (3)). Da für jede A-Derivation $D : B \to M$ die entsprechenden Relationen (1), (2), (3) erfüllt sind und da $\Omega_{B|A}$ von den Differentialen df, $f \in B$, erzeugt wird, läßt sich D eindeutig zu einer Abbildung $h_D : \Omega_{B|A} \to M$ liften, so daß $h_D \circ d = D$ gilt. Die Abbildung h_D ist außerdem B-linear, da $h_D(gdf)$ nach Definition gleich $gD(f) = gh_D(df)$ ist. Also ist $D \mapsto h_D$ ein Isomorphismus $\mathrm{Der}_{B|A}(M) \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M)$ mit der inversen Abbildung $u \mapsto u \circ d$.

Aus den Beispielen 1, 2 und 9 folgt unmittelbar, daß für die dort betrachteten Fälle der Differentialmodul $\Omega_{B|A}$ frei ist mit der Basis $dX_1, \ldots, dX_n$ (bzw. $db_1, \ldots, db_n$ in Beispiel 8).

Für Beispiel 3, 4 und 5 folgt das nicht, da dort nur Derivationen in spezielle Moduln betrachtet wurden. Da die Betrachtung dieser Moduln jedoch sinnvoll erscheint, erhebt sich folgende Frage:

Es sei $\mathscr{K}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie der B-Moduln. Ist dann der Funktor $M \mapsto \mathrm{Der}_{B|A}(M)$ $(M \in \mathscr{K})$ in $\mathscr{K}$ darstellbar? Wenn ja, so bezeichnen wir den darstellenden Modul ebenfalls mit $\Omega_{B|A}$ und mit d die darstellende Derivation $d : B \to \Omega_{B|A}$, wobei stillschweigend immer der aus dem Zusammenhang hervorgehende relative Fall, d. h. die Kategorie $\mathscr{K}$, zugrunde gelegt wird. In diesem Sinne ist $\Omega_{B|A}$ auch in den Beispielen 3, 4 und 5 ein freier B-Modul, erzeugt durch $dX_1, \ldots, dX_n$, wobei $\mathscr{K}$ die Kategorie der Noetherschen B-Moduln bzw. der endlich erzeugten freien B-Moduln (Beispiel 5) ist. Man sieht unmittelbar, daß dieser Modul auch dann noch universeller Differentialmodul ist, wenn man $\mathscr{K}$ durch die folgenden größeren Kategorien ersetzt: in den Beispielen 3 und 4 durch die Kategorien der bezüglich der $(X_1, \ldots, X_n)$-adischen Topologie separierten Moduln, im Beispiel 5 durch die Kategorie der B-torsionslosen Moduln (das sind solche, für die die kanonische Abbildung $M \to M^{**} =$ Bidual von M injektiv ist).

Ist $\Omega_{B|A}$ universeller Differentialmodul bezüglich einer Kategorie $\mathscr{K}$ von B-Moduln, so wollen wir einen B-Modul M zulässig für $\Omega_{B|A}$ nennen, wenn die kanonische Abbildung $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \to \mathrm{Der}_{B|A}(M)$, $u \mapsto u \circ d$ ein Isomorphismus ist.

Die volle Unterkategorie aller bezüglich $\Omega_{B|A}$ zulässigen Moduln ist also die größte Erweiterungskategorie von $\mathscr{K}$, in der $(\Omega_{B|A}, d)$ den Funktor $\mathrm{Der}_{B|A}(-)$ darstellt. Wenn jeder Untermodul eines zulässigen Moduls wieder zulässig ist, was im folgenden immer vorausgesetzt wird, dann wird auch im relativen Fall $\Omega_{B|A}$ von allen df, $f \in B$, erzeugt.

3.5.3. Eigenschaften von $\Omega_{B|A}$

a) Funktorialität. *Ist*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] & B' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "\alpha"] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Ringen, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega_{B|A} \arrow[r, "\bar{\beta}"] & \Omega_{B'|A'} \\ B \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\beta"] & B' \arrow[u, "d"] \end{tikzcd}$$

so daß $\bar{\beta}$ B-linear ist.

Beweis. Durch $f \mapsto d\beta(f)$ wird eine A-Derivation $B \to \Omega_{B'|A'}$ definiert, und aus der Universalität folgt die Existenz von $\bar{\beta}$.

Bemerkung. Die Behauptung bleibt auch im relativen Fall richtig, wenn $\Omega_{B'|A}$ zulässig für $\Omega_{B|A}$ ist.

Als Spezialfall erhält man für drei Ringe $A \to B \to C$ (indem man einmal $A' = B$, $B' = C$ und einmal $A' = A$, $B' = C$ setzt) kanonische Abbildungen

$$C \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{C|A} \to \Omega_{C|B},$$

und es gilt:

b) *Die Folge*

$$C \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{C|A} \to \Omega_{C|B} \to 0$$

ist exakt.

Beweis. Es genügt, die entsprechende Folge

$$0 \to \mathrm{Der}_{C|B}(M) \to \mathrm{Der}_{C|A}(M) \to \mathrm{Der}_{B|A}(M)$$

zu betrachten (die Abbildungen sind die kanonische Inklusion und die Einschränkung) für C-Moduln M. Diese Folge ist exakt, und hieraus folgt die Behauptung (im relativen Fall setzen wir voraus, daß die für $\Omega_{C|B}$ zulässigen Moduln M auch für $\Omega_{B|A}$ und $\Omega_{C|A}$ zulässig sind).

c) *Ist $C = B/J$, so ist die Folge*

$$J/J^2 \to C \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{C|A} \to 0$$

exakt, wobei $J/J^2 \to C \otimes_B \Omega_{B|A}$ die kanonische Abbildung $\bar{f} \mapsto 1 \otimes df$ ist.

Beweis. Da in unserem Fall $\Omega_{C|B} = 0$ ist, ist $C \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{C|A}$ surjektiv. Ist $D : B \to M$ eine A-Derivation und $D|J : J \to M$ Null (M ein C-Modul), so läßt sich D zu einer Derivation von C reduzieren, also ist die Folge exakt. (Im relativen Fall setzen wir voraus, daß $\Omega_{C|B}$ auch für $\Omega_{C|A}$ zulässig ist.)

Beispiel. Ist B ein lokaler Ring, $A = k \subseteq B$ ein zum Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$ isomorpher Unterkörper und $J = \mathfrak{m}$, so ist $\Omega_{(B/J)|A} = 0$. Es gibt also einen Epimorphismus $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k \otimes_B \Omega_{B|k}$, und nach Beispiel 8 ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} k \otimes_B \Omega_{B|k}$.

d) Basiswechsel. *Ist $B' = B_{A'} = A' \otimes_A B$, so ist der kanonische Homomorphismus $B' \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{B'|A'}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Derivation $1 \otimes d : B' = A' \otimes_A B \to B' \otimes_B \Omega_{B|A}$ induziert $\Omega_{B'|A'} \to B' \otimes_B \Omega_{B|A}$, invers zur kanonischen Abbildung. (Entsprechende Voraussetzungen in relativem Fall!)

Diese Eigenschaft läßt sich noch in folgender Weise modifizieren:

e) Relativer Basiswechsel. *Es sei A eine Kategorie von Ringen, so daß für jede A-Algebra B aus A und jeden Ringhomomorphismus $A \to A'$ ein Basiswechseldiagramm*

$$\begin{array}{ccc} B & \to & B_{A'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \to & A' \end{array}$$

existiert, so daß $\Omega_{B_{A'}} \mid (A' \otimes_A B) = 0$ ist ($B_{A'}$ ist in kanonischer Weise $(A' \otimes_A B)$-Algebra). Dann ist

$$B_{A'} \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{B_{A'}|A'}$$

surjektiv. Besitzt jede A-Derivation $D : B \to M'$ in einem $B_{A'}$-Modul M' eine Fortsetzung zu einer A'-Derivation von $B_{A'}$, so ist die Abbildung

$$B_{A'} \otimes_B \Omega_{B|A} \to \Omega_{B_{A'}|A'}$$

ein Isomorphismus.

Beispiele.

1. Kategorie der kompletten Ringe $B = B^{\wedge}_V$ (V eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(B)$), $B_{A'}$ vollständiges Tensorprodukt (A' mit diskreter Topologie).

2. Kategorie der Henselschen Ringe $B = B^h_V$, $B_{A'} = (A' \otimes_A B)^h_{V'}$ (V' Urbild von V in $\mathrm{Spec}(A' \otimes_A B)$).

In beiden Fällen ist $\Omega_{B_{A'}|A'} = B_{A'} \otimes_B \Omega_{B|A}$.

f) Lokalisierung. *Ist $S \subseteq B$ ein multiplikativ abgeschlossenes System, dann ist $(\Omega_{B|A})_S \to \Omega_{B_S|A}$ ein Isomorphismus.*

Beweis nach dem üblichen Muster.

Das sind die wichtigsten elementaren Eigenschaften des universellen Differentialmoduls. Weitergehende spezielle Eigenschaften scheinen wenig untersucht worden zu sein.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann man die Differentialmoduln endlich erzeugter A-Algebren, ihrer Komplettierungen und Henselschen Abschließungen im Prinzip berechnen.

Ist beispielsweise $B = A[x_1, \ldots, x_n] = A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m)$, so wird $\Omega_{B|A}$ erzeugt durch $dx_1, \ldots, dx_n$, und es gelten die Relationen

$$dF_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial X_j} dx_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Sind A, B Dedekindsche Ringe und ist B endlich über A, so ist der Annullator von $\Omega_{B|A}$ die Differente $\mathfrak{D}_{B|A}$ im Sinne von DEDEKIND.

3.5.4. Globalisierung

Wir betrachten jetzt anstelle von Ringen A, B geometrische Räume und Morphismen $p : X \to S$. Unter einer S-Derivation von X mit Werten in einer $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe F verstehen wir einem Morphismus abelscher Garben $D : \mathcal{O}_X \to F$ mit $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ und $D(h(p)g) = h(p)D(g)$ für einen lokalen Schnitt h von $\mathcal{O}_S$. $\mathrm{Der}_{X|S}(X, F)$ bezeichne den $\mathcal{O}_X(X)$-Modul aller S-Derivationen $\mathcal{O}_X \to F$ und $\mathrm{Der}_{X|S}(F)$ die $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $U \subseteq X \mapsto \mathrm{Der}_{U|S}(U, F/U)$. Wenn der Funktor $F \mapsto \mathrm{Der}_{X|S}(X, F)$ darstellbar ist (wobei man wieder die zur Konkurrenz zugelassenen Modulgarben einschränken kann), dann bezeichnen wir ein darstellendes Objekt mit $\Omega_{X|S}$ und mit $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X|S}$ die universelle Derivation.

Für Schemata $X|S$ existiert $\Omega_{X|S}$, und es gelten wieder folgende Eigenschaften:

a) Funktoreigenschaft. *Ist*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & S \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, so gibt es ein kanonisches kommutatives Diagramm (von f-Morphismen)

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{X'|S'} & \longleftarrow & \Omega_{X|S} \\ {\scriptstyle d}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d} \\ \mathcal{O}_{X'} & \longleftarrow & \mathcal{O}_X \end{array}$$

b) *Für $X' \xrightarrow{f} X \longrightarrow S$ gilt: Die Folge*

$$f^*\Omega_{X|S} \to \Omega_{X'|S} \to \Omega_{X'|X} \to 0$$

ist exakt.

c) *Wenn $X' \to X$ eine abgeschlossene Einbettung ist, definiert durch die Idealgarbe J, so ist*

$$J \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} = J/J^2 \to \Omega_{X|S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \to \Omega_{X'|S} \to 0$$

exakt.

d) Basiswechsel. *Wenn das Diagramm in* a) *universell ist, dann ist der kanonische Morphismus*

$$f^*\Omega_{X|S} \to \Omega_{X'|S'}$$

ein Isomorphismus.

e) Lokalisierung. *Ist $U \subset X$ offen, so ist*

$$\Omega_{X|S} \mid U \to \Omega_{U|S}$$

ein Isomorphismus.

Aus d), e) ergibt sich sofort: Wenn $U \subseteq X$, $V \subseteq S$ offene Teilmengen sind, so daß U über V liegt, so ist $\Omega_{U|V} = \Omega_{X|S}|U$. Sind $U = \mathrm{Spec}(B)$, $V = \mathrm{Spec}(A)$ affin, so folgt aus der Verträglichkeit des affinen Differentialmoduls mit Lokalisierungen, daß *$\Omega_{U|V}$ die zu $\Omega_{B|A}$ assoziierte Modulgarbe ist.* Wegen der Eindeutigkeit des universellen Differentialmoduls ergibt sich daraus auch sofort die Konstruktion von $\Omega_{X|S}$. Insbesondere ist also $\Omega_{X|S}$ quasikohärent und

$$(\Omega_{X|S})_x = \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|\mathcal{O}_{S,s}},$$

wenn $x \in X$ über $s \in S$ liegt. Wenn im allgemeinen Fall $\Omega_{X|S}$ existiert, so gelten stets ebenfalls Eigenschaften a), b) und c).

Wenn e) gilt, folgt daraus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X|S}, F) \simeq \mathrm{Der}_{X|S}(F).$$

Konstruktion von $\Omega_{X|S}$ im allgemeinen Fall

Es sei $\Omega(U)$ universeller Differentialmodul von $\mathcal{O}_X(U)$ über $p^{-1}\mathcal{O}_S(U)$ ($p : X \to S$ Strukturmorphismus). Wegen der Funktoreigenschaft ist $U \mapsto \Omega(U)$ eine Prägarbe, und es sei $\Omega_{X|S}$ die assoziierte Garbe. Aus den Universaleigenschaften der assoziierten Garbe und der Differentialmoduln folgt unmittelbar die von $\Omega_{X|S}$. Außerdem ist die Konstruktion mit Lokalisierungen und mit Basiswechsel in der Kategorie aller geometrischen Räume verträglich. Man kann noch entsprechende Bedingungen angeben, wann $\Omega_{X|S}$ mit Basiswechsel in einer Unterkategorie (z. B. komplexe

Räume oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten) vertauschbar ist. Das ist in den konkreten Fällen jedoch stets klar ersichtlich, und wir verzichten daher darauf.

Zum Schluß wollen wir noch folgendes, häufig benutztes Resultat zeigen:

3.5.5. Satz. *Der S-Morphismus $p : X \to Y$ besitze einen Schnitt $j : Y \to X$* (d. h. $p \circ j = \mathrm{id}$), *der eine abgeschlossene Einbettung, definiert durch die Idealgarbe J, sei.*

(1) *Dann besitzt die kanonische Abbildung $p^*\Omega_{Y|S} \to \Omega_{X|S}$ eine linksinverse Abbildung $\Omega_{X|S} \to p^*\Omega_{Y|S}$ (induziert durch die Derivation $\mathcal{O}_X \to p^*\Omega_{Y|S}$:*

$$d_Y(f) = d(f(j)) \in j_*\Omega_{Y|S} \simeq p^*\Omega_{Y|S}).$$

Also ist $\Omega_{X|S} \simeq p^*\Omega_{Y|S} \oplus \Omega_{X|Y}$.

(2) *Die kanonische Abbildung $J/J^2 \to \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|S}$ besitzt eine linksinverse Abbildung (induziert durch die Derivation $\delta : \mathcal{O}_X \to J/J^2$, $\delta(f) = (f - f(j \circ p))$ mod J^2), so daß $J/J^2 \simeq \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X|Y}$ ist.*

Beweis. (1) folgt aus der Tatsache, daß für $f = g(p)$, g ein lokaler Schnitt von $\mathcal{O}_Y$,

$$d_Y(f) = d(f(j)) = d(g(p \circ j)) = d(g)$$

gilt, und da $p^*\Omega_{Y|S}$ von diesen Formen erzeugt wird.

(2) folgt daraus, daß $\delta(f) = f \bmod J^2$ für f aus J (wegen $f(j \circ p) = 0$) gilt und daß $\delta(f) = 0$ für $f = g(p)$ (g aus $\mathcal{O}_Y$) gilt. (Man beachte die exakten Folgen b) und c).)

Beispiel. Die Diagonale $\delta : X \to X \times_S X$ sei eine abgeschlossene Einbettung, definiert durch das Ideal J. Ist $p : X \times_S X \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor, dann ist $\Omega_{(X \times_S X)|X} \simeq p^*\Omega_{X|S}$ wegen der Verträglichkeit mit Basiswechsel, und aus $p \circ \delta = \mathrm{id}_X$ folgt nach (2)

$$\Omega_{X|S} \simeq J/J^2.$$

Das entspricht anschaulich der Tatsache, daß df das Glied erster Ordnung in der Taylor-Entwicklung der Funktion f darstellt (als Funktion des variablen Anfangspunktes $p(x, h) = x$).

Bezeichnungen

$\Omega_{X|S} =: \Omega^1_{X|S}$ heißt die *Garbe der Kovektorfelder* oder *Kotangentialgarbe*,

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X|S}, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Der}_{X|S}(\mathcal{O}_X)$ die *Garbe der Vektorfelder* oder *Tangentialgarbe* oder *Garbe der infinitesimalen Transformationen*,

J/J^2 (für abgeschlossene Einbettungen) heißt *Konormalgarbe*.

3.6. Etalmorphismen und unverzweigte Morphismen

Die Etalmorphismen gehören zu den fundamentalen Begriffen der algebraischen Geometrie. Sie wurden im letzten Jahrzehnt entdeckt (A. Grothendieck [20]) und systematisch untersucht.

Die meisten im folgenden aufgeführten Resultate stammen aus dem oben zitierten Seminar, während wir in den Beweismethoden etwas anders vorgehen und dadurch

Vereinfachungen erzielen. Um zunächst ein Beispiel zu haben, betrachten wir singularitätenfreie projektive Kurven über dem Grundkörper der komplexen Zahlen (Riemannsche Flächen) V, W. Ein Morphismus $p : V \to W$ hat endlich viele Verzweigungspunkte, und außerhalb dieser Verzweigungspunkte kann man auf V und W die gleichen lokalen Parameter verwenden, d. h. aber nichts weiter, als daß V und W als *analytische* Mannigfaltigkeiten durch p lokal isomorph aufeinander abgebildet werden (außerhalb der Verzweigungspunkte), insbesondere sind sie also lokal homöomorph im Sinne der lokal kompakten Topologie. Das ist jedoch keineswegs so im Sinne der Zariski-Topologie (wenn X, Y verschiedene Geschlechter haben), weil lokale Homöomorphie im Sinne der Zariski-Topologie birationale Äquivalenz bedeuten würde. *Die Eigenschaft „etal" ist nichts weiter als die Übertragung des Begriffs „lokal isomorph im analytischen Sinne" in algebraische Sprechweise.*

Es erweist sich als nützlich, diesen Begriff nicht nur für algebraische Mannigfaltigkeiten, sondern für beliebige geometrische Räume einzuführen.

Ein geometrischer Punkt eines geometrischen Raumes X ist per definitionem ein Element $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(k), X) = X(k)$, wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. ξ ist umkehrbar eindeutig bestimmt durch einen Punkt $x = \xi =: \xi(\mathrm{Spec}(k)) \in \underline{X}$ und eine Einbettung $k(x) \to k$ (induziert durch $\mathcal{O}_{X,x} \to k, f \mapsto f(\xi)$).

Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus geometrischer Räume und $\eta \in Y(k)$ ein geometrischer Punkt. Dann nennen wir $X_\eta =: X \times_Y \eta$ eine (*geometrische*) *Faser* in η. Man kann allgemein die Darstellbarkeit von X_η nachweisen; wir betrachten hier jedoch der Einfachheit halber X_η als den Funktor $X_\eta(S)_k = \{p : S \to X : f \circ p = \eta_S\}$ auf der Kategorie der geometrischen Räume $S \to \mathrm{Spec}(k)$ über k, wobei η_S den Morphismus $S \to \mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{\eta} Y$ bezeichnet.

Ist f lokal von endlichem Typ, so ist X_η ein algebraisches k-Schema (wie unmittelbar aus 3.1.2.1. und 3.1.2.2. folgt). Wir betrachten im folgenden nur Morphismen f dieses Typs, die geometrischen Fasern sind dann also algebraische Schemata.

3.6.1. Definitionen

Im folgenden sei $f : X \to Y$ lokal von endlichem Typ. f heißt *unverzweigt*, wenn die geometrischen Fasern diskrete und reduzierte Schemata sind (d. h., der zugrunde liegende Raum ist mit der diskreten Topologie versehen, und die lokalen Ringe sind Körper). Ist darüber hinaus f lokal von endlicher Darstellung und flach (d. h. $\mathcal{O}_{X,x}$ flache $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-Algebra für alle x), so nennt man f *etal* oder einen *Etalmorphismus*.

Wir werden unter anderem sehen, daß man die unanschauliche Bedingung „flach" im Fall eines reduzierten Raumes Y durch die Bedingung „offen" ersetzen kann.

Bemerkung. Ist $\eta \in Y(k)$ ein geometrischer Punkt, X_η die Faser in η, dann ist X_η ein algebraisches k-Schema, und „diskret und reduziert" bedeutet dann, daß X_η disjunkte Vereinigung von Punkten der Form $\mathrm{Spec}(k)$ ist.

Dazu ist folgende Bedingung äquivalent: Es sei $y = \eta$ und $\mathfrak{m}$ das Maximalideal in $\mathcal{O}_{Y,y}$. *Für jeden Punkt $x \in X$ über y ist $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_{X,x}$ und $k(x) \mid k(y)$ endlich separabel.*

Beweis. Ist ξ ein Punkt von X_η, dann ist $\xi \to \eta$ von endlichem Typ, d. h. $k(\xi) \mid k$ endlich erzeugt (als Ring), also $k = k(\xi)$ (z. B. nach Hilberts Nullstellensatz oder nach Zariskis Hauptsatz). $X_y = X \times_Y k(y)$ ist ein algebraisches $k(y)$-Schema (z. B. nach 2.3.5. und 2.3.6.), und X_η entsteht durch Grundkörpererweiterung aus X_y. Ist $x \in X_y$, so ist

$$\mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_X ,$$

und X_η ist nur dann reduziert und diskret, wenn $\mathcal{O}_{X_y,x} = k(x)$ und $k(x) \mid k(y)$ endlich separabel ist, q.e.d.

Charakterisierung unverzweigter Morphismen

Im folgenden sei wieder ein Morphismus $X \to Y$ von endlichem Typ gegeben. Ist R ein lokaler Ring, J ein Ideal in R, so gibt es kanonische Abbildungen $X(R) \to X(R/J)$, $X(R) \to Y(R) \to Y(R/J)$, also eine kanonische Abbildung

(*) $\qquad X(R) \to X(R/J) \times_{Y(R/J)} Y(R)$

(Faserprodukt von Mengen); diese ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

3.6.2. Satz. *$p : X \to Y$ ist genau dann unverzweigt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) $\quad \Omega_{X|Y} = 0$.

(2) *Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k und $R = k[t]$ mit $t^2 = 0$ ist die kanonische Abbildung (*) injektiv.*

(3) *Zu jedem Punkt $y \in Y$ gibt es eine Umgebung $W \subseteq Y$, so daß X über W lokal isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von endlichem Typ von $V(F)_{F'f} \subseteq W \times \mathbf{A}^1$ ist, wobei $F \in \mathcal{O}_Y(W)[T]$ ein normiertes Polynom und $f \in \mathcal{O}_Y(W)[T]$ ein geeignetes Polynom ist. ($V(F)_g =: \{(w, t) \in W \times \mathbf{A}^1, F(w)(t) = 0, g(w)(t)$ Einheit$\}$.)*

(4) *Die Diagonale $X \to X \times_Y X$ ist eine offene Einbettung.*

Bemerkung. Wenn man nicht die Darstellbarkeit von $X \times_Y X$ benutzen will, kann man (4) wie folgt formulieren:

(4′) *Zu jedem kommutativen Diagramm*

$$S \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X \to Y$$

gibt es einen offenen Unterraum S_0 von S mit der Eigenschaft

$$S_0(T) = \{u \in S(T), \alpha \circ u = \beta \circ u\}$$

für alle geometrischen Räume T (über Y).

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Es sei $R = k[t]$, $t^2 = 0$, $t \neq 0$. Wenn $\xi_1, \xi_2 \in X(R)$ in $Y(R)$ dasselbe Element η und in $X(k)$ dasselbe Element ξ induzieren, dann hat man eine Y-Derivation $D : \mathcal{O}_X \to k_\xi$ (wobei k_ξ die in ξ konzentrierte Garbe mit dem Halm k bezeichnet), nämlich $tD(f) = 0$, falls $\xi \notin \mathrm{supp}\, f$ ist, und gleich $f(\xi_1) - f(\xi_2)$ sonst. Wegen $\Omega_{X|Y} = 0$ ist $D = 0$, also $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, also $\xi_1 = \xi_2$.

Wir zeigen jetzt: Aus (2) folgt, daß $X \to Y$ unverzweigt ist. Es sei $\eta \in Y(k)$ ein geometrischer Punkt, und es seien $\xi_1, \xi_2 \in X_\eta(R)_k$ über dem gleichen Punkt $\xi \in X_\eta(k)_k$;

aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathrm{Spec}(k) \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

folgt (nach (2)), daß ξ_1, ξ_2 in $X(R)$ übereinstimmen, also ist $\xi_1 = \xi_2$. Daher ist $X_\eta(R)_k \to X_\eta(k)_k$ bijektiv, also ist in jedem $\xi \in X_\eta(k)_k$ der Tangentialraum $T_\xi = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2, k) = 0$, also $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2 = 0$ und nach dem Lemma von NAKAYAMA $\mathfrak{m}_\xi = 0$, X_η diskret und reduziert, $X \to Y$ unverzweigt.

Wir zeigen für unverzweigte Morphismen $p : X \to Y$ die Eigenschaft (3). Nach dem Hauptsatz von ZARISKI ist p lokal endlich, für $x \in X$ ist also der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ Lokalisierung einer endlichen $\mathcal{O}_{Y,y}$-Algebra A $(y = p(x))$ in einem Maximalideal. Außerdem ist $k(x)$ endlich separabel über $k(y)$, und es gibt daher ein Element $t \in A \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$, so daß $t(x)$ primitives Element von $k(x)$ über $k(y)$ ist, d. h. $k(t(x)) = k(y)$. Man kann noch annehmen, daß t in allen von $\mathfrak{m}_{X,x} \cap A$ verschiedenen Maximalidealen von A enthalten ist (da A ein semilokaler Ring ist). Da A endlich über $A_0 =: \mathcal{O}_{Y,y}[t]$ ist und über $\mathfrak{m}_{X,x} \cap A_0$ nur ein Maximalideal liegt, folgt nach dem Lemma von NAKAYAMA, daß $\mathcal{O}_{X,x}$ Lokalisierung von A_0 ist. Es sei also $A = A_0 = \mathcal{O}_{Y,y}[t]$. Ist $\bar{A} =: A \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$, dann ist $\bar{A}$ eine endliche $k(y)$-Algebra, und dem Punkt x entspricht ein direkter Faktor $\simeq k(x)$ von $\bar{A}$. Nach dem Lemma von NAKAYAMA gibt es ein normiertes Polynom $F \in \mathcal{O}_{Y,y}[T]$, so daß $F(t) = 0$ und

$$\bar{A} \simeq k(y)[T]/\bar{F}k(y)[T]$$

ist ($\bar{F}$ Bild von F in $k(y)[T]$). Dem zu x gehörigen diskreten Faktor entspricht eine Zerlegung $\bar{F} = \bar{G}\bar{H}$, so daß

$$k(x) \simeq k(y)[T]/\bar{G}(T)\, k(y)[T]$$

und $\bar{G}$ und $\bar{H}$ teilerfremd in $k(y)[T]$ sind. Da $k(x)\,|\,k(y)$ separabel ist, ist $G'(t) \notin \mathfrak{m}_{X,x}$, also ist wegen $F'(t) \equiv G'(t)\,H(t) \bmod \mathfrak{m}_{X,x}$ auch $F'(t) \notin \mathfrak{m}_{X,x}$, also $\mathcal{O}_{X,x}$ Lokalisierung von $A_{F'(t)}$.

Die Aussage von (3) ist lokaler Natur, man kann daher annehmen, daß F auf ganz Y und t auf ganz X definiert ist und daß $F(t) = 0$ ist auf ganz X. Weiterhin kann man voraussetzen, daß $X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von endlichem Typ über Y ist, definiert durch Funktionen $t_1, \ldots, t_n$ auf X, die ihrerseits rationale Funktionen $\dfrac{f_i(t)}{f(t)}$ von t sind (f_i, f Polynome mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_Y(Y)$, so daß $f(t)$ auf X keine Nullstellen hat). Sind $F_\alpha(T_1, \ldots, T_n) = 0$ die Relationen, welche die t_i erfüllen, und definiert man

$$G_\alpha(T) = F_\alpha\left(\frac{f_1}{f}, \ldots, \frac{f_n}{f}\right) f^{m_\alpha} \qquad (m_\alpha = \deg(F_\alpha)),$$

so sind die G_α Polynome, und X ist isomorph zu dem lokal abgeschlossenen Unterraum von $Y \times \mathsf{A}^1 = \mathsf{A}_Y^1$, definiert durch die Relationen

$$G_\alpha(T) = F(T) = 0, \qquad F'(T)\,f(T) \neq 0.$$

Ist $X \to Y$ lokal von endlicher Darstellung, so braucht man (lokal) nur endlich viele Relationen zu berücksichtigen.

(3) $\Rightarrow$ (4). Da die Eigenschaft (4) lokaler Natur ist, kann man annehmen, daß es auf X eine Funktion t gibt, welche die Relationen $F(p)(t) = 0$, $F'(p)(t) = 0$ mit einem normierten Polynom aus $\mathcal{O}_Y(Y)[T]$ erfüllt und eine Einbettung $X \to Y \times \mathsf{A}^1$ über Y definiert.

Wir betrachten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "q"] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dann gilt für $u \in S(T)_Y$:

$$\alpha \circ u = \beta \circ u \Leftrightarrow t(\alpha \circ u) = t(\beta \circ u).$$

Auf S gilt $F(q)(T) = (T - t(\alpha))\, G(T)$, und

$$F(q)(t(\beta)) = 0, \qquad F(q)'(t(\alpha)) = G(t(\alpha))$$

ist umkehrbar auf S. Daher sind $T - t(\alpha)$ und $G(T)$ teilerfremd auf S, und in jedem Punkt $s \in S$ gilt daher $t(\beta) = t(\alpha)$, und $G(t(\beta)) =: g$ ist Einheit oder $G(t(\beta)) = 0$, und $t(\beta) - t(\alpha)$ ist Einheit. Daher erfüllt der offene Unterraum

$$S_0 = S_g = \{s \in S,\, g(s) \neq 0\}$$

die Eigenschaft (4').

(4) $\Rightarrow$ (1). Wird X durch eine Einbettung $X \to Y \times \mathsf{A}^1$ über Y wie oben definiert, so ist $0 = dF(p)(t) = F(p)'(t)\,dt$, also $dt = 0$ und damit $\Omega_{X|Y} = 0$, q.e.d.

3.6.2.1. Korollar. *Ist $p : X \to Y$ unverzweigt und $s : Y \to X$ ein Schnitt von p, so ist s eine offene Einbettung.*

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s \circ p"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen offenen Unterraum X_0 von X und

$$X_0(T) = \{u : T \to X;\, n = s \circ p \circ u\}.$$

Hieraus folgt, daß $(p\,|\,X_0) : X_0 \to Y$ ein Isomorphismus ist $(u \in X_0(T) \mapsto p \circ u \in Y(T))$ und daß $s \in X_0(Y)$ gilt, also induziert s den zu p inversen Isomorphismus $Y \xrightarrow{\sim} X_0$, q.e.d.

3.6.2.2. Korollar. *Ist $p : X \to Y$ unverzweigt, lokal von endlicher Darstellung, für alle $x \in X$ der Ring $\mathcal{O}_{Y,p(x)}$ normal und $\mathcal{O}_{Y,p(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv, so ist p ein Etalmorphismus.*

Beweis. Das im Beweis von Satz 3.6.2., c) betrachtete Polynom F ist, wenn $\mathcal{O}_{Y,y}$ normal ist, Minimalpolynom von t, also ist der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ Lokalisierung von

$\mathcal{O}_{Y,y}[T]/F\mathcal{O}_{Y,y}[T]$ in einem Maximalideal. Also sind die im Beweis von Satz 3.6.2., c) betrachteten Polynome Null in $\mathcal{O}_{Y,y}$, also auch in einer Umgebung von y in Y. Über dieser Umgebung ist also jeder lokale Ring von X flach über Y, q.e.d.

3.6.2.3. Korollar. *Ist*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

ein universelles Diagramm geometrischer Räume und p unverzweigt, so ist auch p' unverzweigt.

Ist Y' treuflach über Y und p' unverzweigt, so ist auch p unverzweigt.

Der Beweis folgt z. B. aus der Basiswechseleigenschaft von $\Omega_{X|Y}$.

Beispiel. X, Y seien algebraische Schemata über $\mathbb{C}$ und X', Y' die assoziierten komplexen Räume. Ist $X' \to Y'$ unverzweigt, so ist auch $X \to Y$ unverzweigt und umgekehrt.

3.6.2.4. Korollar. *Die Komposition unverzweigter Morphismen ist unverzweigt.*

3.6.2.5. Korollar. *Sind die lokalen Ringe von Y streng Henselsch (d. h. Henselsch mit separabel abgeschlossenen Restklassenkörpern), so sind die unverzweigten Morphismen $X \to Y$ (nach Eigenschaft (3)) genau diejenigen, die lokal abgeschlossene Einbettungen sind.*

Charakterisierung der Etalmorphismen
Im folgenden sei der Morphismus $p: X \to Y$ lokal von endlicher Darstellung.

3.6.3. Satz. *p ist genau dann ein Etalmorphismus, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) *Für jeden lokalen Ring R (von endlicher Darstellung über einem lokalen Ring von Y) ist die kanonische Abbildung*

$$X(R) \to X(R/J) \times_{Y(R/J)} Y(R)$$

bijektiv, wenn J ein nilpotentes Ideal von endlichem Typ ist.

(2) *$X \to Y$ ist lokal vom Typ*

$$V(F)_{F'f} \subseteq Y \times \mathbb{A}^1,$$

wobei F ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_Y(Y)$ und f ein beliebiges Polynom ist.

Bemerkung. Wenn die lokalen Ringe von Y Noethersch sind, kann man (1) wie folgt abschwächen:

(1') *Für jeden lokalen Artin-Ring R und jeden Morphismus $\alpha: \mathrm{Spec}(R) \to Y$ von endlicher Darstellung ist*

$$X(R)_Y \to X(R/J)_Y$$

bijektiv.

Beweis. Aus (1) folgt zunächst, daß X lokal abgeschlossener Unterraum eines Raumes vom Typ $V(F)_{F'f} \subseteq Y \times \mathbb{A}^1$ ist. Ist $x \in X$, R_0 der lokale Ring von $V(F)_{F'f}$ in x, dann gibt es also eine Surjektion $R_0 \to \mathcal{O}_{X,x}$ mit einem endlich erzeugten Kern N. Wir wenden (1) auf $R = R_0/N^2$, $J = N/N^2$ an. Dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R/J \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,y} & \to & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

entspricht ein $\xi \in X(R/J) \times_{Y(R/J)} Y(R)$, also ein $\mathcal{O}_{Y,y}$-Morphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to R$. Daher zerfällt die exakte Folge

$$0 \to J \to R \to \mathcal{O}_{X,x} \to 0.$$

Wegen

$$R \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \simeq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \simeq k(x)$$

ist $J \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) = 0$ und (da J endlich erzeugt ist) daher $J = N/N^2 = 0$ (Lemma von Nakayama), also auch $N = 0$, d. h., die Einbettung $X \to \mathbb{A}^1 \times Y$ erfüllt außer $F(t) = 0$, $F'(t)f(t) \neq 0$ keine weiteren Relationen, also ist (1) $\Rightarrow$ (2) bewiesen.

Aus (2) folgt, daß p unverzweigt und flach ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß hieraus (1) folgt. Offensichtlich folgt aus (2) die Eigenschaft (1); also genügt zu zeigen (mit den Bezeichnungen von a)), daß $R \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ ist, und dazu genügt es wieder, zu zeigen, daß $J = 0$ ist. Indem wir jetzt die Flachheit von $\mathcal{O}_{X,x}$ (anstelle des Zerfallens der obigen exakten Folge) ausnutzen, folgt $J \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) = 0$ und somit $J = 0$.

Beweis der Bemerkung. Mit den Bezeichnungen von a) gilt: Für jedes nulldimensionale Ideal Q in R_0 läßt sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & R_0/Q & \to & R_0/Q + N \\ \mathcal{O}_{Y,y} & & & & \uparrow \\ & \searrow & \mathcal{O}_{X,x} & \simeq & R_0/N \end{array}$$

mit einem (eindeutig bestimmten) $\mathcal{O}_{X,x} \to R_0/Q$ zu einem kommutativen Diagramm komplettieren, also ist (analog oben!) $(Q + N/Q) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) = 0$, $Q \supseteq N$ für alle Q und somit $N = 0$, q.e.d.

3.6.3.1. Korollar. *Ist*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

ein universelles Diagramm und p ein Etalmorphismus, so auch p', und wenn q treuflach ist, gilt auch die Umkehrung.

3.6.3.2. Korollar. *Ist $X' \xrightarrow{q} X \xrightarrow{p} Y$ ein Etalmorphismus und p unverzweigt, so ist q ein Etalmorphismus.*

Beweis. Die Projektion $X' \times_Y X \to X$ ist ein Etalmorphismus (da sie durch Basiswechsel aus $p \circ q$ entsteht), und $s = (\mathrm{id}_{X'}, q): X' \to X' \times_Y X$ ist als Schnitt des unverzweigten Morphismus $p_{X'} : X' \times_Y X \to X'$ eine offene Einbettung, ferner ist $p_X \circ s = q$, q.e.d.

3.6.3.3. Korollar. *Etalmorphismen sind offene Morphismen.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für $X = V(F) \subseteq Y \times \mathsf{A}^1$ mit einem normierten $F \in \mathcal{O}_Y(Y)[T]$ die Projektion $p : X \to Y$ offen ist. Es sei $U \subseteq Y$ offen, $g \in p^{-1}\mathcal{O}_Y(U)[t] \subseteq \mathcal{O}_X(p^{-1}U)$ und

$$D(U, g) = \{x \in p^{-1}U, g(x) \neq 0\} = (p^{-1}U)_g$$

(t Bild von T auf X). Wir zeigen zunächst, daß die offenen Mengen dieser Form eine Basis von X bilden.

Jeder Punkt von x liegt in einem $D(U,f)$, $D(U, f) \cap D(V, g) = D(U \cap V, fg)$. Folglich erzeugen diese Mengen eine eventuell gröbere Topologie auf der X zugrunde liegenden Punktmenge, so daß bezüglich dieser Topologie die Projektion auf Y stetig ist. Es sei X' der mit dieser Topologie und mit der durch $\mathcal{O}_X$ induzierten Garbe $\mathcal{O}_{X'}$ versehene Raum mit der gleichen zugrunde liegenden Punktmenge wie X. Dabei verstehen wir unter $\mathcal{O}_{X'}$ die folgende Garbe: Man betrachte die durch die identische Abbildung induzierte Bijektion $i : X \to X'$, bilde $i_*\mathcal{O}_X$ und invertiere in dieser Garbe noch alle Schnitte, die in $\mathcal{O}_X$ invertierbar sind (d. h. diejenigen, die bei den kanonischen Abbildungen $\mathcal{O}_{X'}(U') \to \mathcal{O}_{X,x}$, $x \in U'$ ($U' \subseteq X'$ offen) in Einheiten übergehen. Man hat kanonische Morphismen $X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{p'} Y$, und wird $X \to \mathsf{A}^1 \times Y$ durch die Funktion t definiert, so ist nach Definition von X' die Funktion t von der Form $t' \circ i$, und t' genügt ebenfalls der Relation $F(p')(t') = 0$. Also gibt es eine eindeutig bestimmte Faktorisierung $p' = p \circ j$, $j : X' \to X$ mit $t' = t \circ j$.

Ist $h = j \circ i : X \to X$, dann ist $p \circ h = p$, $t \circ h = t$, also $h = \mathrm{id}_X$. Also ist j ein Isomorphismus, also $X = X'$.

Es genügt also jetzt zu zeigen, daß für offene $U \subseteq Y$ und $g = G(t) \in \mathcal{O}_X(p^{-1}U)$, $G \in \mathcal{O}_Y(U)[T]$ die Menge $p(D(U, g))$ offen in Y ist. Man kann Y durch U ersetzen; es sei also $Y = U$. Für $n = 1, 2, \ldots$ sei $H_n \in \mathcal{O}_Y(Y)[T]$ der Rest von G^n bei der Division durch F (F ist normiert!), d. h. $H_n = G^n \bmod F$ und $\deg H_n < \deg F$.

Wir behaupten, daß $p(D(Y, g))$ die offene Menge V aller $y \in Y$ ist, so daß kein $H_n(y)(T) \in k(y)[T]$ das Nullpolynom ist, für $1 \leqq n \leqq \deg F$. Denn ist $x \in D(Y, g)$, so ist $G(p(x))(t(x))^n \neq 0$, also $G(p(x))(T)^n$ nicht durch $F(p(x))(T)$ teilbar, also $p(D(Y, g)) \subseteq V$.

Umgekehrt sei $y \in V$; die Faser in y ist $\operatorname{Spec}(k(y)[T]/Fk(y)[T])$. Gilt $g(x) = 0$ für alle $x \in p^{-1}(y)$, so muß daher $G(y)(T)$ nilpotent modulo $F(y)(T)$ sein, d. h. aber, daß $F(y)(T)$ Teiler von $G(y)(T)^n$ für $n \gg 0$ ist. Falls das überhaupt für ein n gilt, so gilt diese Relation schon mit einem $n \leqq \deg F$, d. h. aber $y \notin V$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

3.6.3.4. Korollar. *Ist $p : X \to Y$ ein Etalmorphismus und universell injektiv, so ist p eine offene Einbettung.*

Hierbei bedeutet „universell injektiv", daß für jedes universelle Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

der Morphismus p' injektiv ist. Gleichbedeutend damit ist, daß jede geometrische Faser von p aus höchstens einem Punkt besteht.

Beweis von 3.6.3.4. Da Etalmorphismen offen sind, kann man noch annehmen, daß $X \to Y$ surjektiv, also ein universeller Homöomorphismus ist. Dann ist zu zeigen, daß $X \simeq Y$ ist. Da die Frage lokal ist, kann man ferner voraussetzen, daß $X \subseteq V \subseteq Y \times \mathsf{A}^1$ ist, wobei $V = V(F)$, $F \in \mathcal{O}_Y(Y)[T]$ ein normiertes Polynom und X offener Unterraum von V ist. Die Projektion $X \times_Y V \to X$ besitzt einen Schnitt (induziert durch die Einbettung $X \times_Y X \to X \times_Y V$ und die Diagonale $X \to X \times_Y X$). Dieser ist eine offene Einbettung, da $X \to V$ und die Diagonale $X \to X \times_Y X$ offene Einbettungen sind. Außerdem ist $X \times_Y V \to X$ endlich, also ist X offener *und abgeschlossener* Unterraum von $X \times_Y V$ und damit auch von V, da die Projektion $X \times_Y V \to V$ ein Homöomorphismus ist. Also ist $X \to Y$ endlich, und aus dem Lemma von Nakayama folgt daher $X \simeq Y$, q.e.d.

3.6.3.5. Korollar. *Ist $X \to Y$ ein Etalmorphismus, so gilt für jeden universellen Homöomorphismus $Z' \to Z$, daß*

$$X(Z) \to X(Z') \times_{Y(Z')} Y(Z)$$

ein Isomorphismus ist. (Ein Morphismus $Z' \to Z$ geometrischer Räume heißt *universell homöomorph*, wenn für jedes universelle Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T' & \to & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \to & Z \end{array}$$

ein Homöomorphismus der zugrunde liegenden Räume $\underline{T}' \to \underline{T}$ induziert wird.

Beispiele. 1. $Z' \to Z$ eine abgeschlossene Einbettung, definiert durch eine nilpotente Idealgarbe.

2. Z' entstehe aus Z durch eine rein inseparable Grundkörpererweiterung.

Beweis von 3.6.3.5. Einem Y-Morphismus $Z' \to X$ (bzw. $Z \to X$) entspricht umkehrbar eindeutig ein Schnitt von $p' : X \times_Y Z' \to Z'$ (bzw. von $p : X \times_Y Z \to Z$). Ein Schnitt von p' ist eine offene Einbettung $j : Z' \to X \times_Y Z'$ mit $p' \circ j = 1$, also auch eine offene Einbettung der zugrunde liegenden Räume $Z \to X \times_Y Z$; es sei $U \subseteq X \times_Y Z$ der dadurch definierte offene Unterraum. Dann ist die Einschränkung von p auf U ein Etalmorphismus und universell homöomorph, also nach 3.6.3.4. ein Isomorphismus, d. h., p besitzt einen eindeutig bestimmten Schnitt, durch den j induziert wird, q.e.d.

Bemerkung. Korollar 3.6.3.5. ist eine Verallgemeinerung der Eigenschaft (1) in Satz 3.6.3.

Zum Schluß beweisen wir noch folgendes bemerkenswerte Resultat:

3.6.4. Satz. *Es sei $Y' \to Y$ ein ganzer und universell homöomorpher Morphismus geometrischer Räume. Dann induziert der Funktor $X \mapsto X \times_Y Y'$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Etalmorphismen über Y und der Kategorie der Etalmorphismen über Y'.*

Beweis. Wegen $\mathrm{Hom}_{Y'}(X \times_Y Y', Z \times_Y Y') \simeq \mathrm{Hom}_Y(X \times_Y X', Z)$ ist nach dem vorherigen Korollar der betrachtete Funktor voll-treu ($X \times_Y Y' \to X$ ist universell homöomorph). Daher ist ein Etalmorphismus $X \to Y$, so daß $X' \simeq X \times_Y Y' \to Y'$ vorgegeben ist, durch X' eindeutig bestimmt. Es genügt daher, noch zu zeigen, daß ein gegebener Etalmorphismus $X' \to Y'$ stets von der Form $X \times_Y Y' \to Y'$ ist, und dazu genügt es, die Existenz von X lokal nachzuweisen.

Es sei $x' \in X'$, und y', y seien die Bildpunkte von x' in Y' und Y. Wir werden einen Etalmorphismus $U \to Y$ konstruieren, so daß $U \times_Y Y'$ eine Umgebung von x' in X' ist. Es sei $t \in \mathcal{O}_{X',x'}$ derart, daß $k' = k(y)\big(t(x')\big)$ die separable Abschließung von $k(y)$ in $k(x')$ ist. Da $k(x') \mid k(y')$ separabel und endlich und $k(y') \mid k(y)$ rein inseparabel ist ($Y' \to Y$ ist universell homöomorph!), ist $k(x') = k' \otimes_{k(y)} k(y')$. Da $\mathcal{O}_{Y',y'}$ ganz über $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist, kann man t ganz über $\mathcal{O}_{Y,y}$ wählen und derart, daß $\mathcal{O}_{X',x'}$ Lokalisierung von $\mathcal{O}_{Y',y'}[t]$ ist. Dann gibt es nach dem Lemma von Nakayama ein normiertes Polynom $F(T) \in \mathcal{O}_{Y,y}[T]$, so daß $F(t) = 0$ und

$$\mathcal{O}_{Y,y}[t] \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \simeq k(y)[T]/F(y)(T)\, k(y)[T]$$

ist. Man kann X' und Y so klein wählen, daß t auf ganz X', $F(T)$ auf ganz Y definiert und $F(t) = 0$ auf ganz X' gilt. In x' ist außerdem $F(x')'\big(t(x')\big) \neq 0$, also kann man voraussetzen, daß das auf ganz X' gilt.

Ist $U = V(F)_{F'} \subseteq \mathrm{A}^1 \times Y$, dann definiert t einen Y-Morphismus

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \to & Y \end{array}$$

also einen Y'-Morphismus $\varphi: X' \to U \times_Y Y' =: U'$, und φ ist (nach 3.6.3.2.) ein Etalmorphismus. Nach Konstruktion ist $\mathcal{O}_{X',x'} \simeq \mathcal{O}_{U',x'}$, und daher kann man X' und U durch Umgebungen von x' und $\varphi(x')$ ersetzen, so daß $X' \simeq U \times_Y Y'$ ist, q.e.d.

Bemerkung. Für Schemata Y', Y und einen Morphismus $Y' \to Y$, der lokal von endlichem Typ ist, impliziert die Eigenschaft „universell homöomorph", daß $Y' \to Y$ ganz ist. Die Etalmorphismen über Y hängen also nur von der Topologie von Y ab.

3.7. Zusammenhang von Etalumgebungen mit der Henselschen Abschließung

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Henselsche Abschließung eines Paares (A, V) anschaulich gesprochen gleich dem „Durchschnitt" aller „strengen Etalumgebungen" von V in $\mathrm{Spec}(A)$ ist.

Wir definieren, wenn V Unterschema eines Schemas X ist: Ein Etalmorphismus $U \to X$ heißt *strenge Etalumgebung* von V in X, wenn er einen Isomorphismus $U \times_X V \simeq V$ induziert. Das ist genau dann der Fall, wenn er eine Bijektion der V zugrunde liegenden Menge mit ihrem Urbild in U induziert und die Restklassenkörper der dabei korrespondierenden Punkte gleich sind. (Da dann $U \times_X V \to V$

universell homöomorph und etal ist!) Daher hat es Sinn, von strengen Etalumgebungen einer Menge zu reden. Aus 3.4.1. folgt:

Ist A in V Henselsch, so ist jede strenge Etalumgebung $U \to \mathrm{Spec}(A)$ von V von der Gestalt $U \simeq \mathrm{Spec}(A) \coprod U'$, so daß U' über $\mathrm{Spec}(A) - V$ liegt.

Im wesentlichen ist dann also jede strenge Etalumgebung von V zu $\mathrm{Spec}(A)$ isomorph.

Ferner folgt aus dem Hauptsatz von Zariski:

Jede strenge Etalumgebung $U \to \mathrm{Spec}(A)$ von V enthält eine affine Etalumgebung von V, d. h., es gibt ein affines offenes Unterschema $U' \subset U$, so daß $U' \to \mathrm{Spec}(A)$ eine strenge Etalumgebung von V ist.

Man kann U' stets als offenes Unterschema eines A-Schemas vom Typ $\mathrm{Spec}(A[T]/FA[T])_{F'}$ wählen, wobei $F \in A[T]$ ein normiertes Polynom ist, so daß $F(0)$ auf V verschwindet und $F'(0)$ auf V umkehrbar ist. Denn zunächst kann man $U \times_{\mathrm{Spec}(A)} V$ durch die Vereinigung endlich vieler affiner offener Unterschemata von U überdecken; also kann von vornherein angenommen werden, daß U quasikompakt ist. Dann gibt es nach dem Hauptsatz von Zariski eine Faktorisierung

$$U \xrightarrow{j} U' \xrightarrow{q} \mathrm{Spec}(A),$$

so daß j eine offene Einbettung und q ein endlicher Morphismus ist. Wegen $U \times_{\mathrm{Spec}(A)} V \to V$ induziert dann j eine abgeschlossene Einbettung $V \to U'$, und jede Umgebung U einer abgeschlossenen Teilmenge V eines affinen Schemas U enthält eine affine Umgebung U' von V.

Es gibt einen globalen Schnitt c auf U', der auf $j(V) \simeq V$ verschwindet und auf dem Komplement in $U' \times_{\mathrm{Spec}(A)} V$ gleich 1 ist (da beides abgeschlossene disjunkte Unterschemata sind). Dann verschwindet $c^n - c$ für alle $n > 1$ auf $U' \times_{\mathrm{Spec}(A)} V$, also genügt c einer normierten Gleichung F, so daß $F(0)$ auf V verschwindet und $F(0)$ gleich -1 auf V ist (vgl. 2.5.) und nach üblichen Schlüssen (mit Lemma von Nakayama) folgt, daß U eine strenge affine Etalumgebung enthält, die offenes Unterschema von $\mathrm{Spec}(A[T]/FA[T])_{F'}$ ist.

Ist Y ein Schema, V ein abgeschlossenes Unterschema, so bilden die strengen Etalumgebungen $U \to Y$ von V ein gefiltertes projektives System, denn es gilt:

1. *Sind $U \to Y$, $U' \to Y$ strenge Etalumgebungen von V, so auch $U \times_Y U' \to Y$.*

2. *Sind $U \to Y$, $U' \to Y$ wie oben, $U \rightrightarrows U'$ zwei Y-Morphismen, so ist deren Differenzkern eine strenge Etalumgebung von V* (da endliche projektive Limites miteinander vertauschbar sind).

Das Hauptresultat dieses Abschnittes besagt, daß für den Fall $Y = \mathrm{Spec}(A)$ der projektive Limes dieses Systems gleich dem Spektrum der Henselschen Abschließung von A in V ist. Das ergibt also eine neue Konstruktion der Henselschen Abschließung.

3.7.1. Satz. *Ist $A_V{}^h$ die Henselsche Abschließung von A in V, dann gilt* $\mathrm{Spec}(A_V{}^h) = \text{lim-proj}(U)$, *wobei der Limes über das projektive System aller strengen (oder affinen strengen) Etalumgebungen $U \to \mathrm{Spec}(A)$ gebildet wird.*

Der Beweis ergibt sich aus der in Kapitel 2 angegebenen Konstruktion (Satz 2.8.2.). Wir wollen unabhängig von dieser Konstruktion einen zweiten Beweis angeben. Es sei $Y =: \mathrm{Spec}(A)$, $Y' =: \mathrm{Spec}(A^h)$. Zu jeder strengen Etalumgebung $U \to Y$ gibt es einen eindeutig bestimmten Y-Morphismus $Y' \to U$; denn $U' =: U \times_Y Y'$ ist eine strenge Etalumgebung von V^h. Folglich gibt es einen eindeutig bestimmten Y-Morphismus $Y' \to U'$, dessen Komposition mit der Projektion $U' \to U$ also einen eindeutig bestimmten Y-Morphismus $Y' \to U$ liefert. Es bleibt noch zu zeigen, daß sich jeder Morphismus $(X \to U)$ eines Schemas X in das betrachtete projektive System (U) zu einem eindeutig bestimmten Morphismus $X \to Y'$ liften läßt. Dazu braucht man nur das konfinale Teilsystem aller affinen U zu betrachten. Es sei B die Vereinigung aller Bilder der Ringe $\mathcal{O}_U(U)$ in $\mathcal{O}_X(X)$, $N =: \mathrm{Kern}(A \to B)$, und V sei durch das Ideal J definiert. Dann gilt $A/J + N \simeq B/JB$, da

$$\mathcal{O}_U(U)/J\mathcal{O}_U(u) + N\mathcal{O}_U(U) \simeq A/J + N$$

für alle affinen strengen Etalumgebungen $U \to Y$ gilt. Wir zeigen, daß $(B, V(JB))$ relativ zu $(A/N, V(N + J/N))$ Henselsch ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von $A \to B$ zu $A^h \to B$ und somit einen eindeutig bestimmten Morphismus $X \to \mathrm{Spec}(B) \to Y'$. Es sei also f ein normiertes Polynom aus $A[T]$, so daß $f(0) \equiv 0 \pmod J$, $F'(0)$ Einheit $(\mathrm{mod}\ J)$ ist. Dann ist $f \equiv Tg \pmod{JA[T]}$, $g \in A[T]$ ein normiertes Polynom und

$$TA[T] + gA[T] + JA[T] = A[T].$$

Dann ist $\mathrm{Spec}(A[T]/fA[T])_g$ eine strenge Etalumgebung von V; also gibt es einen Homöomorphismus $A[T] \to B$, $T \mapsto b$, so daß $f(b) = 0$ und $g(b)$ Einheit in B ist, q.e.d.

Als Folgerung erhält man unter anderem:

3.7.2. Korollar. *Ist X ein A-Schema, A^h die Henselsche Abschließung von A in einer abgeschlossenen Teilmenge V von Y, $Y' =: \mathrm{Spec}(A^h)$, $X' =: X \times_Y Y'$, so ist*

$$\Omega_{X'|Y} = \mathcal{O}_{Y'} \otimes_Y \Omega_{X|Y}.$$

Das folgt aus der Tatsache, daß für jeden Etalmorphismus $U \to Y$

$$\Omega_{(X \times_Y U)|Y} \simeq \mathcal{O}_U \otimes_Y \Omega_{X|Y}$$

gilt und daß Y' Limes von Etalmorphismen ist (und

$$\Omega_{\text{lim-proj}\,(X \times_Y U)|Y} = \text{lim-ind}\ \Omega_{(X \times_Y U)|Y}$$

nach Definition des Differentialmoduls).

3.8. Glatte Morphismen und vollständige Durchschnitte

3.8.1. Satz. *Für einen Morphismus $p: X \to Y$ lokal von endlicher Darstellung sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *In einer Umgebung U jedes Punktes x von X faktorisiert p in der Form $U \xrightarrow{q} Y \times \mathsf{A}^n \to Y$ mit einem Etalmorphismus q.*

(ii) *p ist flach, und die geometrischen Fasern sind regulär.* (Ein Schema X heißt *regulär*, wenn die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ alle regulär sind.)

(iii) *Die kanonische Abbildung in* 3.6.3., (1) *ist surjektiv.*

Der Morphismus p heißt *glatt*.

Der Beweis ist analog dem von 3.6.2. und 3.6.3. mit folgender Modifikation beim Beweis der Implikation (iii) $\Rightarrow$ (ii): Man betrachte ein minimales Erzeugendensystem des Maximalideals von $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ $(y =: p(x))$, repräsentiert durch Schnitte $t_1, \ldots, t_n$ von $\mathcal{O}_{X'}$, die in einer Umgebung U von x definiert sind. Dann erhält man einen unverzweigten Y-Morphismus $U \to Y \times \mathsf{A}^n$ durch die Zuordnung $T_i \mapsto t_i$ (wenn man U hinreichend klein wählt). Man kann dann U als lokal abgeschlossenen Unterraum eines Etalraumes über $Y \times \mathsf{A}^n$ voraussetzen. Analog wie in 3.6.3. folgt dann, daß das sogar eine offene Einbettung (in einer Umgebung von x) ist.

Die Zahl n ist die relative Dimension von p in x, insbesondere sind die glatten Morphismen der relativen Dimension 0 genau die Etalmorphismen. Bei glatten Morphismen übertragen sich Eigenschaften von Y wie z. B. „reduziert", „normal", „Cohen-Macauly", „regulär" auf X; die Dimension, homologische Dimension, Tiefe („prof") usw. in abgeschlossenen Punkten ihrer Faser vergrößern sich um die relative Dimension.

Aus (i) *folgt, daß der universelle Differentialmodul $\Omega_{X|Y}$ eines glatten Morphismus $X \to Y$ lokal frei vom Rang n ist.*

3.8.2. Satz. *Ist $X \to Y$ glatt und $Z \to X$ eine abgeschlossene Einbettung, definiert durch eine Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_X$ von endlichem Typ, so ist $Z \to Y$ genau dann glatt, wenn $\Omega_{Z|Y}$ lokal frei und die kanonische Abbildung $J/J^2 \to \Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$ ($f \bmod J^2 \mapsto df \otimes 1$) injektiv ist.*

Beweis. Wir weisen nach, daß $Z \to Y$ das Kriterium (iii) des vorigen Satzes erfüllt. Es sei also R ein lokaler Ring, $I \subseteq R$ ein nilpotentes Ideal, und es sei ein kommutatives Diagramm gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & = & Z & \to & X & \to & Y \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle \psi_0} & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}(R/I) & \to & \mathrm{Spec}(R) & = & \mathrm{Spec}(R) & = & \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

φ_0 läßt sich zunächst, da $X|Y$ glatt ist, zu einem Morphismus $\psi_0: \mathrm{Spec}(R) \to X$ liften. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $I^2 = 0$ ist (dann ist I ein R/I-Modul). Dann liefert jeder Homomorphismus

$$h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X|Y}, \psi_{0*}(I^\sim)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z, \varphi_{0*}(I^\sim))$$

einen neuen Morphismus $\psi: \mathrm{Spec}(R) \to X$ mit derselben Abbildung der zugrunde liegenden Räume wie ψ_0 (und φ_0) durch

$$f \mapsto f(\psi_0) + h(df) =: f(\psi)$$

für Funktionen f auf X (da $h(df)\,h(dg) = 0$ ist wegen $I^2 = 0$). Es ist h so zu wählen, daß $f(\psi) = 0$ für Funktionen f aus J gilt; dann faktorisiert ψ über Z.

Ist $z \in Z$ das Bild des abgeschlossenen Punktes von $\operatorname{Spec}(R/I)$, so genügt es, anstelle von X und Z hinreichend kleine Umgebungen von z in X und Z zu betrachten. Man kann daher annehmen, daß

$$0 \to J/J^2 \to \Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z|Y} \to 0$$

zerfällt und sämtliche Modulgarben in dieser Folge frei sind. Dann besitzt also $\Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$ eine Basis der Form $df_1 \otimes 1, \ldots, df_r \otimes 1, w_{r+1}, \ldots, w_n$, so daß $f_1, \ldots, f_r$ das Ideal J erzeugen, und h ist so zu bestimmen, daß

$$h(df_i) = -f(\psi_0) \in I$$

ist, was stets möglich ist, q.e.d.

3.8.3. Bemerkungen. 1. Ist $X = \mathbb{A}^n \times Y$ und $Z \subseteq X$ durch Polynome $f_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, f_r(t_1, \ldots, t_n)$ mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_Y(Y)$ definiert, so daß in $z \in Z$ die f_i eine Minimalbasis von J_z bilden, so ist

$$0 \to (J/J^2)_z \to (\Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z)_z \to (\Omega_{Z|Y})_z \to 0$$

genau dann exakt und $(\Omega_{Z|Y})_z$ frei, wenn die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(z)\right)$ den Rang r hat.

Der Satz 3.8.2. ist also das *Jacobische Kriterium für einfache Punkte*. Denn $\operatorname{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(z)\right) = r$ bedeutet, daß (bei geeigneter Numerierung der t_j) wegen

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t_j} dt_j$$

in $(\Omega_{X|Y})_z$ eine Basis der Form

$$df_1, \ldots, df_r, \qquad dt_{r+1}, \ldots, dt_n$$

existiert.

2. Es sei $p : X \to Y$ lokal von endlicher Darstellung. Wir nennen p glatt in $x \in X$, wenn es eine Umgebung U von x in X gibt und $U \to Y$ glatt ist. Die Menge $S(p) = S(X|Y)$ aller Punkte von X, in denen p nicht glatt ist, ist dann abgeschlossen in X und heißt der *singuläre Ort* von p bzw. $X|Y$.

Nach der ersten Bemerkung wird $S(X|Y)$ lokal durch gewisse Minoren einer Funktionalmatrix definiert.

3. *Ist X ein reduziertes algebraisches k-Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, so ist $X - S(X|k)$ dicht in X.*

Ist darüber hinaus $\Omega_{X|k}$ lokal frei, so ist X singularitätenfrei (d. h. $X \to \operatorname{Spec}(k)$ glatt).

Beweis. Man kann zum Beweis der ersten Behauptung annehmen, daß X affin und irreduzibel ist, der Koordinatenring $\mathcal{O}_X(X) = A$ ist dann ein über k endlich erzeugter Integritätsbereich, daher ist $\Omega_{A|k}$ ein endlich erzeugter A-Modul, und es gibt eine nicht leere offene Menge $D(f) \subseteq X$, so daß $(\Omega_{A|k})_f = \Omega_{A_f|k}$ frei ist.

Wir können X durch $D(f)$ ersetzen und daher annehmen, daß $\Omega_{A|k}$ frei ist. Es sei $dt_1, \ldots, dt_m$ eine Basis von $\Omega_{A|k}$, $t_i \in A$ und $B = k[t_1, \ldots, t_m] \subseteq A$. Dann ist $\Omega_{B|k}$ durch $dt_1, \ldots, dt_m$ erzeugt, also

$$A \otimes_B \Omega_{B|k} \to \Omega_{A|k}$$

surjektiv und somit a) $\Omega_{B|k}$ frei und b) $\Omega_{A|B} = 0$. Aus b) folgt, daß $p : X \to \operatorname{Spec}(B)$ unverzweigt ist. Ist außerdem B normal, so folgt daraus nach 3.6.2.2., daß p ein Etalmorphismus ist. Daher genügt zu zeigen: Aus a) folgt, daß $\operatorname{Spec}(B) = \mathbb{A}_k{}^m$ ist, d. h., daß $t_1, \ldots, t_m$ algebraisch unabhängig sind. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine Relation $F(t_1, \ldots, t_m) = 0$, die nicht von der Form $F = G^p$, $p > 1$, ist (da B reduziert ist). Dann wäre

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial T_j}(t)\, dt_j = 0,$$

also $\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = 0$, d. h., jedes T_j würde nur in Potenzen von $T_j{}^p$ (p Charakteristik von k) in F vorkommen, d. h. $F(T_1, \ldots, T_m) = G(T_1, \ldots, T_m)^p$ mit einem Polynom $G \in k[T_1, \ldots, T_m]$ (da man aus den Koeffizienten von F die p-ten Wurzeln ziehen kann). Folglich führt die Annahme zu einem Widerspruch. Damit ist gleichzeitig auch die zweite Aussage bewiesen.

4. *Es sei Y ein Noethersches Schema, $X \to Y$ ein glatter Morphismus, $Z \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema, definiert durch die Idealgarbe J. Ist $\operatorname{codh}_{S(Z|Y)}(J/J^2) > 0$, so ist die Folge*

$$0 \to J/J^2 \xrightarrow{v} \Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z|Y} \to 0$$

exakt.

(Ist Z ein Schema, $V \subseteq Z$ eine abgeschlossene Teilmenge, $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe, so bedeutet $\operatorname{codh}_V(\mathcal{F}) > 0$: Zu jedem Punkt $z \in V$ gibt es ein $f \in \mathfrak{m}_z \subseteq \mathcal{O}_{Z,z}$, das kein Nullteiler in F_z ist.)

Beweis. Es sei $K = \operatorname{Kern}(v)$, aus $\operatorname{supp}(K) \subseteq S(X/Y)$ und $\operatorname{codh}_{S(X/Y)}(J/J^2) > 0$ folgt $\operatorname{Hom}(K, J/J^2) = 0$, also ist $K = 0$.

Im folgenden sei $p : X \to Y$ ein Morphismus Noetherscher Schemata, $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, definiert durch die Idealgarbe J. Das Unterschema Z heißt *vollständiger Durchschnitt* in $z \in X$ über Y, wenn J_z durch eine $\mathcal{O}_{X,z}$-reguläre Folge $f_1, \ldots, f_r$ erzeugt wird und $\mathcal{O}_{Z,z}$ flach über $\mathcal{O}_{Y,p(z)}$ ist. Das ist z. B. der Fall, wenn $\mathcal{O}_{X,z}$ und $\mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{X,z}/J_z$ reguläre lokale Ringe sind (und $X \to Y$ flach ist), da dann J_z durch einen Teil eines regulären Parametersystems erzeugt wird. Also ist ein Y-glattes Unterschema Z eines Y-glatten Schemas X in jedem Punkt vollständiger Durchschnitt. Z heißt lokal vollständiger Durchschnitt in X über Y, wenn Z in jedem Punkt vollständiger Durchschnitt über Y ist.

3.8.4. Satz.

(1) *Ist Z in X lokal vollständiger Durchschnitt über Y, so ist J/J^2 eine lokal freie $\mathcal{O}_Z$-Modulgarbe.*

(2) *Es sei $p : X \to Y$ glatt und $S(Z/Y)$ enthalte keine Komponente einer Faser von $Z \to Y$.*

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $0 \to J/J^2 \to \Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z|Y} \to 0$

ist exakt und J/J^2 lokal freie $\mathcal{O}_Z$-Modulgarbe.

(ii) *Z ist lokal vollständiger Durchschnitt in X über Y.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus folgendem Hilfssatz:

Wird ein Ideal I eines Ringes A durch eine reguläre Folge $f_1, \ldots, f_r$ erzeugt, so ist I/I^2 frei vom Rang r, erzeugt durch die f_i mod I^2.

Zum Beweis ist zu zeigen: Ist $\sum_{i=1}^{r} g_i f_i \in I^2$, so sind die $g_i \in I$. Da $I^2 = If_1 + \cdots + If_r$ ist, kann man annehmen, daß $\sum_{i=1}^{r} g_i f_i = 0$ ist, der Beweis $g_i \in I$ erfolgt durch Induktion nach r. Modulo $I_1 =: \sum_{i=1}^{r-1} Af_i$ ist f_r regulär, also $g_r \in I_1$, $g_r = \sum_{i=1}^{r-1} h_i f_i$ und somit

$$\sum_{i=1}^{r} g_i f_i = \sum_{i=1}^{r-1} (g_i + h_i f_r) f_i = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist also $g_i + h_i f_r \in I_1$, $g_i \in I$.

Beweis von (2), (i) $\Rightarrow$ (ii). Durch Lokalisierung kann man $\Omega_{X|Y}$ und J/J^2 frei vom Rang n bzw. r annehmen. Es sei $y \in Y$, und X_y, Z_y seien die Fasern in y. Auf $Z - S(X/Y)$ ist

$$0 \to J/J^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to \Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to \Omega_{Z|Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to 0$$

exakt. Da $Z_y - S(X/Y)$ dicht in Z_y ist, folgt daraus, daß jede Komponente von Z_y die Dimension $n - r$ hat; außerdem wird Z_y als Unterschema von X_y in jedem Punkt z durch r Gleichungen definiert (da J/J^2 lokal r Erzeugende hat, Lemma von Nakayama anwenden!). Da X_y regulär ist, bilden diese Gleichungen eine reguläre Folge in

$$\mathcal{O}_{X_y,z} = \mathcal{O}_{X,z} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,yz}} k(y),$$

und aus 1.4.5. folgt die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es bleibt noch zu zeigen, daß $J/J^2 \to \Omega_{X|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$ injektiv ist. Wir können X, Y und Z als affin voraussetzen. Es sei $X = \operatorname{Spec}(B)$, $Y = \operatorname{Spec}(A)$, $f_1, \ldots, f_r \in B$ eine reguläre Folge und

$$Z = \operatorname{Spec}\left(B \Big/ \sum_{i=1}^{r} f_i B\right) = \operatorname{Spec}(\overline{B}).$$

Durch Induktion nach r folgt, daß für jede A-Algebra A' die Folge $f_1, \ldots, f_r (A' \otimes_A \overline{B})$-regulär ist (da $\overline{B}$ A-flach ist). Es sei P ein Maximalideal. Es genügt zu zeigen, daß für alle $m > 0$ die Abbildung

$$(J/J^2) \otimes_A (A/P^m) \to \Omega_{B|A} \otimes_B \overline{B} \otimes_A (A/P^m)$$

injektiv ist. Man kann also annehmen, daß A ein lokaler Artin-Ring ist. Da B/PB regulär und $P^n = 0$ ist, ist B ein Cohen-Macauly-Ring. Folglich hat $\overline{B}$ keine eingebetteten Primideale, also ist $\operatorname{codh}_{S(Z|Y)}(J/J^2) > 0$ (da J/J^2 freier B-Modul und $Z - S(Z/Y)$ dicht in Z ist). Nach 3.8.3. folgt daraus die Behauptung, q.e.d.

4. Etalüberlagerungen

4.1. Definition

Ganze Etalmorphismen $p: X \to Y$ nennt man *Etalüberlagerungen*. Die geometrischen Fasern in einem Punkt von $Y(k)$ sind dann also ganz und diskret über k, also endlich. Die Eigenschaft „ganz" ist eine universelle Eigenschaft, und ganze Morphismen sind abgeschlossen (going-down theorem). Folglich sind Etalüberlagerungen universell abgeschlossen.

Für Schemata gilt auch die Umkehrung: *Ein eigentlicher* (=: universell abgeschlossener) *Etalmorphismus ist ganz, also eine Etalüberlagerung.*

Zum Beweis kann man sich auf den Fall, daß Y affin ist, beschränken. Dann gibt es eine offene Einbettung $X \subset X'$ in ein Y-Schema X', das endlich über Y ist (Zariskis Hauptsatz). Der Graph von $X \to X'$ ist eine abgeschlossene Einbettung $X \to X \times_Y X'$, und $X \times_Y X' \to X'$ ist abgeschlossen, also ist $X \to X'$ abgeschlossen und offen und daher $X \to Y$ endlich.

Es sei Y ein Schema. Ist $p: X \to Y$ eine Etalüberlagerung, so ist $p_* \mathcal{O}_X = \mathcal{A}$ eine lokal freie Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Algebren von endlichem Rang, der Rang ist gleich der Anzahl der Punkte der geometrischen Fasern.

Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine lokal freie Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Algebren, so gibt es ein Schema $X = \operatorname{Spec}(\mathcal{A})$ und einen endlichen Morphismus $p: X \to Y$, so daß $p_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ und für $q: Z \to Y$

$$X(Z)_Y \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y\text{-Alg.}}(\mathcal{A}, q\mathcal{O}_Z)$$

gilt. p ist genau dann eine Etalüberlagerung, wenn $\mathcal{A}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$ eine separable $k(y)$-Algebra für alle $y \in Y$ ist.

Ein analoger Satz gilt für komplexe Räume.

Der Beweis ist einfach, da man sich auf den Fall beschränken kann, daß Y und damit X affin ist, und da für Moduln von endlicher Darstellung „flach" gleichbedeutend mit „lokal frei" ist.

4.2. Quotienten bezüglich einer endlichen Gruppe

Wir betrachten jetzt eine wichtige Klasse von Beispielen. Dazu machen wir zunächst eine Vorbemerkung. Wir betrachten Schemata X, auf denen eine endliche Gruppe G (von rechts) operiert, d. h., für das ein Homomorphismus

$$G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hom}\,(X, X), \quad P \mapsto Pg, \quad f \mapsto g(f) \quad \text{für Funktionen } f,$$

gegeben ist. Ein Schema Y mit einem Morphismus $p : X \to Y$ heißt *Quotient von X bezüglich G*, wenn für alle Schemata Z der Morphismus p einen Isomorphismus $Z(Y) \simeq Z(X)^G$ induziert, wobei

$$Z(X)^G =: \{\varphi : X \to Z;\ \varphi \circ g = \varphi \quad \text{für alle} \quad g \in G\}$$

($\varphi \circ g$ bezeichnet die Komposition $X \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\varphi} Z$) ist. Dadurch ist der Quotient $Y =: X/G$ bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin, so ist $\mathrm{Spec}(A^G)$ ein Quotient von X bezüglich G (vgl. 1.2.). Daraus folgt die Existenz eines Quotienten im Fall, daß die Orbits in affinen Mengen enthalten sind, wie folgt:

Ist U eine affine Umgebung eines Orbits $PG = \{Pg;\ g \in G\}$, dann ist $U_0 = \bigcap_{g \in G} Ug$ eine stabile, in U enthaltene Umgebung des Orbits, und es gibt dann eine Funktion f auf U mit $f(Pg) \neq 0$ für alle $g \in G$ und $U_f = U_{0_f}$. Dann ist

$$V = \bigcap_{g \in G} (U_f)g = (U_0)_{n(f)},$$

wobei $n(f) =: \prod_{g \in G} g(f)$ eine stabile affine Umgebung von PG ist, und ist V/G ein Quotient von V bezüglich G, so ist

$$\underline{V/G} = \underline{V}/G, \qquad \mathcal{O}_{V/G} = (p_* \mathcal{O}_V)^G.$$

Hieraus folgt, daß

$$X/G =: (\underline{X}/G, (p_*\mathcal{O}_X)^G) \qquad (p : \underline{X} \to \underline{X}/G \text{ Quotientenabbildung})$$

ein Schema und Quotient von X bezüglich G ($\underline{X}/G =$: Quotient des zugrunde liegenden Raumes mit der Quotientenabbildung $p : \underline{X} \to \underline{X}/G$, $(p_*\mathcal{O}_X)^G =$ Garbe der G-invarianten Funktionen) ist. Im allgemeinen Fall ist $Y = (\underline{X}/G, (p_*\mathcal{O}_X)^G)$ der Quotient von X bezüglich G in der Kategorie der geometrischen Räume, dieser Raum heißt deshalb *geometrischer Quotient*.

Existiert der Quotient $X \xrightarrow{p} Y$ von X bezüglich G in der Kategorie der Schemata, so daß p quasiendlich ist, so ist p endlich und Y der geometrische Quotient von X bezüglich G.

Beweis. Aus Zariskis Hauptsatz folgt, wenn p quasiendlich ist, daß die Orbits affine Umgebungen besitzen, also ist der geometrische Quotient ein Schema. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß die Orbits affine Umgebungen besitzen (das ist z. B. für quasiprojektive Schemata der Fall). Den Stabilisator D_P eines Punktes $P \in X$

$$D_P =: \{g \in G;\ Pg = P\}$$

nennen wir *Zerlegungsgruppe von P* und die Untergruppe

$$I_P =: \{g \in D_P;\ g \mid k(P) = \mathrm{id}_{k(P)}\}$$

Trägheitsgruppe von P. (Die Elemente von g operieren auf $k(P)$ und lassen $k(p(P))$ invariant).

Also ist I_P Normalteiler in $k(P)$ und D_P/I_P zu einer Untergruppe der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(k(P)/k(p(P)))$ isomorph.

Wir werden zeigen: Ist $I_P = 1$, so ist $p : X \to X/G$ in einer Umgebung von P ein Etalmorphismus bzw. in Verallgemeinerung hiervon (nach M. Raynaud).

4.2.1. Satz. *Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so daß $I_P \subseteq H$ ist, so ist $q : X/H \to X/G$ ein Etalmorphismus in einer Umgebung von $r(P)$ ($r : X \to X/H$ Projektion).*

Beweis. 1. Ist X affin, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, so ist $X/G = \mathrm{Spec}(B^G)$ und $B^G \to B \rightrightarrows \prod_G B$ exakt, wobei die Abbildungen durch $b \mapsto (b, \ldots, b)$ bzw. $b \mapsto (g_1 b, \ldots, g_n b)$ gegeben sind. Folglich gilt: Ist $Y' \to X/G =: Y$ flach, so ist

$$(X \times_Y Y')/G = (X/G) \times_Y Y'$$

(wobei G auf dem ersten Faktor operiert).

2. Ist $(Y', Q') \to (Y, Q)$ eine strenge Etalumgebung, $Q = p(P)$ und ist der Morphismus $(X \times_Y Y')/H \to Y'$ etaliert in einer Umgebung des durch P und Q' eindeutig bestimmten Punktes $r'(P')$ von $(X \times_Y Y')/H$, so ist $X/H \to Y$ ein Etalmorphismus in einer Umgebung von $r(P)$ (da $Y' \to Y$ flach und offen ist).

3. Ist $Y^h = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^h_{Y,Q})$, dann ist

$$X \times_Y Y^h = \mathrm{Spec}\left(\prod_{i=1}^m B_i\right),$$

wobei B_i die lokalen Ringe in den über Q liegenden Punkten von $X \times_Y Y^h$ sind. Einer dieser Punkte, etwa P_1, entspricht dem Punkt P. Dann ist $D_P = D_{P_1}$ und $\mathcal{O}^h_{Y,Q} = B_1{}^{D_P}$, da ein Element b aus $\prod_{i=1}^m B_i$ genau dann G-invariant ist, wenn seine Komponenten D_{P_i}-invariant sind, und da b dann durch eine dieser Komponenten eindeutig bestimmt ist (da G transitiv auf den Komponenten B_i operiert!).

Auf $B_1{}^{I_P}$ und seinem Restklassenkörper K_1 operiert D_P/I_P treu. Es sei $t \in B_1{}^{I_P}$ derart, daß t in K_1 ein bezüglich $K_1{}^{D_P}$ primitives Element induziert, d.h. $K_1{}^{D_P}(\bar{t}) = K_1$. Dann ist

$$F(T) = \prod_{\bar{g} \in D_P/I_P} (T - \bar{g}(t))$$

D_P-invariant, also aus $\mathcal{O}^h_{Y,Q}$ und in $K_1[T]$ irreduzibel, also auch in $\mathcal{O}_Y{}^h[T]$. In $B_1{}^{I_P}[T]$ zerfällt F in teilerfremde Linearfaktoren.

Da $(Y^h, Q^h) = \text{lim-proj}\,(Y', Q')$ ist, wobei (Y', Q') alle strengen Etalumgebungen, von (Y, Q) durchläuft, gilt das ganze schon für eine strenge Etalumgebung (Y', Q') d. h.:

a) $X \times_Y Y' = \coprod_{i=1}^m X_i$, so daß in jedem X_i genau ein Punkt liegt über Q' und die X_i zueinander konjugiert sind.

b) Auf Y' gibt es ein normiertes Polynom F vom Grad $[D_P : I_P]$, das auf X_1/I_P in paarweise teilerfremde Linearfaktoren zerfällt, auf denen D_P/I_P treu operiert.

Aus a) folgt, daß X/H in disjunkte offene Teile $X_i/H \cap D_{P_i}$ zerfällt, und es genügt daher wegen 2. zu zeigen, daß $H_1/H \cap D_P \to Y'$ ein Etalmorphismus in einer Umgebung des Bildes von P_1 ist.

Es sei Y' affin, $Y' = \operatorname{Spec}(A)$, $X' =: X_1/I_P = \operatorname{Spec}(B')$, $G' = D_P/I_{P'}$, so daß $B'^{G'} = A'$ ist. Ist ferner $A'' = A'[T]/FA'[T]$, dann ist

$$B' \otimes_{A'} A'' \simeq B'[T]/FB'[T] \simeq \prod_{i=1}^{q} B',$$

$q = \text{Ordnung}\,(G')$, da F in B' in disjunkte Linearfaktoren zerfällt. G' operiert treu und transitiv auf der Menge der Faktoren, also ist $A'' = (B' \otimes_{A'} A'')^{G'} \simeq B'$, q.e.d.

4.2.2. Bemerkung. Satz 4.2.1. läßt sich in folgendem Sinne umkehren:

1. *Ist X Integritätsschema und $X/H \to Y$ unverzweigt auf einer offenen Menge U von X/H, so ist $r : X \to X/H$ für alle $P \in r^{-1}(U)$ I_P-invariant.*

2. *Ist $X \to Y$ unverzweigt und X zusammenhängend, so ist $I_P = I$ unabhängig von P und operiert trivial auf X* (d. h., *G/I operiert auf X ohne Trägheit*).

Beweis. Beide Aussagen folgen daraus, daß der Differenzkern von $X \underset{\varsigma(r)}{\overset{r}{\rightrightarrows}} X/H$ stets abgeschlossen ist.

Ist $X/H \to Y$ unverzweigt in einer Umgebung von $r(P)$ und $g \in I_P$, so ist P innerer Punkt von Δ in X (vgl. 3.5.2.1.), q.e.d.

4.2.3. Bemerkung. *Ist $Y = X/G$, operiert G ohne Trägheit und ist X zusammenhängend, so ist $G^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Aut}(X/Y)$ (= Gruppe der A-Automorphismen von X) ein Isomorphismus.*

Beweis. Ist $s \in \operatorname{Aut}(X/Y)$, $P \in X$, so ist $s(P) = Pg$ für ein $g \in G$. Dann ist $t =: g^{-1}(s)$, $Q \mapsto s(Q)\,g^{-1}$, ebenfalls ein Y-Automorphismus mit $t(P) = P$. Folglich induziert t ein $t^* : k(P) \xrightarrow{\sim} k(P)$. Da offensichtlich $D_P/I_P \simeq \operatorname{Gal}(k(P)/k(p(P)))$ und $I_P = 1$ ist, gibt es ein $h \in D_P$ mit $t^* = h^*$. Dann stimmen also t und h in P überein und nach dem vorangehenden Schluß daher auf ganz X. Also ist $s(Q) = Qhg$ für alle Q, $s = hg$, q.e.d.

4.3. Prinzipalüberlagerungen

Die folgenden Betrachtungen werden äußerst anschaulich, wenn man das analoge Beispiel der Prinzipal-G-Bündel in der Topologie vor Augen hat. Anstelle offener Überdeckungen werden treuflache quasikompakte Morphismen (fpqc) : $U \to Y$ betrachtet (die die offenen Überdeckungen als Spezialfall enthalten). (Den Durchschnitten entspricht das Faserprodukt über Y.)

Es sei G weiterhin eine endliche Gruppe. Jedes Schema Y definiert ein Y-Gruppenschema $G_Y = G \times Y$ wie folgt (für ein Y-Schema Z): $G_Y(Z)_Y$ = Menge aller stetigen Abbildungen $\gamma : Z \to G$ (G mit der diskreten Topologie).

Es gibt einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$G \to G_Y(Z)_Y;$$

im Fall zusammenhängender Z ist das ein Isomorphismus.

Als Schema ist $G \times Y$ isomorph zu $\coprod_G Y$, der zugrunde liegende Raum ist $G \times Y$ (mit diskreter Topologie auf G).

Eine Operation von G auf einem Y-Schema X (trivial auf Y) ist gleichbedeutend mit einem Morphismus

$$\mu : G_Y \times_Y X \to X,$$

$\mu(g, P) = Pg$ auf der g-ten Komponente von $\left(\coprod_G Y\right) \times_Y X$.

X heißt *formell prinzipal homogen*, wenn G auf X operiert und

$$G_Y \times_Y X \xrightarrow{(\mu,\,\mathrm{pr}_X)} X \times_Y X, \qquad (g, P) \mapsto (Pg, P)$$

ein Isomorphismus ist (gleichbedeutend damit ist ein Y-Morphismus

$$\varepsilon =: \mathrm{pr}_{G_Y} \circ (\mu, \mathrm{pr}_X)^{-1} : (X \times_Y X) \to G_Y).$$

X heißt *lokal trivial* bzw. ein G-Prinzipalbündel, wenn ein (fpqc)-Morphismus $U \to Y$ existiert und ein U-Isomorphismus $X \times_Y U \simeq G \times U$.

Wir schreiben jetzt vorübergehend X/U usw. anstelle von $X \times_Y U$, U^n anstelle des n-fachen Faserproduktes von U über Y. $X/U \simeq G \times U$ ist gleichbedeutend mit einer stetigen Abbildung $\varepsilon : \underline{X/U} \to G$, so daß

$$\varepsilon(Pg) = \varepsilon(P)\,g \qquad (g \in G) \tag{1}$$

und

$$\xi \mapsto \varepsilon \circ \xi$$

eine Bijektion $\operatorname{Hom}_U(Z, X/U) \to \operatorname{Hom}(\underline{Z}, G)$ ist für alle U-Schemata Z. Die beiden Projektionen $U^2 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} U$ induzieren dann stetige Abbildungen

$$\varepsilon_i : \underline{X/U^2} \to G, \qquad \varepsilon_i = \varepsilon \circ p_i$$

mit analogen Eigenschaften, und ist q die Projektion $X/U^2 \to U^2$, so ist

$$\varepsilon_1 = (\gamma \circ q)\,\varepsilon_2 \tag{2}$$

mit einer stetigen Abbildung $\gamma = \gamma_X : \underline{U}^2 \to G$ (da $\varepsilon_1(P)\,\varepsilon_2(P)^{-1}$ auf den Fasern von q konstant ist wegen (1)).

Aus (2) folgt sofort wegen $p_1 \circ p_{ij} = q_i$, $p_2 \circ p_{ij} = q_j$ $(i < j)$

$$(\gamma \circ p_{12})\,(\gamma \circ p_{23}) = \gamma \circ p_{13} \quad \text{und} \quad \gamma \circ \delta = 1, \tag{3}$$

wobei $p_{ij} : U^3 \to U^2$ die Projektion auf den (i,j)-ten Faktor ist, $\delta : U \to U^2$ die Diagonale, $q_i : U^3 \to U$ die Projektion auf den i-ten Faktor.

Es sei $Z^1(U\,|\,X, G)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\gamma : \underline{U}^2 \to G$ mit (3) (*Kozyklen auf U*). Auf $Z^1(U\,|\,Y, G)$ operiert die Gruppe $G_Y(U)$ durch

$$(f, \gamma) \mapsto (f \circ p_1)\,\gamma(f \circ p_2)^{-1}. \tag{4}$$

Die Restklassenmenge sei $H^1(U \mid Y, G)$; dann definiert $X \mid Y \mapsto$ (Klasse von γ_X) eine Abbildung

$$X \mid Y \mapsto c(X \mid Y) \in H^1(U \mid Y, G)$$

der Klasse aller G-Prinzipalbündel, die auf U trivial sind, in $H^1(U \mid Y, G)$, da ε bis auf ein $f \in G_Y(U)$ und somit γ_X bis auf eine Äquivalenz (4) eindeutig bestimmt ist.

4.3.1. Satz. *Zu jedem $c \in H^1(U \mid Y, G)$ gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutiges G-Prinzipalbündel $X \to Y$ mit $X \mid U \simeq G \times U$ und $c(X \mid Y) = c$.*

Beweis. Es sei ein Kozyklus $\gamma \in Z^1(U \mid Y, G)$ gegeben. Durch γ und p_1 ist ein Morphismus

$$\pi_1 : G \times U^2 \to G \times U$$

definiert, nämlich $(g, P) \mapsto \big(\gamma(P)\, g,\, p_1(P)\big)$, durch p_2 ein Morphismus

$$\pi_2 : G \times U^2 \to G \times U, \qquad (g, P) \mapsto \big(g, p_2(P)\big);$$

(π_1, π_2) definieren eine Äquivalenzrelation auf $G \times U$ über Y. (Man beachte die Kozyklusbedingungen! Zum Beispiel ergibt sich die Symmetrie aus der Abbildung $G \times U^2 \simeq G \times U^2$, $(g, P) \mapsto \big(g, \tau(P)\big)$, wobei $\tau : U^2 \xrightarrow{\sim} U^2$ die Symmetrie von U^2 ist. Aus (3) folgt $\gamma \circ \tau = \gamma^{-1}$, indem man (3) mit $j : U^2 \to U^3$, $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta, \xi)$ komponiert!)

Dann ist X der Quotient von $G \times U$ bezüglich (π_1, π_2) in der Kategorie der geometrischen Räume.

Diese Eigenschaft ist notwendig (da $G \times U \to X$ fpqc). Es ist zu zeigen, daß der Quotient ein Schema ist. Dazu kann man Y als affin annehmen. Man zeigt, daß dann $X = \operatorname{Spec}(B)$ ist, wobei

$$B =: \{f \in H^0(G \times U, \mathcal{O}_{G \times U}),\ f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2\}$$

ist. Zum Beweis beachte man:

1. Wenn X existiert, so ist es notwendig von dieser Form.

2. Bei treuflachem Basiswechsel $Y' \to Y$, $Y' = \operatorname{Spec}(A')$, $U' = U \times_Y Y' \to U$ geht B in $B' =: B \otimes_A A'$ über $\big(Y = \operatorname{Spec}(A)\big)$.

3. Man kann A' so wählen, daß $U' \to Y'$ einen Schnitt $s : Y' \to U'$ besitzt $(Y' = \coprod_{\nu=1}^{m} U_\nu$, U_ν affine Überdeckung von $U)$.

Dann existiert offenbar X', nämlich $X' = G \times Y'$, da der gegebene Kozyklus γ auf U'^2 trivial wird. Außerdem ist X' wegen 1. und 2. gleich $\operatorname{Spec}(B \otimes_A A')$. Das bedeutet aber, daß der kanonische G-Morphismus $\psi : G \times U \to \operatorname{Spec}(B) \times_Y U$ bei Übergang zu U' ein Isomorphismus wird. Also ist ψ bereits ein Isomorphismus. Nach Konstruktion ist $c(X \mid Y) =$ Klasse von γ, q.e.d.

4.3.2. Satz. *Folgende Eigenschaften für $X \to Y$ sind äquivalent:*

(1) *$X \to Y$ endlich, $Y = X/G$, und G operiert ohne Trägheit auf X.*
(2) *$X \to Y$ ist G-Prinzipalbündel.*
(3) *$X \to Y$ ist formell prinzipal homogen mit G als Strukturgruppe, treuflach und quasikompakt.*

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$: $G \times X \simeq X \times_Y X$ gilt, weil $v_g =: (g, \mathrm{id}_X) : X \to X \times_Y X$ offene und abgeschlossene Einbettungen sind, auf der g-ten Komponente von $G \times X = G_Y \times_Y X$ mit (μ, pr_X) übereinstimmen und $X \times_Y X$ überdecken.

$(1) \Rightarrow (3)$ analog, $(3) \Rightarrow (2)$ ist trivial, es bleibt also zu zeigen:

$(2) \Rightarrow (1)$: Aus (2) folgt unmittelbar, daß $X \to Y$ endlich ist, da das nach einer fpqc-Erweiterung $U \to Y$ gilt (man kann sich auf den Fall affiner U, Y beschränken; dann ist $X \simeq \operatorname{Spec}\big(\mathcal{O}_X(X)\big)\big)$. Wegen

$$(X \times_Y U)/G = (X/G) \times_Y U = U$$

ist dann aber $X/G = Y$, und G operiert ohne Trägheit.

4.3.3. Korollar. *$H^1(Y, G) = \text{lim-ind}_{U \to Y} H^1(U \mid Y, G)$ klassifiziert die Isomorphieklassen der G-Prinzipalbündel, wobei $U \to Y$ alle fpqc-Morphismen über Y durchläuft. Außerdem ist $H^1(Y, G)$ auch schon Kolimes über alle Etalüberlagerungen $U \to Y$.*

Beispiele. 1. Ist Y Spektrum eines Körpers, so entsprechen die G-Prinzipalbündel über Y, die zusammenhängend sind, genau den Galois-Erweiterungen mit der Galois-Gruppe G.

2. Ist Y eine normale algebraische Mannigfaltigkeit mit dem Funktionenkörper K, so entsprechen die G-Prinzipalbündel über Y, die zusammenhängend sind, denjenigen Galois-Erweiterungen $L|K$ mit der Galois-Gruppe G, für die die ganze Abschließung von Y in L in allen Punkten unverzweigt über Y ist.

4.4. Fundamentalgruppe

Es sei Y ein zusammenhängendes Schema und $\mathcal{E}t(Y)$ die Kategorie aller Etalüberlagerungen von Y (mit Y-Morphismen).

Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\eta \in Y(k)$ ein geometrischer Punkt, dann ist

$$X \mapsto F_\eta(X) = X(k)_Y$$

(Spec(k) als Y-Schema mittels η betrachtet!) ein Funktor von $\mathcal{E}t(Y)$ in die Kategorie der endlichen Mengen.

Die Etalüberlagerungen von Y sind das algebraische Analogon der (endlichen) Überlagerungsräume der Topologie; im Gegensatz zur Topologie gibt es aber im allgemeinen keine universelle Überlagerung. Ein Ersatz dafür sind die Funktoren F_η. Daher erscheint folgende Definition sinnvoll:

$$\pi = \pi_1(Y, \eta) =: \operatorname{Aut}(F_\eta) \qquad \text{(Automorphismengruppe von } F_\eta)$$

heißt *Fundamentalgruppe* von (Y, η).

π operiert auf jedem $F_\eta(X)$ durch $\gamma \mapsto \gamma_X$ $(\gamma \in \pi)$. Es sei

$$\pi_X =: \{\gamma \in \pi;\ \gamma_X = \mathrm{id}_{F_\eta(X)}\},$$

das sind Untergruppen von endlichem Index, und es ist $\pi_{X_1} \cap \pi_{X_2} = \pi_{X_1 \amalg X_2}$ wegen $F_\eta(X_1 \amalg X_2) = F_\eta(X_1) \amalg F_\eta(X_2)$. Aus der Funktoreigenschaft folgt sofort

$$\pi = \text{lim-proj}\,(\pi/\pi_X).$$

Folglich besitzt π in natürlicher Weise die Struktur einer proendlichen Gruppe, und π operiert stetig auf den $F_\eta(X)$. Die wichtigste Eigenschaft von π ist die folgende Charakterisierung:

4.4.1. Satz. *Ist $\pi = \pi_1(Y, \eta)$, dann ist der Funktor $F_\eta(X) = X(k)_Y$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Etalüberlagerungen von Y und der Kategorie der endlichen π-Mengen.* (Unter endlichen π-Mengen verstehen wir solche endliche Mengen, auf denen π stetig von links operiert.)

4.4.2. Korollar („Hauptsatz der Galois-Theorie"). *Die offenen Untergruppen $\pi_0 \subseteq \pi$ entsprechen umkehrbar eindeutig den zusammenhängenden Etalüberlagerungen X von Y. Ist π_0 Normalteiler, so ist X G-Prinzipalbündel ($G = \pi/\pi_0$).*

Beweis. X gehört zu der π-Menge π/π_0. Da π transitiv operiert, ist X zusammenhängend.

4.4.3. Korollar. *Jedem stetigen Gruppenhomomorphismus $\pi \to G$ in eine endliche Gruppe G entspricht ein G-Prinzipalbündel über Y, das den Homomorphismus $\pi \to G$ bis auf Konjugation eindeutig bestimmt, also*

$$H^1(Y, G) \simeq \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$$

($= H^1(\pi, G)$ *im Sinne der Galois-Kohomologie, G als trivialer π-Modul*).

Beweis. G mit $\pi \to G$ versehen ist ein einfaches G-Objekt (Operation von rechts) in der Kategorie der endlichen π-Mengen. Der Rest folgt aus 4.3. und 4.4.1.

Der Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe der Topologie geht aus folgendem Satz hervor, den wir ohne Beweis mitteilen:

4.4.4. *„Riemannscher Existenzsatz"* (nach H. Grauert und R. Remmert und A. Grothendieck, vgl. [19], Exp. 190). *Der Funktor „assoziierter analytischer Raum" definiert eine Äquivalenz der Kategorie der Etalüberlagerungen eines algebraischen Schemas X über $\mathbb{C}$ zur Kategorie der endlichen topologischen Überlagerungen des zu X assoziierten analytischen Raumes.*

Da für die topologischen Überlagerungen ein zu 4.4.1. analoger Satz gilt, erhält man (wenn wir mit X_{an} den zu X assoziierten komplexen Raum bezeichnen):

4.4.5. Korollar. *Für algebraische Schemata über $\mathbb{C}$ gilt*

$$\pi_1(Y, \eta) = \pi_1(Y_{\mathrm{an}}, \eta)^\wedge$$

(*$^\wedge$ bezeichne die proendliche Abschließung einer Gruppe*) *und*

$$H^1(Y, G) = H^1(Y_{\mathrm{an}}, G)$$

für endliche Gruppen G.

Es bleibt noch 4.4.1. zu beweisen:

1. *Es gibt zu jeder zusammenhängenden Etalüberlagerung $X \to Y$ ein zusammenhängendes Prinzipalbündel Z über Y mit einer Faktorisierung $Z \to X \to Y$.*

Beweis. Das Konstruktionsprinzip ist unmittelbar klar, wenn man an die Konstruktion einer kleinsten normalen Körpererweiterung einer gegebenen einfachen algebraischen Erweiterung denkt. Es sei n der Grad von X über Y und X^n das n-fache Produkt über Y, mit X_{ij} bezeichnen wir den Differenzkern der i-ten und j-ten Projektion $X^n \to X$. Nach 3.6.2., (4'), ist X_{ij} offen und abgeschlossen in X^n und daher auch

$$U = X^n - \coprod_{i<j} X_{ij}.$$

U ist invariant bezüglich der kanonischen Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf X^n, und S_n operiert ohne Fixpunkte auf U, also ist $U \to U/S_n$ eine Etalüberlagerung, ebenso $U \to Y$. Da $F_\eta(U)$ aus genau $n!$ Elementen besteht (alle n-Tupel aus $F_\eta(X)$, bei denen alle Komponenten verschieden sind!), ist $U/S_n = Y$, also U ein S_n-Prinzipalbündel über Y. Ist Z eine Zusammenhangskomponente von U, $G \subseteq S_n$ der Stabilisator von Z, dann ist $Z/G = Y$, und $X^n \to X$ induziert einen Y-Morphismus $Z \to X$.

2. *Ist F ein Funktor von $\mathscr{E}t(Y)$ in die Kategorie der Mengen, so daß*

$$F(X' \times_X X'') = F(X') \times_{F(X)} F(X''),$$

$F(Y)$ einelementig und $F(\emptyset) = \emptyset$ ist, so gibt es für zusammenhängende Z und beliebige $X \in \mathscr{E}t(Y)$ höchstens ein $\varphi : Z \to X$, das ein vorgeschriebenes $\zeta \in F(Z)$ in ein vorgeschriebenes $\xi \in F(X)$ überführt.

Beweis. Für einen Morphismus $\varphi, \psi : Z \rightrightarrows X$ ist $\mathrm{Ker}(\varphi, \psi)$ entweder leer oder $\varphi = \psi$ (da Z nach 3.6.2., (4'), zusammenhängend ist), und nach Voraussetzung ist $F(\mathrm{Ker}(\varphi, \psi)) = \mathrm{Ker}(F(\varphi), F(\psi))$.

3. *Ist G eine endliche Gruppe, Z ein G-Prinzipalbündel über Y, so operiert G einfach und transitiv auf $F_\eta(Z)$.* (Das gilt, weil G ohne Trägheit operiert!)

4. *Es sei Z ein zusammenhängendes G-Prinzipalbündel über Y, X eine zusammenhängende Etalüberlagerung und $\zeta \in F_\eta(Z)$. Ist $\mathrm{Hom}_Y(Z, X) \neq \emptyset$, so ist*

$$\mathrm{Hom}_Y(Z, X) \to F_\eta(X), \qquad \varphi \mapsto \varphi(\zeta)$$

eine Bijektion.

Beweis. Zu $\xi \in F_\eta(X)$ und $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_Y(Z, X)$ gibt es ein $\zeta_0 \in F_\eta(Z)$ mit $\varphi_0(\zeta_0) = \xi$ (φ_0 ist surjektiv, da X zusammenhängend ist). Nach 3. ist $\zeta_0 = \zeta g$, und $\varphi = g(\varphi_0)$ führt ζ in ξ über. Nach 2. ist φ eindeutig bestimmt.

5. *Es sei I die Kategorie aller (Z, ζ), $Z \to Y$ ein zusammenhängendes Prinzipalbündel mit der Gruppe $G(Z, \zeta)$, $\zeta \in F_\eta(Z)$, und Y-Morphismen $\varphi : Z' \to Z$ mit $\varphi(\zeta') = \zeta$. Dann bilden die $G(Z, \zeta)$, $(Z, \zeta) \in I$, ein projektives System (nach 3. und 4.), und es gibt eine kanonische Abbildung*

$$\lambda : \pi \to \text{lim-proj}_I\, G(Z, \zeta),$$

indem man jedem $\gamma \in \pi$ und $(Z, \zeta) \in I$ dasjenige $g(Z, \zeta)(\gamma) \in G(Z, \zeta)$ mit $\gamma_Z(\zeta) = \zeta g(Z, \zeta)(\gamma)$ zuordnet. Da γ eine natürliche Transformation von F_η ist und $\zeta \mapsto \zeta g$ durch den Y-Morphismus $Z \xrightarrow{g} Z$ induziert wird, ist

$$\gamma_Z(\zeta h) = \gamma_Z(\zeta)\, h, \qquad h \in G,$$

und hieraus folgt

$$g(Z, \zeta)(\gamma_1)\, g(Z, \zeta)(\gamma_2) = g(Z, \zeta)(\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Es zeigt sich nun, daß λ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Dazu konstruieren wir einen inversen Homomorphismus. Es sei $\big(g(Z, \zeta);\, (Z, \zeta) \in I\big)$ aus $\text{lim-proj}_I\, G(Z)$. Wir wollen einen zugehörigen Automorphismus $\gamma : F_\eta \xrightarrow{\sim} F_\eta$ konstruieren.

Es sei $X \in \mathscr{E}t(Y)$ und zunächst zusammenhängend, Z sei ein zusammenhängendes Prinzipalbündel über Y, so daß $\operatorname{Hom}_Y(Z, X) \neq \emptyset$ und $(Z, \zeta) \in I$ ist. Zu $\xi \in F_\eta(X)$ gibt es dann genau einen Morphismus $Z \to X$, bezeichnet mit $\bar{\xi}$, so daß $\bar{\xi}(\zeta) = \xi$ ist; wir definieren

$$\gamma_X(\xi) = \bar{\xi}\big(\zeta g(Z, \zeta)\big).$$

Ist X beliebige Etalüberlagerung, $X = \coprod X_i$, X_i zusammenhängend, so sei $\gamma_X = \coprod_i \gamma_{X_i}$. Man prüft leicht nach, daß $X \mapsto \gamma_X$ eine natürliche Transformation ist, also $(\gamma_X) \in \pi$, und daß dadurch ein zu $\pi \to \text{lim-proj}\, G(Z)$ inverser Homomorphismus definiert wird, q.e.d.

6. Aus 5. folgt die Behauptung nach folgender Schlußkette: Ist $\pi_0 \subset \pi$ offene Untergruppe von π, dann gibt es einen offenen Normalteiler $\bigcap_{\gamma \in \pi} \gamma \pi_0 \gamma^{-1} = \pi_0' \subseteq \pi_0$, und nach 3. ist $\pi/\pi_0' \simeq G(Z)$ für ein geeignetes $(Z, \zeta) \in I$. Der Untergruppe $H = \pi_0/\pi_0'$ von $G(Z)$ entspricht dann eine Etalüberlagerung Z/H von Y, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Ist M eine beliebige endliche π-Menge, $M = M_1 \cup \cdots \cup M_r$ die Zerlegung in π-Orbits, so entspricht jedem M_i eine bis auf Konjugation eindeutig bestimmte offene Untergruppe π_i und somit eine bis auf Isomorphie eindeutige Etalüberlagerung $E(M_i)$ von Y mit $F_\eta\big(E(M_i)\big) \simeq M_i$. Wir wählen für jedes M_i ein solches $E(M_i)$ und definieren $E(M) = E(M_1) \coprod \cdots \coprod E(M_r)$; die so definierte Zuordnung $M \mapsto E(M)$ läßt sich dann in kanonischer Weise zu einem Funktor der Kategorie der endlichen π-Mengen in $\mathscr{E}t(Y)$ fortsetzen, so daß E und F_η zueinander quasiinvers sind, q.e.d.

4.4.6. *Es sei F ein Funktor von $\mathscr{E}t(Y)$ in die Kategorie der Mengen, so daß folgendes gilt:*

(1) *$F(Y)$ enthält genau ein Element, und es ist* $F(X' \times_X X'') = F(X') \times_{F(X)} F(X'')$.

(2) $F(X' \coprod X'') = F(X') \coprod F(X'')$.

(3) $F(X/G) = F(X)/G$ *für G-Prinzipalbündel* $X \to X/G$.

Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \operatorname{Aut}(F) \to \pi_1(Y, \eta) = \operatorname{Aut}(F_\eta),$$

so daß für zusammenhängende G-Prinzipalbündel Z über Y gilt:
Ist $\gamma \in \operatorname{Aut}(F)$, so ist $\Phi(\gamma)_Z = 1$ gleichbedeutend mit $\gamma_Z = 1$.

Beweis. Es ist $\pi_1(Y, \eta) = \text{lim-proj}_I\, G(Z)$, wobei I die Kategorie aller (Z, η), $\zeta \in F_\eta(Z)$, $Z \to Y$ zusammenhängendes G-Prinzipalbündel $\big(G = G(Z)\big)$ ist. Aus $Z \times_Y Z \simeq G \times Z$ folgt $F(Z \times_Y Z) = F(Z) \times F(Z) \simeq G \times F(Z)$ (nach (1), (2)), also operiert G einfach und transitiv auf $F(Z)$.

Für $H \subseteq G$ ist nach (3) $F(Z/H) = F(Z)/H$. Ist J die Kategorie aller (Z, z), $z \in F(Z)$, Z zusammenhängendes G-Prinzipalbündel, dann ist J nach Schritt 2 beim Beweis von 4.4.1. äquivalent zur Kategorie I. Eine Äquivalenz erhält man, indem man jedem $(Z, z) \in \operatorname{Ob} J$ ein $(Z, \zeta) \in \operatorname{Ob} I$ zuordnet. Wir fixieren eine solche Äquivalenz und ordnen jedem $\gamma \in \operatorname{Aut}(F)$ dasjenige $g = g(Z, \zeta) \in G(Z, \zeta)$ zu, das durch die Eigenschaft $\gamma_Z(z) = zg$ charakterisiert ist. Dadurch wird der Homomorphismus $\Phi : \operatorname{Aut}(F) \to \pi$ definiert mit der angegebenen Eigenschaft.

Wir geben zwei Anwendungen davon: einmal das Verhalten der Fundamentalgruppe bei Wechsel des Basispunktes und zum anderen die Funktoreigenschaft.

Aus 4.4.6. folgt unmittelbar, daß $\pi_1(Y, \eta)$, $\pi_1(Y, \eta')$ stets isomorph sind.

Zum Beweis braucht man nur 4.4.6. auf $F = F_{\eta'}$ und umgekehrt anzuwenden; die Isomorphie hängt ab von der Auswahl einer Äquivalenz zwischen I und J.

Man sieht leicht, daß eine solche Äquivalenz umkehrbar eindeutig durch eine natürliche Transformation

$$\nu : F_{\eta'} \to F_\eta$$

festgelegt ist; denn $Z \mapsto \nu_Z$ ist umkehrbar eindeutig durch eine solche Äquivalenz festgelegt für zusammenhängende G-Prinzipalbündel über Y. Dann ist aber eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $X \mapsto \nu_X$ stets in kanonischer Weise möglich. Da außerdem ν_Z Isomorphismen sind, ist ν ein Isomorphismus. Also gilt:

4.4.7. Satz. *Die Kategorie der Funktoren F_η, η ein geometrischer Punkt von Y, ist ein zusammenhängendes Gruppoid.*

4.4.7.1. Korollar. *Die Isomorphie $\pi_1(Y, \eta) \simeq \pi_1(Y, \eta')$ ist bis auf innere Automorphismen eindeutig.*

Anwendung von 4.4.6. auf den Fall eines Morphismus $(Y', \eta') \to (Y, \eta)$ und den Funktor $F : X \to F_{\eta'}(X \times_Y Y')$ liefert (man beachte, daß ein kanonischer Homomorphismus $\operatorname{Aut}(F_{\eta'}) \to \operatorname{Aut}(F)$ und eine kanonische Äquivalenz $J \to I$ existiert durch die Projektion $Z \times_Y Y' \to Z$):

4.4.8. Satz. *$\pi_1(Y, \eta)$ hängt funktoriell von (Y, η) ab.*

4.4.8.1. Korollar. *$\pi_1(Y', \eta') \to \pi_1(Y, \eta)$ ist*

a) *surjektiv $\Leftrightarrow$ $X \mapsto X \times_Y Y'$ überführt zusammenhängende Etalüberlagerungen in zusammenhängende Etalüberlagerungen,*

b) *injektiv $\Leftrightarrow$ jede zusammenhängende Etalüberlagerung X' von Y' ist Komponente einer Etalüberlagerung der Form $X \times_Y Y'$.*

Beispiele. 1. Ist $Y = \operatorname{Spec}(k)$, so bedeutet η eine feste Einbettung von k in einen algebraisch abgeschlossenen Körper K, $\pi_1(Y, \eta)$ ist die Galois-Gruppe der separablen algebraischen Abschließung von k.

2. Ist Y eine normale algebraische Mannigfaltigkeit mit dem Funktionenkörper K, Ω eine separable algebraische Abschließung von K, so ist $\pi_1(Y)$ Faktorgruppe von $\operatorname{Gal}(\Omega/K)$ nach der Untergruppe, die zum Kompositum aller Erweiterungen $L|K$ gehört, in denen Y unverzweigt ist.

Die meisten Berechnungen der Fundamentalgruppe, soweit uns bekannt ist, beruhen auf dem Riemannschen Existenzsatz, auf der exakten Homotopiefolge, auf Sätzen vom Lefschetzschen Typ und den Eigenschaften bei Spezialisierung. Die exakte Homotopiefolge ist das Analogon der exakten Homotopiefolge der Topologie, wobei man allerdings nicht über höhere Homotopiegruppen verfügt.

Nach A. GROTHENDIECK [19], Exp. 182, gilt:

4.4.9. Satz. *Es sei $p : X \to Y$ eine eigentliche algebraische Familie von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Y lokal Noethersch (d. h. ein eigentlicher, flacher Morphismus, dessen geometrische Fasern irreduzible reduzierte algebraische Schemata sind). Ist ξ ein geometrischer Punkt von X, η sein Bild in Y, X_η die geometrische Faser in η, so ist die Folge*

$$\pi_1(X_\eta, \xi) \to \pi_1(X, \xi) \to \pi_1(Y, \eta) \to 1$$

exakt.

Beweis. Ist $\eta \in Y(k)$ ein geometrischer Punkt von Y über y (k algebraisch abgeschlossen), dann ist X_η eine Varietät über k, und für jede Etalüberlagerung $X' \to X$ ist X_η' eine Etalüberlagerung von X_η. Folglich ist

$$\Gamma(X_\eta', \mathcal{O}_{X'_\eta}) = \Gamma(X_y', \mathcal{O}_{X_y'}) \otimes_{k(y)} k$$

eine endliche und reduzierte Algebra über $(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = k$. Daher ist für alle $y \in Y$ die Algebra $\Gamma(X_y', \mathcal{O}_{X_y'})$ endlich und separabel über $k(y)$. Nach A. GROTHENDIECK [18], III.2, § 7.5.6, ist daher der Funktor $\mathcal{G} \mapsto p_*'p'^*\mathcal{G}$ exakt und

$$p_*'p'^*\mathcal{G} \simeq (p_*' \mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$$

($p' : X' \to Y$ Strukturmorphismus, $\mathcal{G}$ quasikohärente Garbe auf Y). Insbesondere ist also $p_*'\mathcal{O}_{X'}$ endliche, lokal freie $\mathcal{O}_Y$-Algebra, und daher ist $Y' = \mathrm{Spec}(B)$ ein endliches, flaches Y-Schema, und für die Fasern gilt

$$Y_\eta' = \mathrm{Spec}(B \otimes_{\mathcal{O}_Y} k) = \mathrm{Spec}(p_*'\mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k)$$
$$= \mathrm{Spec}(\Gamma(X_\eta', \mathcal{O}_{X_\eta'})).$$

X_η ist diskret und reduziert. Also ist $Y' = \mathrm{Spec}(B)$ eine Etalüberlagerung von Y, und $X' \to Y$ faktorisiert über Y' in kanonischer Weise (das Bild y' von X' wird durch die Gleichungen $f = 0$, $f \in B_y$ mit $f(X') = 0$ definiert). Folglich gibt es einen kanonischen Morphismus

$$X' \to X \times_Y Y' \to X.$$

Ist das ein Isomorphismus, so ist $X_\eta' \to X_\eta$ eine triviale Überlagerung ($\simeq \coprod X_\eta$). Ist umgekehrt $X_\eta' \to X_\eta$ trivial, so ist $X_\eta' \simeq (X \times_Y Y')_\eta$, da nach dem „Théorème de connexion" (vgl. A. GROTHENDIECK [18], III.1, § 4,3, die Komponenten von X_η' den geometrischen Punkten von Y' über η entsprechen und jede Komponente auf die entsprechende von $(X \times_Y Y')_\eta = X_\eta \times_\eta (Y_\eta')$ abgebildet wird. Dann ist aber $F_\xi(X') = F_\xi(X \times_Y Y')$, also

$$X' \simeq X \times_Y Y.$$

Somit gilt

4.4.9.1. *$X' \to X$ wird genau dann durch eine Etalüberlagerung von Y induziert, wenn $X_\eta' \to X_\eta$ trivial ist.*

Hieraus folgt sofort die Behauptung von 4.4.9.

1. $\pi_1(X, \xi) \to \pi_1(Y, \eta)$ ist surjektiv; denn ist $Y' \in \mathcal{E}t(Y)$ zusammenhängend, so ist auch $X' = X \times_Y Y'$ zusammenhängend, da $H^0(X', \mathcal{O}_{X'}) = H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ ist.

2. Ist $K \subseteq \pi_1(X, \xi)$ der Kern von $\pi_1(X, \xi) \to \pi_1(Y, \eta)$ und $I \subseteq \pi_1(X, \xi)$ das Bild von $\pi_1(X_\eta, \xi)$, dann ist $I \subseteq K$, und es ist zu zeigen:

Ist π_0 eine offene Untergruppe von $\pi_1(X, \xi)$ und $I \subseteq \pi_0$, so ist $K \subseteq \pi_0$ (I ist abgeschlossene Untergruppe, da π_1 proendlich, also kompakt ist).

Es sei X' die zu $\pi_1(X, \xi)/\pi_0$ gehörende Etalüberlagerung. Aus $I \subseteq \pi_0$ folgt, daß X_η' trivial ist; also ist $X' = X \times_Y Y'$, und zu Y' gehört dann die $\pi_1(Y, \eta)$-Menge $\pi_1(X, \xi)/(\pi_0 K)$. Hieraus folgt $\pi_0 \supseteq K$, q.e.d.

4.4.10. *Es sei k ein Körper, $\bar{k}$ eine algebraische Abschließung von k, X ein quasikompaktes k-Schema.*

(1) *Für jede normale Erweiterung $K \subseteq \bar{k}$ von k ist die Folge*

$$1 \to \pi_1(X_K, \xi) \to \pi_1(X, \xi) \to \mathrm{Gal}(K/k) \to 1$$

exakt $\left(X_K =: X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k)\right)$.

(2) *Besitzt X einen k-rationalen Punkt und ist $K = \bar{k}$, so zerfällt diese Folge.*

(3) *Besitzt X einen $\bar{k}$-rationalen Punkt, so ist für jeden algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper Ω von k*

$$\pi_1(X_\Omega, \xi) \simeq \pi_1(X_{\bar{k}}, \xi).$$

(4) *Sind X, Y k-Schemata, die einen k-rationalen Punkt besitzen, so ist*

$$\pi_1\left(X \times_k Y, (\xi, \eta)\right) = \pi_1(X, \xi) \times \pi_1(Y, \eta).$$

Beweis. (1) Ist $L \subseteq K$ die separable Abschließung von k in K, dann ist $X_K \to X_L$ universell homöomorph und ganz, d. h. $\pi_1(X_K, \xi) = \pi_1(X_L, \xi)$, also o.B.d.A. $K = L$. Durchläuft k_α alle endlichen, normalen Zwischenkörper, so ist

$$\pi_1(X_K, \xi) = \text{lim-proj}\ \pi_1(X_{k_\alpha}, \xi),$$

da jede Etalüberlagerung von X_K schon über einem X_{k_α} definiert ist. $X_{k_\alpha} \to X$ ist ein Prinzipalbündel mit der Gruppe $G_\alpha = \mathrm{Gal}(k_\alpha, k)$, und die Folge

$$1 \to \pi_1(X_{k_\alpha}, \xi) \to \pi_1(X, \xi) \to G_\alpha \to 1$$

ist exakt. Durch Übergang zum Limes folgt die Behauptung.

(2) Besitzt X einen k-rationalen Punkt, so wählen wir ξ als k-rationalen Punkt. Dann operiert $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ auf F_ξ, d. h. $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \subseteq \pi_1(X, \xi)$, so daß $\pi_1(X, \xi) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ auf dieser Untergruppe einen Isomorphismus induziert.

(3) folgt daraus, daß

$$\pi_1(X_\Omega, \xi) = \text{lim-proj}\ \pi_1(X_A, \xi)$$

ist, wenn A alle $\bar{k}$-Unteralgebren von endlichem Typ von Ω durchläuft $(X_A =: X \times_k \mathrm{Spec}(A))$,

$$\pi_1(X_A, \xi) = \pi_1(X_{\bar{k}}, \xi) \times \pi_1(\mathrm{Spec}(A), \eta)$$

(η der $A \to \Omega$ entsprechende geometrische Punkt) und

$$\text{lim-proj}\, \pi_1(\mathrm{Spec}(A), \eta) = \pi_1(\mathrm{Spec}(\Omega), \eta) = 1$$

ist, q.e.d.

(4) ist offensichtlich, da die Projektionen $X \leftarrow X \times_k Y \to Y$ Schnitte besitzen.

4.5. Spezialisierung der Fundamentalgruppe

Ganz allgemein studieren wir folgendes Problem: $X \to Y$ sei ein eigentlicher Morphismus, $V \subseteq Y$ ein abgeschlossener Unterraum, X_V das Urbild von X. Wie sieht die Abbildung $\pi_1(X_V, \xi) \to \pi_1(X, \xi)$ aus? Dabei sei Y das Spektrum eines in V Henselschen Ringes A.

Wir werden sehen, daß diese Abbildung bijektiv ist, d. h. genauer:

4.5.1. Satz. *Ist A ein in $V \subseteq \mathrm{Spec}(A) = Y$ Henselscher Ring, $X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus von endlicher Darstellung, dann ist der Funktor*

$$\mathscr{E}t(X) \to \mathscr{E}t(X_V), \qquad E \mapsto E \times_Y V =: E_V$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Zum Beweis kann man sich auf den Fall beschränken, daß A die Henselsche Abschließung eines endlich erzeugten Ringes ist. Denn A ist induktiver Limes solcher Ringe A_α, die in V_α Henselsch sind, so daß $V = \text{lim-proj}\,(V_\alpha)$ ist. X und eine gegebene Etalüberlagerung $E \to X_V$ bzw. ein Morphismus solcher Etalüberlagerungen sind schon über einem hinreichend großen $A_\alpha =: A_0$ definiert (da alles von endlicher Darstellung ist), und es genügt zu zeigen:

a) Ist $X_0 \to \mathrm{Spec}(A_0) = Y_0$ von endlichem Typ und $X_0 \times_{Y_0} Y \to Y$ eigentlich, so gibt es eine A_0-Algebra $A_\alpha \subseteq A$, und $X_0 \times_{Y_0} \mathrm{Spec}(A_\alpha) \to \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ ist eigentlich.

b) Ist $E_0 \to V_0$ ein Morphismus $V = \text{lim-proj}\,(V_\alpha)$ und $E_0 \times_{V_0} V \to V$ eine Etalüberlagerung, so gibt es ein α, und $E_0 \times_{V_0} V_\alpha \to V_\alpha$ ist Etalüberlagerung.

Die Behauptung b) folgt aus a), da aus der lokalen Beschreibung der Etalmorphismen zunächst folgt, daß man V_0 so wählen kann, daß $E_0 \to V_0$ Etalmorphismus ist; ist $E_0 \times_{V_0} V_\alpha \to V_\alpha$ außerdem eigentlich, so ist es eine Etalüberlagerung.

Die Behauptung a) folgt aus einem Resultat von A. Grothendieck [18], IV, 3, S. 39/40, dessen Beweis wir kurz skizzieren wollen.

Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0' & \xrightarrow{\psi} & \mathsf{P}^N_{Y_0} = \mathsf{P}^N \times Y_0 \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varrho \\ X_0 & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & Y_0 \end{array}$$

so daß φ ein projektiver und surjektiver Morphismus und ψ eine lokal abgeschlossene Einbettung ist (Lemma von Chow, vgl. A. Grothendieck [18], II. Die Abbildung π ist genau dann eigentlich, wenn $\pi \circ \varphi = \varrho \circ \psi$ eigentlich, also eine abgeschlossene Einbettung ist. Da das über Y der Fall ist, gilt das schon für ein Y_α.

4.5.1.1. Hilfssatz. *Es sei A ein Noetherscher, in V Henselscher Ring, dessen formale Fasern (Fasern von $\mathrm{Spec}(A_V^\wedge) \to \mathrm{Spec}(A)$) normal und geometrisch reduziert sind. Für jede reduzierte A-Algebra B ist dann B algebraisch abgeschlossen in $B \otimes_A A_V^\wedge =: B^\wedge$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß B von endlichem Typ über A ist, ferner ist $Q(B) \cap (B \otimes_A A_V^\wedge) = B$ (in $Q(B) \otimes_A A_V^\wedge$, wobei $Q(B)$ voller Quotientenring von B ist). Also genügt zu zeigen, daß $Q(B)$ algebraisch abgeschlossen in $Q(B) \otimes_A A_V^\wedge$ ist. Da $Q(B)$ direktes Produkt endlich vieler Körper ist, genügt es zu zeigen: Ist B ein Körper, so ist B algebraisch abgeschlossen in $B \otimes_A A_V^\wedge$. Es sei $A \subseteq B$, K der Quotientenkörper von A; dann ist $K \otimes_A A_V^\wedge$ normal und K algebraisch abgeschlossen in $Q(A_V^\wedge)$ (vgl. 2.10.), also $A_V^\wedge$ ein Integritätsbereich. Der Quotientenkörper sei L; K ist algebraisch abgeschlossen in L. Außerdem gilt $B \otimes_A A_V^\wedge \subseteq B \otimes_K L$, und $B \otimes_K L$ ist reduziert für jeden Erweiterungskörper B von K. Für jeden der Typen von Körpererweiterungen $B|K$ „algebraisch separabel“, „rein inseparabel“ und „rein transzendent“ prüft man ohne Mühe nach, daß $L \otimes_K B$ Integritätsbereich und B im Quotientenkörper von $L \otimes_K B$ algebraisch abgeschlossen ist, q.e.d.

4.5.1.2. Korollar. *Es sei $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $Y^\wedge = \mathrm{Spec}(A_V^\wedge)$, Y erfülle die Voraussetzungen von 4.5.1.1. Ist X ein Y-Schema, dann ist der Funktor*

$$\mathscr{E}t/X \to \mathscr{E}t/(X \times_Y Y^\wedge), \qquad U \mapsto U \times_Y Y^\wedge$$

voll und treu. (Hierbei bezeichnet $\mathscr{E}t/X$ die Kategorie aller Etalmorphismen über X.)

Beweis. Da der Morphismus $Y^\wedge \to Y$ treuflach ist, ist die kanonische Abbildung (mit $X^\wedge =: X \times_Y Y^\wedge$ usw.)

$$\mathrm{Hom}_X(U_1, U_2) \to \mathrm{Hom}_{X^\wedge}(U_1^\wedge, U_2^\wedge)$$

injektiv. Außerdem ist ein $X^\wedge$-Morphismus $U_1^\wedge \to U_2^\wedge$ gleichbedeutend mit einem $U_1^\wedge$-Morphismus (Graph)

$$U_1^\wedge \to U_1^\wedge \times_{X^\wedge} U_2^\wedge = (U_1 \times_X U_2) \times_Y Y^\wedge.$$

Wir können also $U_1 = X$ annehmen. Weiterhin ist ein $X^\wedge$-Morphismus $X^\wedge \to U^\wedge$ gleichbedeutend mit einem X-Morphismus $X^\wedge \to U$ (nach den Eigenschaften des Faserprodukts). Schließlich kann man X noch als reduziert voraussetzen, da $X^\wedge_{\mathrm{red}} \to X^\wedge$, $X_{\mathrm{red}} \to X$ ganze und universelle Homomorphismen sind (also $\mathscr{E}t/X \simeq \mathscr{E}t/X_{\mathrm{red}}$ usw. nach 3.6.4.). Es ist zu zeigen, daß jeder X-Morphismus $X^\wedge \to U$ schon auf X definiert ist. Da er dann eindeutig bestimmt ist, kann man X und U als affin voraussetzen, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $U = \mathrm{Spec}(C)$. Dann ist C eine B-Algebra und algebraisch über C, B eine reduzierte A-Algebra. Dem Morphismus $X^\wedge \to U$ entspricht ein Algebrahomomorphismus

$$\lambda: C \to B \otimes_A A_V^\wedge,$$

und für $f \in C$ ist $\lambda(f)$ algebraisch über B, also nach 4.5.1.1. aus B, und somit ist $\lambda(C) \subseteq B$, also $X^\wedge \to U$ schon auf X definiert, q.e.d.

4.5.2. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von oben gilt: Ist $X \to Y$ von endlichem Typ und enthält X_V $(= X \times_Y V)$ alle abgeschlossenen Punkte von X (z. B., wenn $X \to Y$ abgeschlossen ist), so ist $\mathscr{E}t(X) \to \mathscr{E}t(X^\wedge)$ eine Äquivalenz der Kategorien der Etalüberlagerungen über X bzw. $X^\wedge = X \times_Y Y^\wedge$.*

Beweis. Wir können Y und X als zusammenhängend und reduziert voraussetzen; dann ist auch $X^\wedge$ zusammenhängend, da

$$H^0(X^\wedge, \mathcal{O}_{X^\wedge}) = H^0(X, \mathcal{O}_X) \otimes_A A_V^\wedge$$

und $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ algebraisch abgeschlossen in $H^0(X^\wedge, \mathcal{O}_{X^\wedge})$ ist (4.5.1.1.). Es bleibt noch zu zeigen, daß jede Etalüberlagerung $E^\wedge \to X^\wedge$ durch eine Etalüberlagerung $E \to X$ induziert wird. Dazu kann man annehmen, daß $E^\wedge \to X^\wedge$ ein G-Prinzipalbündel ist (G eine endliche Gruppe). Wir zeigen, daß es einen surjektiven Etalmorphismus $U \to X$ gibt, so daß $E^\wedge \times_{X^\wedge} U^\wedge$ trivial wird. Dann ist $E^\wedge$ also durch einen $U^\wedge$-Kozyklus $\hat{\gamma} : U^\wedge \times_{X^\wedge} U^\wedge \to G \times X^\wedge$ charakterisiert. Nach 5.1.3. wird aber $\hat{\gamma}$ durch einen X-Morphismus $\gamma : U \times_X U \to G \times X$ induziert, und γ ist ein U-Kozyklus, bestimmt also ein G-Prinzipalbündel $E \to X$, so daß $E \times_Y Y^\wedge \simeq E$ ist.

Um die Existenz von U nachzuweisen, betrachten wir für jeden abgeschlossenen Punkt $P \in X$ die Schemata

$$X_P =: \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,P}^h), \qquad X_P^\wedge =: \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,P}^\wedge).$$

Da P über V liegt, gibt es einen kanonischen X-Morphismus $X_P^\wedge \to X^\wedge$, und

$$\begin{array}{ccc} X_P^\wedge & \to & X^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_P & \to & X \end{array}$$

ist kommutativ. $E^\wedge$ induziert eine Etalüberlagerung $E_P^\wedge$ auf $X_P^\wedge$, d. h. eine endliche freie $\mathcal{O}_{X,P}^\wedge$-Algebra $B^\wedge$, so daß $B^\wedge \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}^\wedge} k(P)$ separable $k(P)$-Algebra ist. Jede solche Algebra über einem lokalen Henselschen Ring ist aber umkehrbar eindeutig durch die über $k(P)$ induzierte Algebra bestimmt, d. h., genauer gilt:

4.5.2.1. Hilfssatz. *Ist A ein lokaler Henselscher Ring mit dem Restklassenkörper k, $Y = \operatorname{Spec}(A)$, $y = \operatorname{Spec}(k)$, so ist $\mathscr{E}t(Y) \to \mathscr{E}t(y)$ eine Äquivalenz der Kategorien der Etalüberlagerungen.*

Wir führen zunächst den Beweis von 4.5.2. zu Ende. $B^\wedge$ ist also schon durch eine $\mathcal{O}_{X,P}^h$-Algebra B bestimmt, und daher gibt es eine Etalumgebung $U_P \to X$ von P und eine Etalüberlagerung $E_P \to U_P$, so daß E_P und $E^\wedge$ auf $U_P^\wedge = U_P \times_Y Y^\wedge$ isomorph sind, d. h., es gibt einen $U_P^\wedge$-Morphismus

$$E_P \times_{U_P} U_P^\wedge \simeq E^\wedge \times_{X^\wedge} U_P^\wedge \qquad (U_P^\wedge =: U_P \times_Y Y^\wedge).$$

X läßt sich durch endlich viele solcher U_P überdecken. Ist U die disjunkte Vereinigung der entsprechenden E_P, U_0 diejenige der U_P, dann ist $U \to X$ ein surjektiver Etalmorphismus. Es gibt dann einen $U_0^\wedge$-Isomorphismus

$$U^\wedge = U \times_{U_0} U_0^\wedge \simeq E^\wedge \times_{X^\wedge} U_0^\wedge \qquad (U_0^\wedge =: U_0 \times_Y Y^\wedge),$$

und aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E^\wedge \times_{X^\wedge} U^\wedge & \to & E^\wedge \times_{X^\wedge} U_0^\wedge & \to & E^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U^\wedge & \longrightarrow & U_0^\wedge & \longrightarrow & X^\wedge \end{array}$$

folgt sofort, daß $E^\wedge \times_{X^\wedge} U^\wedge \to U^\wedge$ einen Schnitt besitzt, also trivial ist, q.e.d.

Beweis von 4.5.2.1. Ist X Etalüberlagerung von Y, so entsprechen sich die Zusammenhangskomponenten von X und $X_y = X \times_Y y$ umkehrbar eindeutig (nach der Charakterisierung Henselscher Ringe). Also ist der Funktor $X \mapsto X_y$ voll und treu. Da jede Etalüberlagerung von y durch eine normierte Gleichung $F \in k[T]$ beschrieben wird (Satz vom primitiven Element), kann man sie zu einer Etalüberlagerung von Y liften (F liften!), q.e.d.

Wir beweisen nun 4.5.1. Ist A Henselsche Abschließung eines endlich erzeugten Ringes, dann erfüllt A nach 2.10. die Voraussetzungen von 4.5.1.1. Nach 4.5.2. kann man dann A durch $A_V^\wedge$ ersetzen, und es genügt daher zu zeigen:

Ist $A = \text{lim-proj}\, A/J^{n+1}$ ein Noetherscher Ring, X ein eigentliches A-Schema, $V = V(J)$, $X_V = X \times_{\operatorname{Spec}(A)} V$, so ist $\mathscr{E}t(X) \to \mathscr{E}t(X_V)$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Ist $E \to X$ eine Etalüberlagerung, $B = H^0(E, \mathcal{O}_E)$, so ist B eine endliche A-Algebra, also Henselsch.

Das „Théorème de connexion“ (vgl. A. Grothendieck [18], III.1, §4.3) besagt, daß die Fasern des kanonischen Y-Morphismus $E \to \operatorname{Spec}(B)$ zusammenhängend sind.

Ist $Z \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ ein zusammenhängender Unterraum, so ist das Urbild von Z in E ebenfalls zusammenhängend. Da die Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Spec}(B)$ umkehrbar eindeutig denen von $(\operatorname{Spec}(B))_V = W$ (Urbild von V in $\operatorname{Spec}(B)$) entsprechen, gilt:

Die Zusammenhangskomponenten von E entsprechen umkehrbar eindeutig denen von E_V.

Hieraus folgt sofort, daß $E \mapsto E_V$ ein voller und treuer Funktor ist. Es bleibt also noch zu zeigen, daß jede Etalüberlagerung E_0 von X_V durch eine Etalüberlagerung von X induziert wird. Es sei $X_{V,n} = X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A/J^{n+1})$; die $X_{V,n}$ bilden dann ein induktives System, und die Morphismen $X_{V,n} \to X_{V,n+1}$ sind universell homöomorph und abgeschlossene Einbettungen. Ist $E_0 \to X_V = X_{V,0}$ gegeben, so läßt sich E_0 bis auf Isomorphie eindeutig zu einem induktiven System (E_n) von Etalüberlagerungen liften, d. h., jedes der Diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_n & \to & E_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{V,n} & \to & X_{V,n+1} \end{array}$$

ist universell. Den E_n entsprechen wiederum lokal freie Garben $\mathscr{A}_n$ von $\mathcal{O}_n$-Algebren, wobei $\mathcal{O}_n$ die Strukturgarbe auf $X_{V,n}$ bezeichnet, so daß

$$\mathscr{A}_n \simeq \mathscr{A}_{n+1}/J^{n+1}\mathscr{A}_{n+1}$$

ist. Wir wenden jetzt Grothendiecks „Théorème d'existence“ an (siehe 1.4.6.). Durch das projektive System $(\mathscr{A}_n)$ ist eine lokal freie kohärente Garbe $\mathscr{A}$ von

$\mathcal{O}_X$-Algebren auf X bestimmt, so daß

$$\mathscr{A}/J^{n+1}\mathscr{A} \simeq \mathscr{A}_n$$

ist. Ist $E = \operatorname{Spec}(\mathscr{A})$, dann ist $E \to X$ ein flacher und endlicher Morphismus und $E_V \xrightarrow{\sim} E_0$ über X_V. Hieraus folgt aber, daß $E \to X$ in allen abgeschlossenen Punkten unverzweigt ist, d. h. aber $\operatorname{supp}(\Omega_{E|X}) = \emptyset$ und daher $\Omega_{E|X} = 0$, also ist $E \to X$ unverzweigt und flach, q.e.d.

Der Satz 4.5.1. findet vor allem Anwendung, wenn A ein lokaler Henselscher Ring ist. Wir erwähnen hier nur, daß er Grundlage zum Beweis des Basiswechselsatzes der Etalkohomologie ist.

Eine andere Anwendung ist das folgende Korollar (A. Grothendieck [19], Exp. 182):

4.5.3. Korollar. *Es sei $X \to Y$ eine eigentliche algebraische Familie von algebraischen Mannigfaltigkeiten, η_1, η_2 seien geometrische Punkte von Y, so daß η_2 eine Spezialisierung von η_1 ist (d. h. $\eta_2 \in \overline{\{\eta_1\}}$), Y sei Noethersch. Dann gibt es eine bis auf einen inneren Automorphismus eindeutig bestimmte Surjektion*

$$\pi_1(X_{\eta_1}, \xi_1) \to \pi_1(X_{\eta_2}, \xi_2).$$

Ist X_{η_2} singularitätenfrei, so ist der Kern eine Pro-p-Gruppe, p Charakteristik von $k(\eta_2)$.

Wir wollen den Beweis hier nur skizzieren. Wir können annehmen, daß Y Spektrum eines Henselschen diskreten Bewertungsringes R mit dem Restklassenkörper $k = k(\eta_2)$ ist. Dann ist nach 4.5.1.

$$\pi_1(X_{\eta_2}, \xi_2) = \pi_1(X, \xi_2)$$

(ξ_2 ein geometrischer Punkt von $X_{\eta_2} \subseteq X$). Ferner ist nach 4.5.1.

$$\pi_1(Y, \eta_1) \simeq \pi_1(Y, \eta_2) = 1,$$

und aus 4.4.9. folgt dann die erste Behauptung. Es sei jetzt X_{η_2} singularitätenfrei. Nach dem Jacobischen Kriterium ist dann $X \to Y$ glatt, also X regulär. Ist t ein uniformisierender Parameter auf Y, so ist X_{η_2} das durch $t = 0$ definierte Unterschema von X und X_{η_1} die Mannigfaltigkeit, die man durch Grundkörpererweiterung aus $X_t = \{P \in X, t(P) \neq 0\}$ über $K = R_t$ erhält. Eine Etalüberlagerung von X_{η_1} ist schon über einer endlichen Erweiterung L von K definiert, und wir können dann R durch die ganze Abschließung R' von R in L, Y durch $\operatorname{Spec}(R')$ und X durch $X \times_Y \operatorname{Spec}(R')$ ersetzen, ohne die Abbildung

$$\pi_1(X_{\eta_1}, \xi_1) \to \pi_1(X_{\eta_2}, \xi_2)$$

zu ändern. Wir können also immer annehmen, daß eine Überlagerung von X_{η_1} schon über K definiert ist.

Es sei jetzt ein zusammenhängendes G-Prinzipalbündel über X_t gegeben, der Funktionenkörper dieses Bündels ist dann eine Galois-Erweiterung des Funktionenkörpers von X mit der Gruppe G. Wir bezeichnen mit E die Normalisierung von X in diesem Körper. Das gegebene Prinzipalbündel ist dann also $E_t = \{P \in E, t(P) \neq 0\}$. Damit die betrachtete Abbildung der Fundamentalgruppen injektiv ist, ist notwendig und hinreichend, daß E (nach evtl. Erweiterung des Grundringes R) unverzweigt über X ist.

Es sei $D \subseteq E$ die Menge der Verzweigungspunkte bezüglich $E \to X$. Nach O. Zariski und M. Nagata ist jede Komponente von D von der Kodimension 1 in E (vgl. etwa M. Nagata [39], § 41). Es ist also hinreichend, daß die über $X_0 = X_{\eta_2} \subseteq X$ liegenden irreduziblen Unterschemata von E unverzweigt über X sind. Es sei $C \subseteq E$ eine solche Komponente, A der lokale Ring von X_0 in X, A' der lokale Ring von C in E; das sind diskrete Bewertungsringe und t ist uniformisierender Parameter in A. Ist t' uniformisierender Parameter in A', $t = \varepsilon t'^e$ mit einer Einheit ε aus A', so ersetzen wir R durch $R[u]$ mit $u^e = t$, A durch $A[u]$ und A' durch die Normalisierung A'' von $A'[u]$. Ist e nicht durch die Charakteristik p von $k(\eta_2) = k$ teilbar, so ist $A'' = A'[\xi]$, $\xi =: \dfrac{u}{t'}$, da $\xi^e = \varepsilon$ ist und die Gleichung $T^e - \varepsilon = 0$ eine unverzweigte Erweiterung von A' definiert. Dann ist A'' unverzweigt über $A'[u]$, da $A''/uA'' = A''/\xi t' A'' = A''/t'A''$ separabel über $A[u]/uA[u]$ ist. e ist sicher dann nicht durch p teilbar, wenn die Ordnung von G nicht durch p teilbar ist, q.e.d.

5. Approximationstheorie und Algebraisierung von Deformationen

Wir wollen in diesem Kapitel einige Anwendungen für die in Kapitel 2 entwickelten Methoden geben. Es geht hier um Probleme der Approximation formaler Strukturen, die wichtigsten Resultate gehen auf die Untersuchungen von M. ARTIN (vgl. [5], [6]) zurück:

Es sei A ein Ring, I ein Ideal von A, $A^\wedge$ die I-adische Komplettierung von A (wir setzen stets voraus, daß A in der I-adischen Topologie separiert ist, d. h. $A \subset A^\wedge$).

(1) Kann man eine gegebene algebraische Struktur $\bar{S}$ über $A^\wedge$ durch eine Struktur S über A approximieren? Ist S eindeutig bestimmt?

(2) Es sei $F : (A\text{-Algebren}) \to (\text{Mengen})$ ein Funktor, $\bar{\xi} \in F(A^\wedge)$. Gibt es dann ein $\xi \in F(A)$ mit $\xi = \bar{\xi} \bmod I^c$?

Ein Spezialfall der Fragestellung ist das folgende Problem:

(3) Es seien $Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$ Unbestimmte und $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ein Gleichungssystem aus $A[Y]$, das eine formale Lösung $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ hat, d. h. $\bar{y}_i \in A^\wedge$ und $f(\bar{y}) = 0$. Gibt es dann für jede natürliche Zahl $c > 0$ ein n-Tupel $y = (y_1, \ldots, y_N)$, $y_i \in A$ mit $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod I^c$ und $f(y) = 0$?

Definition. Wir sagen, der Ring A hat bezüglich I die Approximationseigenschaft (und schreiben kurz $(A, I) \in AE$), wenn stets (3) gilt.

Wir setzen im folgenden voraus, daß der Ring A stets Noethersch ist.

5.1. Ringe mit Approximationseigenschaft

Ist $(A, I) \in AE$, so ist $(A, \sqrt{I}) \in AE$, da die I-adische Komplettierung gleich der $\sqrt{I}$-adischen Komplettierung ist. Wir können also jetzt davon sprechen, daß A bezüglich einer abgeschlossenen Teilmenge $V = V(I)$ die Approximationseigenschaft hat und werden kurz $(A, V) \in AE$ schreiben.

5.1.1. Satz. $(A, V) \in AE$ *genau dann, wenn* (2) *für jeden Funktor F gilt, der mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar ist.*

Beweis. Es sei $(A, V) \in AE$ und $\bar{\xi} \in F(A^\wedge)$ gegeben. Wir wissen, daß $A^\wedge = \text{lim-ind}(A_\alpha)$ ist, wobei A_α alle über A endlich erzeugten Unterringe von $A^\wedge$

durchläuft. Es gibt also ein α, so daß $\bar{\xi}$ durch ein Element aus

$$A_\alpha \simeq A[T_1, \ldots, T_n]/(F_1, \ldots, F_r)$$

definiert wird. Ist $\bar{t} = (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$, $\bar{t}_i$ das Bild von T_i in $A^\wedge$, dann ist $F_j(\bar{t}) = 0$ für alle j. Da $(A, V) \in AE$ ist, existieren $t = (t_1, \ldots, t_n)$ aus A mit $t_i \equiv \bar{t}_i \bmod I^c$ und $F_j(t) = 0$ für alle j. Der durch die t_i definierte Morphismus von A_α in A definiert das Element ξ, das $\bar{\xi}$ modulo I^c approximiert. Die andere Richtung des Beweises ist klar.

Wir wollen nun einige Folgerungen aus der Approximationseigenschaft ziehen.

5.1.2. *Ist $(A, V) \in AE$, so gilt:*

(1) *V enthält alle abgeschlossenen Punkte von* Spec(A).

(2) *A ist Henselsch in V.*

(3) *Ist A Integritätsbereich, so ist A in der Komplettierung $A^\wedge_V$ von A bezüglich V algebraisch abgeschlossen.*

(4) *Ist A reduziert, so ist $A^\wedge_V$ reduziert.*

(5) *Ist A Integritätsbereich, so ist $A^\wedge_V$ Integritätsbereich.*

(6) *A ist normal, wenn $A^\wedge_V$ normal ist.*

Beweis. Es sei $V = V(I)$. Um (1) zu zeigen, nehmen wir ein $a \in I$; dann ist $a + 1$ Einheit in $A^\wedge_V$, d. h., die Gleichung $(a + 1)\,Y = 1$ hat eine Lösung aus $A^\wedge_V$. Dann gibt es aber auch eine Lösung aus A, d. h., $a + 1$ ist Einheit in A.

(2) gilt, weil $A^\wedge_V$ Henselsch bezüglich V ist. Ist nämlich $H(T)$ ein normiertes Polynom aus $A[T]$ mit $H(0) = 0$ auf V und $H'(0) \neq 0$ auf V, dann existiert ein a aus $IA^\wedge_V$ mit $H(a) = 0$. Wegen der Approximationseigenschaft existiert dann ein b aus A, $b \equiv a \bmod I$ (d. h. $b \in I$) mit $H(b) = 0$.

Um (3) zu zeigen, wählen wir ein $a \in A^\wedge_V$, das algebraisch über A ist, d. h. Nullstelle eines Polynoms von minimalem Grad $G(T)$ aus $A[T]$. Da G wegen der Approximationseigenschaft für jedes $c > 0$ eine Nullstelle in A hat, die modulo I^c mit a übereinstimmt, und A und damit nach (5) $A^\wedge_V$ Integritätsbereich ist, findet man ein Polynom, das einen kleineren Grad als G und a als Nullstelle hat. Somit muß a aus A sein.

Um (4) zu zeigen, wählen wir ein a aus $A^\wedge_V$ mit $a^n = 0$. Dann ist a Nullstelle von $T^n = 0$. Ist also c eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl, dann existiert ein $a_c \in A$, mit $a_c{}^n = 0$ und $a \equiv a_c \bmod I^c$. Dann muß aber $a_c = 0$ sein und somit $a \in I^c$ für alle c, d. h. $a = 0$.

(5) und (6) zeigt man analog.

5.1.3. Satz. *Ist $(A, V) \in AE$, $p \subseteq A$ ein Ideal, dann ist $\big(A/p,\ V(I + p/p)\big) \in AE$.*

Beweis. Es sei $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ein Gleichungssystem aus $A/p[Y_1, \ldots, Y_N]$ und $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ eine formale Lösung aus $(A/p)^\wedge_{V(I/p)}$, d. h. $f(\bar{y}) = 0$. Ist $g = (g_1, \ldots, g_m)$ ein Repräsentant von f in $A[Y_1, \ldots, Y_N]$, $\bar{z}$ ein Repräsentant von $\bar{y}$ in $A^\wedge_V$, dann ist $g_r(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n} l_{ri} j_i$ mit Elementen $j_i \in p$, $l_{ri} \in A^\wedge_V$.

Wir betrachten das Gleichungssystem, das durch die

$$h_r = g_r - \sum L_{ri} j_i$$

aus $A[Y_1, \ldots, Y_N, L_{11}, \ldots, L_{mr}]$ definiert wird. Dieses System hat eine formale Lösung aus $A_V^\wedge$, nämlich $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N, l_{11}, \ldots)$ und somit für jedes $c > 0$ eine modulo I^c mit dieser Lösung übereinstimmende Lösung aus A. Diese definiert, wenn wir wieder zu den Restklassen übergehen, die gesuchte Lösung aus A/p.

5.1.4. *Ist $(A, V) \in AE$, dann gilt (3) mit Gleichungssystemen $f = (f_1, \ldots, f_m)$ aus $A\langle Y\rangle$.*

Beweis. Es ist $A\langle Y\rangle = \text{lim-ind}(A_\alpha)$, $A_\alpha \supset A[Y]$ und A_α von endlicher Darstellung über $A[Y]$. Es existiert ein α, so daß $f_j \in A_\alpha$ ist. Es sei

$$A_\alpha = A[Y][T_1, \ldots, T_s]/(G_1, \ldots, G_s).$$

Wir erhalten ein neues Gleichungssystem $f_1, \ldots, G_1, \ldots, G_s$ aus $A[Y, T_1, \ldots, T_r]$. Auf dieses Gleichungssystem wenden wir die Approximationseigenschaft an und erhalten die gewünschte Lösung.

5.1.5. *Es sei $(A, V) \in AE$, und die formalen Lösungen $\bar{y}$ von (3) seien von der Gestalt $\bar{y}_i = u_i + \bar{v}_i$, wobei die u_i aus A sind und die $\bar{v}_i \in \mathfrak{a}_i A_V^\wedge$, $\mathfrak{a}_i$ Ideale von A. Dann kann die Lösung $y = (y_1, \ldots, y_N)$ so gewählt werden, daß $\bar{y}_i \equiv y_i \bmod \mathfrak{a}_i$ ist.*

Beweis. Ist $\bar{v}_i = \sum a_{ij} s_{ij}$, wobei die $a_{ij} \in \mathfrak{a}_j$ sind, dann ist

$$\bar{y}_i - u_i - \sum a_{ij} s_{ij} = 0.$$

Das Gleichungssystem

$$f_1, \ldots, f_m, \qquad Y_1 - u_1 - \sum a_{ij} s_{ij}, \ldots$$

aus $A[Y_1, \ldots, Y_N, S_{11}, \ldots]$ hat die formale Lösung $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N, s_{11}, \ldots)$. Die nach der Approximationseigenschaft existierende Lösung aus A hat dann die gewünschte Eigenschaft.

5.1.6. Korollar. *Es sei $(A, V) \in AE$, $J \subseteq A$ ein Ideal, das in I enthalten ist. Liegen die formalen Lösungen von (3) dann schon in $A_{V(J)}^\wedge$, so können sie durch Lösungen $y = (y_1, \ldots, y_N)$ aus A modulo J^c approximiert werden.*

Beweis. Man ersetze die $\mathfrak{a}_i$ von 5.1.5. durch J^c.

Wir wollen abschließend in diesem Teil noch eine Folgerung aus der Approximationseigenschaft ziehen, die die Klasse der Ringe mit Approximationseigenschaft etwas genauer charakterisiert. Einen Hinweis auf diese Folgerung kann man schon bei M. Raynaud [45] finden.

5.1.7. Satz. *Es sei A ein lokaler Ring und $V = \{\mathfrak{m}_A\}$. Ist $(A, V) \in AE$, so ist A universell japanisch.*

Bemerkung. Es ist klar, daß allein aus der Approximationseigenschaft nicht universell japanisch folgen kann. Man betrachte z. B. einen Ring A, dessen ganze Abschließung nicht endlich über A ist (vgl. M. Nagata [39]), dann ist $(A, \operatorname{Spec} A) \in AE$.

Satz 5.1.7. gilt auch, wenn A semilokal ist, da in diesem Fall A direktes Produkt von lokalen Ringen ist.

Beweis von 5.1.7. Da (A, V) aus AE ist, ist auch $(A/p, V(I/p)) \in AE$ für jedes Primideal p von A und $(B, V(IB)) \in AE$ für jede endliche freie A-Algebra B. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß A ein Integritätsbereich ist (wir ersetzen A durch A/p), und es genügt zu zeigen, daß die ganze Abschließung von A endlich über A ist (denn wenn wir eine endliche Erweiterung K vom Quotientenkörper von A haben und B die ganze Abschließung von A in K ist, dann enthält B eine über A endliche freie Algebra B', deren Quotientenkörper K ist; wir können also A durch B' ersetzen). Um nun zu zeigen, daß die ganze Abschließung von A endlich über A ist, genügt es, dies für die Komplettierung $A_V^\wedge$ zu zeigen, da $A_V^\wedge$ eine treuflache A-Algebra ist und die ganze Abschließung von $A_V^\wedge$ das Tensorprodukt der ganzen Abschließung von A mit $A_V^\wedge$ enthält. Da nun $(A, V) \in AE$ und ein Integritätsbereich ist, ist $A_V^\wedge$ ein Integritätsbereich. Wir können schließlich annehmen, daß $A_V^\wedge$ ein lokaler kompletter Noetherscher Integritätsbereich ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz 2.10.3.

5.2. Beispiele

5.2.1. Satz. *Die folgenden Paare haben die Approximationseigenschaft:*

(1) *(A, V), A ein beliebiger Ring und $V = \operatorname{Spec}(A)$;*
(2) *(A, V), A ein bezüglich V kompletter Ring;*
(3) $(\mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}, V((X_1, \ldots, X_n)))$, *$\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, X_i Unbestimmte;*
(4) $(R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle, V((X_1, \ldots, X_n)))$, *$R$ ein Körper oder ein Henselscher exzellenter diskreter Bewertungsring oder ein Restklassenring eines formalen Potenzreihenringes über einem Körper.*

Zum Beweis wollen wir folgendes bemerken: (1) und (2) sind trivial. (3) und (4) gehen im wesentlichen auf M. Artin zurück. Wir werden (4) im nächsten Teil beweisen, (3) läßt sich als analytisches Resultat analog zu (4) zeigen.

Folgende Ringe haben nicht die Approximationseigenschaft:
(1) Beispiel von Nagata
Es sei k ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$ und $[k : k^p] = \infty$. Dann ist, wie Nagata in [39] zeigte, $R = k^p[[X_1, \ldots, X_n]][k]$ ein regulärer lokaler Integritätsbereich mit Maximalideal $\mathfrak{m}$, der bezüglich $\mathfrak{m}$ nicht komplett ist. $R_\mathfrak{m}^\wedge = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ ist algebraisch und rein inseparabel über R. Dann kann $(R, V(\mathfrak{m}))$ nicht aus AE sein.

Es sei $\{b_1, \ldots\}$ eine Basis von $k : k^p$, $d = \sum b_i X_1^i$. Dann ist die ganze Abschließung von $R[d]$ nicht endlich über $R[d]$. Das gleiche gilt dann auch für $R\langle d\rangle$. Dann ist aber $(R\langle d\rangle, V$ (Jacobson-Radikal von $R\langle d\rangle$)) nicht aus AE (vgl. 5.1.6.).
(2) Beispiel von Greco und Salmon
Es sei $R = k[X_0, X_1, \ldots][Y]$ ein Polynomring in unendlich vielen Unbestimmten über dem Körper k und $\mathfrak{a}$ das folgende Ideal:

$$\mathfrak{a} = (X_0 Y, X_0 - X_1 Y, X_1 - X_2 Y, \ldots).$$

Dann hat $(R/\mathfrak{a}\langle T\rangle, V(T))$ nicht die Approximationseigenschaft.

Beweis: Bei (1) sieht man sofort, daß $R_\mathfrak{m}^\wedge$ über R algebraisch ist. Das reicht aber aus für das Nichterfülltsein der Approximationseigenschaft. (2) ist ein Beispiel für einen Ring, dessen Kom plettierung nicht flach über ihm ist. Es ist klar, daß $T - Y$ Nichtnullteiler in $R/\mathfrak{a}[T]$ und somit, da $R/\mathfrak{a}\langle T\rangle$ flach über $R/\mathfrak{a}[T]$ ist, auch Nichtnullteiler in $R/\mathfrak{a}\langle T\rangle$ ist. Auf der anderen Seite ist aber $\sum X_i T^i(T - Y) = 0$ in $R/\mathfrak{a}[[T]]$, d. h., $T - Y$ ist Nullteiler in $R/\mathfrak{a}[[T]]$. Das ist aber ein Widerspruch zur Approximationseigenschaft.

5.3. Beweis der Approximationssätze

Die Beweise beruhen alle auf einem Prinzip, das in spezieller Form auf M. Artin zurückzugehen scheint. Wir formulieren dieses Prinzip hier in voller Allgemeinheit, um die Beweisidee für die Approximationssätze besonders klar hervortreten zu lassen. Ist $f = (f_1, \ldots, f_m) \in A\langle T_1, \ldots, T_s\rangle^m$ ein Gleichungssystem, $s \geqq m$, so bezeichnen wir mit $\Delta = \Delta_f$ das von den $m \times m$-Minoren von $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$ erzeugte Ideal in $A\langle T\rangle = A\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$, und ist t eine Lösung des Gleichungssystems in einer Henselschen A-Algebra B, so bezeichnen wir mit $\Delta(t)$ das vom Bild von Δ bei der Abbildung $A\langle T\rangle \to B$, $T \mapsto t$, in B erzeugte Ideal. $\Delta(t)$ ist in folgendem Sinne nur von

$$P = A\langle T\rangle \Big/ \sum_{i=1}^{m} f_i A\langle T\rangle$$

abhängig:

Es sei F eine beliebige freie Henselsche A-Algebra und

$$F^r \to F \to P \to 0$$

eine exakte Folge. Dann sei Δ_m das Bild in F der kanonischen Abbildung

$$\left(\bigwedge^m F^r \otimes \bigwedge^{d-m} \Omega^1_{F/P}\right) \otimes \left(\bigwedge^d \Omega^1_{F/P}\right)^{-1} \to F$$

(d relative Dimension von F über A).

Man überzeugt sich leicht, daß das Bild von Δ_m in P, bezeichnet mit $\Delta_m(P)$, unabhängig von der Darstellung von P als Quotient einer freien Algebra ist und daß für $P \to B$, $T_i \mapsto t_i$ dieses $\Delta_m(P)$ in das oben definierte $\Delta(t)$ übergeht.

Die Nullstellenmenge von $\Delta_m(P)$ in $\mathrm{Spec}(P)$ ist die Menge derjenigen Punkte, in denen $\mathrm{Spec}(P)$ über A kleinere Kodimensionen als m hat oder singulär über A ist.

Das Prinzip, auf denen die Approximationssätze beruhen, berücksichtigt diese abgeschlossenen Teilmengen.

5.3.1. (Approximationsprinzip). *Es sei A eine Algebra vom Typ $R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ über einem in $V = V(I)$ Henselschen Ring R (R sei Noethersch),*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) \in A\langle T_1, \ldots, T_s\rangle =: A\langle T\rangle.$$

Ist $t^\wedge$ eine formale Lösung von $f = 0$, d. h.

$$t^\wedge \in (A^\wedge)^s = (R^\wedge_V[[x_1, \ldots, x_n]])^s,$$

die auf einer Teilmenge $W = W(J) \subseteq V$ von $\mathrm{Spec}(A)$ schon algebraisch ist (d. h. $t_i^\wedge \in A + JA^\wedge$, $J \subseteq AI + \sum Ax_j$), so gilt:

Ist $A^\wedge/\Delta(t^\wedge)$ endlich über $R^\wedge_V$ und $J\Delta(t^\wedge)$ im Jacobson-Radikal von $A^\wedge$ enthalten, so läßt sich $t^\wedge$ durch eine Lösung t aus $(R^\wedge_V\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)^s =: (A_{R^\wedge})^s$ modulo $JA^\wedge$ approximieren.

Hieraus folgt sofort, und das ist die Idee zum Beweis der Approximationssätze, daß man t dann auch durch eine Lösung aus $R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = A$ approximieren kann, sofern man weiß, daß R die Approximationseigenschaft besitzt. Das folgt daraus, daß der Funktor $F : (R\text{-Algebren}) \to (\text{Mengen})$, der jeder R-Algebra R' die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems aus $A_{R'} =: R'\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ zuordnet, die modulo $JA^\wedge_{R'}$ mit $t^\wedge$ übereinstimmen, und mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar ist (also $t \in F(R^\wedge_V)$ approximiert werden kann). Die Approximationssätze werden dann wie folgt bewiesen:

Bei gegebener Algebra A und $t^\wedge$ muß der Unterring R *geeignet* gewählt werden, so daß er (z. B. nach Induktionsvoraussetzung) bereits die Approximationseigenschaft besitzt, *und* so, daß $A^\wedge/\Delta(t)$ endlich über $R^\wedge$ ist.

Beweis von 5.3.1. Da

$$R^\wedge_V =: R^\wedge \subseteq A_{R^\wedge}/\Delta(t^\wedge) \cap A_{R^\wedge} \subseteq A^\wedge/\Delta(t^\wedge)$$

und $A^\wedge/\Delta(t^\wedge)$ endlich über $R^\wedge$ ist, ist $A^\wedge/\Delta(t^\wedge)$ endlich über $A_{R^\wedge}/\Delta(t^\wedge) \cap A_{R^\wedge}$ und Komplettierung dieses Ringes, also

$$A_{R^\wedge}/\Delta(t^\wedge) \cap A_{R^\wedge} = A^\wedge$$

(Lemma von Nakayama). Ist $\Delta_0 = \Delta(t^\wedge) \cap A_{R^\wedge}$, dann ist also $\Delta_0 A^\wedge = \Delta(t^\wedge)$.

Es sei

$$t_i^\wedge = a_i + \sum_j a_{ij} b_j, \qquad a_i \in A, \qquad a_{ij} \in A^\wedge, \qquad b_j \in J.$$

Aus $A_{R^\wedge}/\Delta_0 = A^\wedge/\Delta(t^\wedge)$ folgt leicht $A_{R^\wedge}/\Delta_0^2 = A^\wedge/\Delta(t^\wedge)^2$, da Δ_0/Δ_0^2 (als $A^\wedge$-Modul) komplett ist. Man kann also $a'_{ij} \in A_{R^\wedge}$ mit $a_{ij} \equiv a'_{ij} \bmod \Delta(t^\wedge)^2$ wählen. Ist

$$t_i' =: a_i + \sum_j a'_{ij} b_j,$$

dann ist $t_i^\wedge \equiv t_i' \bmod J\Delta(t^\wedge)$, also $t' = (t_1', \ldots, t_s') \bmod J\Delta_0^2$ eine Lösung von $f = 0$.

Es genügt, nun noch zu zeigen, daß $\Delta(t') = \Delta_0$ ist, da man dann das Newtonsche Lemma auf t' anwenden kann (vgl. 2.10.2.). Wegen

$$\Delta(t')\, A^\wedge \cap A = \Delta(t')$$

genügt es zu zeigen, daß $\Delta(t')\, A^\wedge = \Delta(t^\wedge)$ ist. Aus

$$t_i' - t_i^\wedge \equiv 0 \bmod J\Delta(t^\wedge)^2$$

folgt sofort

$$\Delta(t')\, A^\wedge \subseteq \Delta(t^\wedge) \qquad \text{und} \qquad \Delta(t^\wedge) \subseteq \Delta(t')\, A^\wedge + J\Delta(t^\wedge)^2.$$

Da $J\Delta(t^\wedge)$ im J-Radikal von $A^\wedge$ enthalten ist, folgt daraus nach dem Lemma von Nakayama, daß $\Delta(t^\wedge) = \Delta(t')\, A^\wedge$ ist, q.e.d.

5.3.2. Korollar. *Ist R ein exzellenter diskreter Bewertungsring, $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von R, dann ist $(R, V(\mathfrak{m})) \in AE$, wenn R Henselsch in $V(\mathfrak{m})$ ist.*

5.3.3. Korollar. *Es sei A wie in 5.3.1. definiert; die Eigenschaft (3) ist erfüllt, wenn $(f_1, \ldots, f_m)$ einen vollständigen Durchschnitt definieren und wenn der singuläre Ort von $X = \operatorname{Spec}(A[Y]/(f_1, \ldots, f_m))$ in $\operatorname{Spec}(A[Y]/(X_1, \ldots, X_n))$ enthalten ist.*

5.3.4. Korollar. *Ist R ein Ring von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring, $p \in \operatorname{Spec}(R)$, dann ist*

$$((R^h_{V(p)}) \langle X_1, \ldots, X_n\rangle,\ V(X_1, \ldots, X_n)) \in AE.$$

Beweis von 5.3.2. Es sei $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ein Gleichungssystem aus $R[T_1, \ldots, T_N]^m$ das die formale Lösung $t^\wedge = (t_1^\wedge, \ldots, t_N^\wedge)$ aus $R_{\mathfrak{m}}^{\wedge N}$ hat. Wir können o.B.d.A., wie wir in 5.3.4. zeigen werden, voraussetzen, daß $m = \operatorname{kodim}(f_1, \ldots, f_m)$ ist und die f_i den Kern der Abbildung $R[T_1, \ldots, T_N] \to R_{\mathfrak{m}}^\wedge$, $T_i \mapsto t_i^\wedge$ erzeugen und $\Delta(t^\wedge) \neq 0$ ist, da $R_{\mathfrak{m}}^\wedge$ über R separabel ist.

Nun ist für genügend großes d mit $t \equiv t^\wedge \bmod \mathfrak{m}^d$ stets $\Delta(t^\wedge) = \Delta(t)\, R^\wedge$ und $f_\alpha(t) \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}^d$.

Weiterhin kann man d so groß wählen, daß für ein fest vorgegebenes $c > 0$

$$\mathfrak{m}^d \subseteq \Delta(t)^2\, \mathfrak{m}^c$$

gilt. Dann existiert aber ein t', $t' \equiv t \bmod \Delta(t)\, \mathfrak{m}^c$ und $f_\alpha(t') = 0$ für alle α.

Beweis von 5.3.3. Der singuläre Ort von X ist in $\operatorname{Spec}(A[Y])$ durch $X \cap V(\Delta(Y))$ gegeben. Nach Voraussetzung ist für eine formale Lösung $\bar{y}$ des Gleichungssystems stets $V(\Delta(\bar{y})) \subseteq V((X))$, also $\Delta(\bar{y}) \supseteq (X_1, \ldots, X_n)^m$ für ein gewisses m. Damit ist die Endlichkeitsbedingung von 5.3.1. erfüllt, und wir können das Approximationsprinzip anwenden.

Beweis von 5.3.4. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:
a) Reduktion auf den Fall, daß R ein Körper oder diskreter Bewertungsring ist,
b) Reduktion auf den Fall eines vollständigen Durchschnitts,
c) Induktionsbeweis unter Verwendung des Approximationsprinzips.

a) Ist R von endlichem Typ über einem Körper, dann können wir uns nach 5.1.3. darauf beschränken, das Korollar für $R = k[T_1, \ldots, T_s]$ (k ein Körper, T_i Unbestimmte) zu beweisen. Weiterhin können wir o.B.d.A. annehmen, daß das Primideal p maximal ist, denn wir können ja nach dem Noetherschen Normalisierungssatz die T_i so wählen, daß

$$R_p = k(T_1, \ldots, T_q)\,[T_{q+1}, \ldots, T_s]_{pk(T_1,\ldots,T_q)[T_{q+1},\ldots,T_s]}$$

und $pk(T_1, \ldots, T_q)\,[T_{q+1}, \ldots, T_s]$ maximal ist. Ist jetzt $k[T_1, \ldots, T_s]/p =: L$ separabel über k, so ist

$$(R_p)^h \simeq L\langle Q_1, \ldots, Q_s\rangle, \qquad Q_i = T_i - q_i, \qquad q_i \in L,$$

durch die Restklassen der T_i gegeben. Ist L/k nicht separabel, so ist

$$(R_p)^h \simeq L_s\langle Q_1, \ldots, Q_s\rangle\,[T_1, \ldots, T_s].$$

Dabei ist L_s die separable algebraische Abschließung von k in L und $Q_i = T_i^{l_i} - q_i$ (l_i eine Potenz der Charakteristik von k, so daß $X_i \bmod p$ durch ein separables Minimalpolynom $f_i(X_i^{l_i})$ gegeben ist, q_i eine Wurzel von f_i in L_s). In diesem Fall ist also $(R_p)^h$ endlich frei ($(R_p)^h$ ist regulärer Ring) über $L_s\langle Q_1, \ldots, Q_s\rangle$. Wir können also für den Beweis des Korollars o.B.d.A. annehmen, daß $(R_p)^h$ zu $k\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$ isomorph ist, d. h., es genügt, das Korollar für den Fall, daß R ein Körper ist, zu beweisen. Ist R von endlichem Typ über einem diskreten Bewertungsring, so verfährt man analog.

b) Wir verwenden die Bezeichnungen von (3) auf S. 134 und setzen $A = k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$, $I = (X_1, \ldots, X_n)$, wobei k ein Körper ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß die $f_1, \ldots, f_m$ den Kern P des Homomorphismus $A[Y] \to A_\wedge$, gegeben durch $Y_i \mapsto \bar{y}_i$, erzeugen. Dann ist $A[Y]/P \subseteq A^\wedge$ und somit separabel über A; denn aus Kapitel 2 folgt, daß $A^\wedge$ über A separabel ist. Nach dem Jacobischen Kriterium, existieren also, wenn r die Höhe von P ist, r Gleichungen unter den $f_1, \ldots, f_m$ (o.B.d.A. $f_1, \ldots, f_r$), so daß $\Delta(\bar{y}) \neq (0)$ für das aus den $r \times r$-Minoren von $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)$ erzeugte Ideal $\Delta(Y_1, \ldots, Y_N)$ gilt. Dann ist aber $\Delta(Y_1, \ldots, Y_N) \not\subseteq P$. Wenn wir nun ein $y \in A^N$ haben mit $f_1(y) = \cdots = f_r(y) = 0$ und $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod I^c$ für genügend großes c, dann ist $\Delta(y) \neq 0$. Wäre nämlich $\Delta(y) = 0$, dann wäre $\Delta(\bar{y}) \subseteq I^c A^\wedge$. Das ist aber nicht für jedes c möglich. Wir wollen mit P' den Kern der Abbildung $A[Y] \to A$, $Y_i \mapsto y_i$ bezeichnen. Die $f_1, \ldots, f_r$ liegen in P', $\Delta \not\subseteq P'$. Wir wählen nun k so groß, daß

$$(f_1, \ldots, f_r) : \Delta^k = (f_1, \ldots, f_r) : \Delta^{k+1}$$

ist. Dann ist

$$(f_1, \ldots, f_r) = ((f_1, \ldots, f_r) : \Delta^k) \cap (f_1, \ldots, f_r, \Delta^k)$$

und damit, da P' ein Primideal ist und Δ nicht in P' liegt, $(f_1, \ldots, f_r) : \Delta^k$ in P' enthalten. Nun ist nach dem Zariskischen Kriterium der Morphismus $\operatorname{Spec}(A[Y]/f) \to k$ auf dem durch Δ definierten offenen Unterschema glatt. Daraus folgt, daß $(f_1, \ldots, f_r) : \Delta^k$ ein Primideal ist (k ist ja ein Körper). Da nun die Höhe von $(f_1, \ldots, f_r)$ gleich der Höhe von $(f_1, \ldots, f_m)$ ist (so war r gerade gewählt), ist P isoliertes Primideal von $(f_1, \ldots, f_r) : \Delta^k$. Damit ist $P = (f_1, \ldots, f_r) : \Delta^k \subseteq P'$.

Wir haben also gesehen, daß es ausreicht, für die $f_1, \ldots, f_r$ eine Lösung aus A zu konstruieren, und haben somit das Problem auf den Fall eines „vollständigen Durchschnitts" reduziert. Analog geht man vor, wenn k ein exzellenter diskreter Bewertungsring ist.

c) Wir können also davon ausgehen, daß $A = R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ und R ein Henselscher exzellenter diskreter Bewertungsring oder ein Körper ist. Wir beweisen das Korollar jetzt durch vollständige Induktion über die Anzahl der Unbestimmten X_i. Es genügt dabei, den Fall zu betrachten, daß R ein diskreter exzellenter Bewertungsring ist. Ist nämlich R ein Körper, so gehen wir zu $R[[T]]$ über und setzen $T = 0$. Der Fall $n = 0$ ist in 5.3.2. abgehandelt.

Um den Induktionsschritt mit dem Approximationsprinzip anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß $R^\wedge[[X_1, \ldots, X_n]]/\Delta(\bar{y})$ endlich über $R^\wedge[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ ist. Das können wir mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz realisieren, wenn wir wissen, daß $\Delta(\bar{y}) \not\equiv 0 \bmod p$ ist, wobei (p) das Maximalideal von R ist. Ist

$\Delta(\bar{y}) \equiv 0 \bmod p$, liegt also eine „$p$-Singularität" vor, so können wir diese durch eine Aufblasung beseitigen (NÉRONS p-desingularisation, vgl. M. ARTIN [6]).

Es sei $X = \operatorname{Spec}(A[Y]/f)$. Die formale Lösung definiert einen Homomorphismus $\sigma : \operatorname{Spec}(A^\wedge) \to X$. Ist nun $\Delta(\bar{y}) \equiv 0 \bmod p$, d. h., $\sigma(p \cdot A^\wedge)$ ist singulärer Punkt von X, dann blasen wir X in der Abschließung W von $\sigma(p \cdot A^\wedge)$ auf. Es sei W durch das Ideal $(g_1, \ldots, g_r)$ in $A[Y]$ definiert. Wir betrachten den affinen Teil der Aufblasung von X in W, der durch

$$(A[Y]/f)\left[\frac{g_1}{p}, \ldots, \frac{g_r}{p}\right]$$

gegeben ist,

$$\operatorname{Spec}\left((A[Y]/f)\left[\frac{g_1}{p}, \ldots, \frac{g_r}{p}\right]\right) =: \bar{X}.$$

Wir können nun σ zu einer Abbildung $\bar{\sigma} : \operatorname{Spec}(A^\wedge) \to \bar{X}$ liften. Nach der Definition von W ist $g_r(\bar{y}) \equiv 0 \bmod pA^\wedge$, d. h. $g_r(\bar{y}) = p\bar{z}_v$, $\bar{z}_v \in A^\wedge$. Das definiert aber einen Morphismus

$$(A[Y]/f)\left[\frac{g_1}{p}, \ldots, \frac{g_r}{p}\right] = A[Y, Z]/\big((f), pZ_1 - g_1, \ldots, pZ_r - g_r\big) \to A^\wedge,$$

$$Y_i \mapsto \bar{y}_i, \qquad Z_i \mapsto \bar{z}_i$$

und somit die Fortsetzung $\bar{\sigma}$. Es genügt also, σ zu algebraisieren, denn eine Algebraisierung von $\bar{\sigma}$ definiert eine von σ. Durch eine endliche Anzahl solcher Aufblasungen kann man nun erreichen, daß die „Néron-Singularität" aufgelöst wird. Wir können also o.B.d.A. voraussetzen, daß $\Delta(\bar{y}) \not\equiv 0 \bmod p$ ist. Wir wählen ein Basiselement $d \in \Delta(\bar{y})$ mit $d \not\equiv 0 \bmod p$. Nach geeigneten linearen Transformationen können wir auf d den Weierstraßschen Vorbereitungssatz anwenden und erreichen, daß $A^\wedge/d$ und damit $A^\wedge/\Delta(\bar{y})$ endlich über $R^\wedge[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ ist. Jetzt können wir das Approximationsprinzip anwenden. Damit ist das Korollar bewiesen.

Wenn wir berücksichtigen, daß die Henselsche Abschließung durch den induktiven Limes der strengen Etalumgebungen gegeben ist, erhalten wir insgesamt das folgende Resultat:

5.3.5. Satz. *Es sei R ein Ring von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring, $A = R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$, $I = (X_1, \ldots, X_n)$, und es sei $f = (f_1, \ldots, f_m) \in A\langle Y_1, \ldots, Y_N\rangle^m$ ein Gleichungssystem, das eine formale Lösung $\bar{y} = (\bar{y}_1 \ldots, \bar{y}_N)$ aus $A^\wedge_{V(I)}$ besitzt. Dann gibt es zu jedem $P \in \operatorname{Spec}(R)$ eine strenge Etalumgebung $\operatorname{Spec}(R')$ $\big($d. h. $k(P) = k(PR')\big)$, so daß für jede natürliche Zahl $c > 0$ eine Lösung $y = (y_1, \ldots, y_N)$ von $f = 0$ aus $R'\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ existiert mit $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod I^c$.*

Bemerkung. Ist speziell P ein Primideal vom Rang Null, dann ist $\operatorname{Spec}(R')$ eine Zariski-Umgebung, d. h. $R' = R_d$ für ein $d \in R$. Der Satz gilt in diesem Fall auch für einen beliebigen Noetherschen Integritätsbereich.

5.3.6. Bemerkung. *Ist R ein kompletter regulärer lokaler Ring, dann ist das Paar $\big(R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle, V(X_1, \ldots, X_n)\big) \in AE$.*

Diese Bemerkung beweist man analog zu 5.3.4. durch Induktion. Es genügt nach dem Cohenschen Struktursatz für komplette lokale Ringe (vgl. [18]), die Bemerkung

für formale Potenzreihenringe $R = S[[T_1, \ldots, T_q]]$ über einen kompletten diskreten Bewertungsring S zu beweisen. Man führt den Beweis durch Induktion über q, indem man das Approximationsprinzip 5.3.1. für Gleichungen vom Typ

$$(*) \qquad (f_1, \ldots, f_m) \in A[[Y_1, \ldots, Y_k]]\langle Z_1, \ldots, Z_l\rangle^m$$

formuliert und analog beweist. Dann verfährt man analog zum Beweis von 5.3.4. Für $q = 0$ haben wir die Situation von Korollar 5.3.2. vorliegen. Den Induktionsschritt liefern uns dann wieder entsprechende Versionen von Nérons blowing up und der Weierstraßsche Vorbereitungssatz (um ihn anwenden zu können, muß man gerade von Gleichungen vom Typ (*) ausgehen).

5.3.7. Bemerkung. *Es seien die Voraussetzungen von 5.3.5. erfüllt. Dann gibt es einen Homomorphismus $l : A \to A$ und eine offene Menge $U = U(d)$, $d \in I$, so daß die Fortsetzung von l auf A_d ein Isomorphismus ist und für jedes $c > 0$ ein N-Tupel $y = (y_1, \ldots, y_N) \in A^n$ mit $l(f)(y) = 0$ und $l(\bar{y}_i) \equiv y_i \bmod I^c$ existiert.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu 5.3.4. Wir können zunächst wegen 5.1.3. o.B.d.A. voraussetzen, daß $A = k[T_1, \ldots, T_s]\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ ist, T_i und X_i Unbestimmte. Wir können dann analog zu 5.3.4. a) zeigen; b) entfällt. Wesentlich ist, daß wir, um das Approximationsprinzip anwenden zu können, erreichen, daß $A^\wedge/\Delta(\bar{y})$ endlich über $K[T_1, \ldots, T_s][[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ ist. Um an dieser Stelle den Weierstraßschen Vorbereitungssatz anwenden zu können, müssen wir durch Transformationen der Gestalt $T_i \mapsto T_i X_n^e$, $X_i \mapsto X_i + \alpha_i X_n$ erreichen, daß der Koeffizient der Anfangsform eines Basiselements von $\Delta(\bar{y})$ eine Einheit wird. Diese Transformationen definieren dann l.

Nach dem Beweis der Approximationssätze stellt sich nun das folgende Problem: Ist für einen Ring R und Unbestimmte $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $(R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle, V(X_1, \ldots, X_n))$ aus AE?

Wir haben an einem Beispiel gesehen, daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht (der Ring R war jedoch in diesem Fall nicht Noethersch). Die folgende Bemerkung zeigt, daß die Approximationseigenschaft nicht unbedingt an die Bedingung „Noethersch" gebunden sein muß.

5.3.8. Bemerkung. *Ist für jeden Polynomring $R = K[T_1, \ldots, T_s]$, wobei s die natürlichen Zahlen durchläuft, stets $(R\langle X\rangle, V(X)) \in AE$, dann ist auch $(A\langle X\rangle, V(X)) \in AE$, wobei A ein Polynomring in unendlich vielen Variablen über K ist.*

Beweis. Es sei $(f_1, \ldots, f_m) =: f \in A\langle X\rangle[Y]^m$ und $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N) \in A[[X]]^N$ mit $f(\bar{y}) = 0$ gegeben. Aus der Definition von $A\langle X\rangle$ folgt, daß die f_i aber schon über einem endlichen Polynomring definiert sind, etwa über $K[T_1, \ldots, T_s]\langle X\rangle[Y]$. Wir geben uns nun ein $c > 0$ vor und adjungieren zu $K[T_1, \ldots, T_s]$ noch diejenigen Unbestimmten aus R, die bei den Formen von $\bar{y}_j$ vom Grad bezüglich $(X) \leq c$ vorkommen. Die restlichen Unbestimmten aus A setzen wir Null, und die so erhaltenen formalen Reihen bezeichnen wir mit $\bar{y}^{(0)} = (\bar{y}_1^{(0)}, \ldots, \bar{y}_N^{(0)})$. Dann ist $\bar{y}_i \equiv \bar{y}_i^{(0)}$ $\bmod (X)^c$ und $f(\bar{y}^{(0)}) = 0$.

Wir haben somit das Problem auf einen endlichen Polynomring $K[T_1, \ldots, T_K]$ reduziert. Es gibt nun nach Voraussetzung eine Lösung aus $K[T_1, \ldots, T_K]\langle X\rangle$, die mit $\bar{y}^{(0)}$ und somit auch mit $\bar{y}$ modulo $(X)^c$ übereinstimmt.

Wir können diese Bemerkung nicht so ohne weiteres mit Beispiel (2) von 5.2.2. in Beziehung bringen, da in diesem Beispiel $\mathfrak{a}R[[T]]$ vom Kern von $R[[T]] \to R/\mathfrak{a}[[T]]$ verschieden ist.

Es ist also interessant, für den Fall, daß R ein Noetherscher Integritätsbereich ist oder speziell ein Polynomring in endlich vielen Unbestimmten über einem Körper, zu untersuchen, ob das Paar $(R\langle X\rangle, V(X)) \in AE$ ist. Wir können den Beweis von 5.2.1., (4), für diesen Fall nicht so ohne weiteres übertragen, da die in der Voraussetzung des Approximationsprinzips enthaltene Endlichkeitsbedingung im allgemeinen nicht erfüllt werden kann.

5.3.9. Die Approximation formaler Schritte

Wir wollen als erstes die folgende Fragestellung betrachten: Gegeben sind zwei Schemata X und Y und ein Schemamorphismus $f: X \to Y$, der auf einer geschlossenen Umgebung V einen Schnitt s_0 hat:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ & V \arrow[ul, "s_0"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Läßt sich dann dieser Schnitt fortsetzen, und wie gewinnt man alle derartigen Fortsetzungen? Das ist ein im allgemeinen sehr schwieriges Problem, wenn sich der Satz über implizite Funktionen nicht anwenden läßt, d. h., wenn wir nicht wissen, daß f glatt ist. Wenn wir aber zusätzlich fordern, daß s_0 sich über einem formalen Schnitt faktorisieren läßt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ & Y_V^{\wedge} \arrow[ul, "s_f"'] \arrow[u, "k'"'] \\ & V \arrow[uul, "s_0"] \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

(dabei ist k die kanonische Abbildung lokal geringter Räume von $V \to Y_V^{\wedge}$, $Y_V^{\wedge}$ die Komplettierung von Y bezüglich V, k' die kanonische Abbildung von $Y_V^{\wedge}$ in Y)

$$s_f \circ k = s_0, \qquad f \circ s_f = k',$$

erscheint das Problem etwas einfacher. Aber auch die Frage nach der Fortsetzbarkeit des formalen Schnittes zu einem Schnitt von f wird im allgemeinen nicht positiv zu beantworten sein. Ein Grund dafür ist, daß der Satz über implizite Funktionen in der algebraischen Geometrie nicht generell gilt. Es zeigt sich aber, daß es unter gewissen Bedingungen einen „Henselschen" Schnitt gibt, d. h. einen Morphismus $p: Y_V{}^h \to X$ mit $f \circ p = (Y_V{}^h \to Y)$. Damit gibt es dann auch einen Schnitt einer Etalumgebung U von V in X.

5.3.9.1. Satz. *Es sei X ein affines Schema von endlichem Typ über einem Grundkörper k und $Y|X$ ein Schema von endlichem Typ. Ferner sei V eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Es sei jetzt ein formaler Schnitt zum kanonischen Morphismus $Y \to X$, $X_V^{\wedge} \to Y$ gegeben, d. h., das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] & X \\ & X_V^{\wedge} \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Dann gilt für jede natürliche Zahl $c > 0$:

(1) *Für jeden Punkt P von X gibt es eine strenge Etalumgebung U und einen Schnitt $U \to Y$, der mit dem formalen auf dem durch J^c definierten abgeschlossenen Unterschema übereinstimmt (J ist dabei das Definitionsideal von V).*

(2) *Es gibt einen Morphismus l von X auf sich, der auf einer dichten offenen Teilmenge U von X, deren Durchschnitt mit V leer ist, einen Isomorphismus induziert, so daß zu dem durch l induzierten formalen Schnitt ein Henselscher Schnitt $X_V{}^h \to Y$ existiert, der mit dem formalen auf dem durch $J_0{}^c$ (J_0 Definitionsideal von V) definierten abgeschlossenen Unterschema von $X_V^{\wedge}$ übereinstimmt, d. h., das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] & X & X_V^{\wedge} \arrow[l] \\ Y \arrow[u, "l"] \arrow[r] & X \arrow[u, "l"] & X_V^{\wedge} \arrow[u, "l'"] \arrow[l] \arrow[ll] \\ & X_V^h \arrow[ul, dashed] & V(J_0^c) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Durch (2) erhalten wir dann auch sofort Schnitte strenger Etalumgebungen von V in X.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus der schematheoretischen Formulierung von 5.3.5. und 5.3.7.

5.3.9.2. Korollar. *Es sei S ein affines Schema von endlichem Typ über einem Grundkörper. Ferner sei $V \subseteq S$ eine abgeschlossene Teilmenge und $S^{\wedge} = S_V^{\wedge}$. Weiterhin seien X, Y Schemata lokal von endlichem Typ über S und ein $S^{\wedge}$-Morphismus $f: X \times_S S^{\wedge} \to Y \times_S S^{\wedge}$ gegeben. Dann gilt für jede natürliche Zahl $c > 0$:*

(1) *Für jeden Punkt P von S gibt es eine strenge Etalumgebung S' und eine Abbildung*

$$f': X \times_S S' \to Y \times_S S',$$

so daß sich f und f' auf der durch J^c definierten abgeschlossenen Menge nicht unterscheiden (J ist dabei das Definitionsideal von V).

(2) *Es gibt einen Homomorphismus l von S auf sich, der auf einer dichten offenen Teilmenge U von S, deren Durchschnitt mit V leer ist, einen Isomorphismus induziert. Für die durch l aus f induzierte Abbildung f_0 gilt: Es gibt eine strenge Etalumgebung U von V und eine Abbildung*

$$f: X \times_S U \to Y \times_S U$$

derart, daß sich f_0 und f' auf der durch J^c (J Definitionsideal von V) definierten abgeschlossenen Menge nicht unterscheiden.

Beweis. Das Korollar folgt aus 5.3.9.1. und dem folgenden Hilfssatz.

5.3.9.3. Hilfssatz. *Ist S ein quasikompaktes und quasisepariertes Schema und sind X und Y Schemata von endlicher Darstellung über S, dann ist der folgende Funktor lokal von endlicher Darstellung (d. h., der Funktor ist mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar):*

$$(S' \to S) \mapsto \mathrm{Hom}_{S'}(X \times_S S', Y \times_S S').$$

Den Beweis von 5.3.3. findet man bei A. Grothendieck [18], IV, 8.8.2.

5.4. Deformationen

5.4.1. Eine wichtige Anwendung finden die Approximationssätze auf die Deformationstheorie. Wir wollen zunächst die Problemstellung erläutern. Ein allgemeines Existenzproblem in der Mathematik ist die Frage nach der Existenz universeller Objekte, das wir hier nach Grothendieck wie folgt präzisieren wollen:

Gegeben sei eine Basiskategorie $\mathscr{S}$, und jedem Objekt S von $\mathscr{S}$ sei eine Menge $F(S)$ gewisser Objekte zugeordnet, so daß

$$S \mapsto F(S)$$

kofunktoriell von S abhängt (Basiswechsel). Ein universelles Objekt (ξ, T), $\xi \in F(T)$, $T \in \mathscr{S}$, ist definiert als ein Paar, so daß für jedes (η, S), $\eta \in F(S)$, $S \in \mathscr{S}$, η von der Form $\eta = F(\alpha)\xi$ mit einem eindeutig bestimmten Morphismus $\alpha : S \to T$ ist. Anders ausgedrückt ist also (ξ, T) eine Darstellung des Kofunktors F. Der Morphismus α ist dann also *die* Invariante von $\mathscr{S}$. Man kann das Problem auch in der Sprache der gefaserten Gruppoide formulieren.

Es sei $\mathscr{S}$ die Kategorie der Schemata über einem Basisschema S (z. B. ein Grundkörper) und k ein Körper, $t_0 \in S(k)$, $\xi_0 \in F(k)$ (Spec(k) als S-Schema auf Grund von t_0 betrachtet). Unter einer *Deformation von* ξ_0 versteht man ein Tripel (ξ, T, t), so daß (T, t) ein punktiertes (S, t)-Schema mit $k(t) = k$, $\xi \in F(T)$ mit $\xi(t) = \xi_0$ ist (wobei wir mit $\xi(t)$ das Bild von ξ bei $F(T) \to F(t)$ bezeichnen!).

Identifiziert man zwei Deformationen von ξ_0, $(\xi, T, t) = (\xi', T', t')$, falls es eine gemeinsame Etalumgebung (T'', t'') von (T', t') und (T, t) gibt, so daß $\xi | T'' = \xi' | T''$ ist, so gelangt man von F zu einem neuen Funktor

$$A \mapsto D(A) = \{\text{Deformationen von } \xi_0 \text{ über } A\},$$

der Kategorie der lokalen Henselschen Algebren A über dem Henselschen Ring $\Lambda = \mathcal{O}^h_{S,t_0}$, und die Darstellbarkeit von F impliziert diejenige von D. Wir befassen uns hier mit der letzten Fragestellung. Gegeben sei also im folgenden:

a) ein Henselscher lokaler Ring Λ mit dem Restklassenkörper k und dem Maximalideal $\mathfrak{n}$,

b) ein Funktor D der Kategorie der Henselschen lokalen Λ-Algebren mit vorgegebenem Restklassenkörper k, so daß $D(k) = \{\xi_0\}$ ist.

Wir verstehen immer stillschweigend unter dem Strukturmorphismus der lokalen Λ-Algebren einen lokalen Morphismus. Gefragt ist nach der Darstellbarkeit von D bzw. nach möglichen Abschwächungen dieses Problems (vgl. 5.4.2.). Zur Motivierung betrachten wir ein Beispiel. Es sei $k \xrightarrow{\xi_0} P_0$ eine k-Algebra von endlichem Typ; das entspricht einer affinen algebraischen Mannigfaltigkeit Spec(P_0) über k. Eine Deformation von ξ_0 bzw. P_0 ist ein Paar (ξ, θ), $\xi : A \to P$ ein flacher Morphismus von endlichem Typ, $\theta : P \otimes_A k \simeq P_0$ ein k-Algebrahomomorphismus,

$$D_{P_0}(A) = \{(\xi, \theta), \xi : A \to P;\ \theta : P \otimes_A k \simeq P_0\}/(\text{modulo Isomorphie}).$$

Wir schreiben dafür auch „$P \in D_{P_0}(A)$" und nehmen dabei immer stillschweigend an, daß (ξ, θ) mit gegeben sind. $D_{P_0}(A)$ besteht also aus Familien algebraischer Mannigfaltigkeiten, deren spezielle Faser Spec(P_0) ist.

Ist beispielsweise P_0 durch eine Gleichung $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$ definiert, $A = k\langle t_1, \ldots, t_m\rangle$, so definiert jede Gleichung

$$F(t, X) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} t_i g_i(t, X) = 0$$

eine Deformation $\big(P = A[X_1, \ldots, X_n]/(F)\big)$ von P_0.

Betrachtet man nicht A-Algebren P von endlichem Typ, sondern deren Lokalisierungen nach $S = 1 + \mathfrak{m}_A P$, so ergibt sich allgemein folgende Beschreibung der Deformationen: Es sei

$$P_0 = k[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m), \qquad I_0 = \sum_i f_i k[X].$$

Es sei P Lokalisierung von $A[X]/I$ $\big(X = (X_1, \ldots, X_n)\big)$. Aus der Flachheit von P/A folgt dann $I \otimes_A k \simeq I_0$; also gibt es Polynome $F_i \in A[X]$, $F_i \bmod \mathfrak{m}A[X] = f_i$, und P ist Lokalisierung von $A[X]/(F_1, \ldots, F_m)$.

Ist $k \subset A$ und $t_1, \ldots, t_q$ eine Basis von $\mathfrak{m}_A$, so sind die F_i von der Form

$$F_i = f_i + \sum_{j=1}^{q} g_{ij} t_j, \qquad g_{ij} \in A[X].$$

Im allgemeinen wird aber nicht jede Wahl von F_i mit $F_i \equiv f_i \bmod \mathfrak{m}A[X]$ eine Deformation definieren; ist $I = (F_1, \ldots, F_m)$, so ist dafür notwendig, daß $P = (A[X]/I)_S$ A-flach ist. Das ist gleichbedeutend mit $\mathrm{Tor}_1^A(P, k) = 0$, d. h., daß $I_S \otimes_A k \to k[X]$ injektiv ist. Das Bild dieses Morphismus ist I_0, also definieren $(F_1, \ldots, F_m)$ genau dann eine Deformation von P_0, wenn sich jede lineare Relation zwischen $f_1, \ldots, f_m$ zu einer solchen zwischen $F_1, \ldots, F_m$ liften läßt.

Darstellbarkeit von D_{P_0} würde bedeuten: Zu $(A \xrightarrow{\xi} P, \theta)$ gibt es *genau einen* Morphismus $B \xrightarrow{\varphi} A$ und $Q \otimes_B A \simeq P$ als A-Algebra, verträglich mit θ. Man kann aber leicht Beispiele von Automorphismen $(P, \theta) \simeq (P, \theta)$ finden; daher erscheint die Forderung der Eindeutigkeit von φ sehr stark. Das motiviert die folgende Definition. Wir betrachten wieder einen beliebigen Funktor D und vereinbaren folgende Schreibweise: Anstelle von $u : B \to A$ mit $D(u)\,\eta = \xi$ $\big(\eta \in D(B), \xi \in D(A)\big)$ schreiben wir $u : (B, \eta) \to (A, \xi)$.

Definition. (B, η), $\eta \in D(B)$, heißt eine *semiuniverselle Deformation* von ξ_0, wenn folgendes gilt:

(UD 1) Jede Deformation $\xi \in D(A)$ wird durch einen A-Homomorphismus $\alpha : (B, \eta) \to (A, \xi)$ induziert (d. h. $D(\alpha)\,\eta = \xi$), und ist darüber hinaus $I \subseteq A$ ein Ideal, so läßt sich jedes Diagramm mit gegebenem $\bar{\alpha}$

$$\begin{tikzcd} & (A, \xi) \arrow[d] \\ (B, \eta) \arrow[ur, dashed, "\alpha"] \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & (A/I, \bar{\xi}) \end{tikzcd}$$

$=$ Glattheit des Funktors $\mathrm{Hom}(B, -) \to D$

durch den gestrichelten Pfeil α zu einem kommutativen Diagramm ergänzen.

(UD 2) Die Tangentialabbildung $T_\lambda(\alpha)$ ist eindeutig durch (A, ξ) bestimmt, d. h.

$$T_{B|A}(k) =: \mathrm{Hom}_A(B, k[t]/(t^2)) \to D(k[t]/(t^2)), \qquad \alpha \mapsto D(\alpha)\,\eta$$

ist ein Isomorphismus ($T_{B|A}(k)$ ist der Zariskische Tangentialraum im abgeschlossenen Punkt von $\mathrm{Spec}(B)$).

Im Unterschied zu universellen Deformationen ist eine semiuniverselle Deformation nicht bis auf einen kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wir werden stets zusätzlich voraussetzen, daß Λ Noethersch ist, und fragen nach semiuniversellen Deformationen (B, η), für die noch folgendes gilt:

(UD 3) B ist Henselsche Abschließung einer Λ-Algebra von endlichem Typ.

5.4.2. *Semiuniverselle Deformationen, die* (UD 3) *erfüllen, sind bis auf (nicht kanonische) Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Denn sind (B, η), (B', η') gegeben, so gibt es einen Λ-Homomorphismus $\sigma: B \to B'$ mit $D(\sigma)\,\eta = \eta'$. Auf Grund von (UD 2) ist dann (da $T_{B|\Lambda}(k)^* = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}B$ und $\mathfrak{m}$ von endlichem Typ ist!)

$$B/\mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}B \simeq B'/\mathfrak{m}'^2 + \mathfrak{n}B'.$$

Folglich ist $\mathfrak{m}B' + \mathfrak{m}'^2 = \mathfrak{m}'$, also $\mathfrak{m}B' = \mathfrak{m}'$, und nach 3.4.5. ist dann σ surjektiv. Aus Symmetriegründen gibt es auch eine Surjektion $\sigma': B' \to B$, und dann ist $\tau = \sigma' \circ \sigma : B \to B$ ein surjektiver Endomorphismus. Da B Noethersch ist, ist dann τ auch injektiv (da Kern τ^n = Kern τ^{2n} für $n \gg 0$ und $\tau^n(B) = B$ ist), q.e.d.

5.5. Formale Deformationen

Wir betrachten dieselbe Situation wie in **5.4**. Eine Abschwächung der Frage nach der Existenz semiuniverseller Deformationen ist die Frage nach der Existenz formaler semiuniverseller Deformationen; das sind solche, die infinitesimale Deformationen klassifizieren.

Definition. $(B, (\eta_n))$ heißt *formale semiuniverselle Deformation*, wenn B eine komplette Noethersche lokale Λ-Algebra ist, $\eta_n \in D(B/\mathfrak{m}^{n+1})$, $(\eta_n) \in \text{lim-proj}\, D(B/\mathfrak{m}^{n+1})$ sowie (UD 1) und (UD 2) aus 5.4.1. für Artinsche Λ-Algebren A gelten. Dabei ist $(B, (\eta_n)) \to (A, \xi)$ so definiert, daß η_n in ξ übergeht, wenn n hinreichend groß ist (so daß $\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq$ Kern $(B \to A)$ ist).

Das Prinzip der Konstruktion semiuniverseller Deformationen besteht erstens in der Konstruktion formaler semiuniverseller Deformationen (M. Schlessinger [54]) und zweitens im Konvergenzbeweis (M. Artin [5]).

Eine formale semiuniverselle Deformation, für die B Noethersch und komplett ist, ist eindeutig bestimmt bis auf einen (nicht kanonischen) Isomorphismus; der Beweis ist analog dem für semiuniverselle Deformationen. Für die Existenz ist notwendig, daß $D(k[t]/(t^2))$ ein Vektorraum über k ist. Dafür ist die folgende Eigenschaft hinreichend: Sind V, W endlichdimensionale k-Vektorräume, so ist

$$D(k \oplus (V \oplus W)) \simeq D(k \oplus V) \times D(k \oplus W)$$

(induziert durch die Projektionen $k \oplus V \leftarrow k \oplus V \oplus W \to k \oplus W$; $k \oplus V$, $k \oplus W$ k-Algebren mit $V \cdot V = 0$, $W \cdot W = 0$). Denn seien $t^2 = t_1^2 = t_2^2 = t_1 t_2 = 0$,

$$\alpha: k \oplus t_1 k \oplus t_2 k \to k \oplus tk,$$
$$a + t_1 a_1 + t_2 a_2 \mapsto a + t(a_1 + a_2),$$

dann definiert α eine Addition

$$D(k[t]) \times D(k[t]) \simeq D(k[t_1, t_2]) \xrightarrow{D(\alpha)} D(k[t]),$$

und k operiert auf $k[t]$ durch

$$\sigma(a)\,(b + ct) = b + act,$$

so daß k mittels $a \mapsto D(\sigma(a))$ auf $D(k[t])$ operiert. Man rechnet sofort nach, daß diese Operationen eine Vektorraumstruktur auf $D(k[t])$ definieren und daß $D(k \oplus V) \simeq D(k[t]) \otimes_k V$ ist.

5.5.1. Satz (M. Schlessinger). *Zu D gibt es genau dann eine formale semiuniverselle Deformation, wenn für jedes Diagramm von Artin-Algebren*

$$A' \to A \leftarrow A''$$

der kanonische Morphismus

$$D(A' \times_A A'') \to D(A') \times_{D(A)} D(A'')$$

a) *surjektiv, falls $A'' \to A$ surjektiv ist;*

b) *bijektiv, falls $A'' = k[t]/(t^2)$, $A = k$, und wenn $\dim_k D(k[t]/(t^2)) < \infty$ ist (wegen b) ist $D(k[t]/(t^2))$ ein Vektorraum).*

Wir skizzieren hier den Beweis von M. Schlessinger. Daß die angegebenen Bedingungen notwendig sind, läßt sich ohne Schwierigkeiten direkt verifizieren. Wir geben hier das Beweisprinzip für die Existenz an: Ist $r = \dim D(k[t]/(t^2))$, so wird B als Quotient von $S = \Lambda\hat{}[[T_1, \ldots, T_r]]$ konstruiert. Die Wahl einer Basis in $D(k[t]/(t^2))$ bestimmt einen Isomorphismus (als Funktor von V!)

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\hat{}[[T_1, \ldots, T_r]], k \oplus V) \simeq D(k \oplus V),$$

also ein $\eta_1 \in D(S/\mathfrak{n}S + \mathfrak{m}_S^2)$ (das der kanonischen Projektion $S \to S/\mathfrak{n}S + \mathfrak{m}_S^2$ entspricht). η_1 wird schrittweise auf höhere Quotienten S/J_ν geliftet, und man definiert

$$B =: S\Big/\bigcap_{\nu=1}^{\infty} J_\nu = \text{lim-proj}\,(S/J_\nu).$$

$J_{\nu+1}$ wird aus J_ν wie folgt konstruiert: $J_{\nu+1}$ sei das kleinste unter den Idealen J mit

i) $\mathfrak{m}J_\nu \subseteq J \subseteq J_\nu$;

ii) η_ν läßt sich auf S/J liften.

(Wegen der Minimalbedingung in $S/\mathfrak{m}J_\nu$ und wegen

$$S/(J' \cap J'') \simeq (S/J') \times_{S/(J'+J'')} S/J''$$

existiert $J_{\nu+1}$, da man immer $J' + J'' = J_\nu$ annehmen kann, ohne $J' \cap J''$ abzuändern; man kann daher a) anwenden.) Es genügt dann zu zeigen, daß man jedes Diagramm

$$(S/J_\nu, \eta_\nu) \to (A, \xi) \leftarrow (A', \xi'),$$

$\xi \in D(A)$, $\xi' \in D(A')$, so daß $A = A'/aA'$, $\mathfrak{m}_{A'}a = 0$ ist, zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} (S/J_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}) \arrow[r] \arrow[d] & (A', \xi') \arrow[d] \\ (S/J_\nu, \eta_\nu) \arrow[r] & (A, \xi) \end{tikzcd}$$

ergänzen kann (Bedingung (UD 1)).

Ist $S_\nu' =: (S/J_\nu) \times_A A'$, $u' = (0, a) \in S_\nu'$, dann ist $S_\nu'/a'S_\nu' = S/J_\nu$, $\mathfrak{m}_{S'_\nu}a' = 0$, und wegen a) gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (S_\nu', \eta_\nu') \arrow[r] \arrow[d] & (A', \xi') \arrow[d] \\ (S/J_\nu, \eta_\nu) \arrow[r] & (A, \xi) \end{tikzcd}$$

Da S Potenzreihenring über $\Lambda^\wedge$ ist, läßt sich $S \to S/J_\nu$ liften zu einer Abbildung $S \to S_\nu'$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $S \to S_\nu'$ ist surjektiv.

Fall 2: Das Bild von S in S_ν' ist zu S/J_ν isomorph (da $S/J_\nu = S_\nu'/a'S_\nu'$, $a'\mathfrak{m}_\nu' = 0$ ist).

In beiden Fällen gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S_\nu' \arrow[r, "p"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ S/J_{\nu+1} \arrow[ur, "v"] \arrow[r] & S/J_\nu \arrow[r, "u"] & A \end{tikzcd}$$

(p Projektion), so daß $\xi'' =: D(p \cdot v)\, \eta_{\nu+1}$ und ξ' gleiche Projektionen ξ in $D(A)$ haben (Fall 1: $J_{\nu+1} \subseteq \operatorname{Kern}(S \to S_\nu')$, Fall 2: $S/J_{\nu+1} \to S/J_\nu$ mit $S/J_\nu \simeq$ (Bild von S in S_ν') $\to S_\nu'$ komponieren).

Wir müssen eine Abbildung $S/J_{\nu+1} \to A'$ konstruieren, die $\eta_{\nu+1}$ in ξ' überführt. Dazu betrachten wir den Funktor $D' = \operatorname{Hom}_\Lambda(S/J_{\nu+1}, -)$ und die durch $\eta_{\nu+1}$ induzierte natürliche Transformation $D' \to D$ ($\alpha \in D'(A)$, $\alpha \mapsto D(\alpha)\,\eta_{\nu+1}$). Aus $A = A'/aA$ folgt $A' \times_A A' \simeq A' \times_k k[t]$, $t^2 = 0$ (indem man jedem $(x, u + tv) \in A' \times_k k[t]$ das Element $(x, x + av) \in A' \times_A A'$ zuordnet, wobei av die Multiplikation von a mit einem Repräsentanten von v in A' bedeutet). Nach a) und b) erhält man dann ein kommutatives Diagramm mit surjektiven Zeilen:

$$\begin{tikzcd} D(A' \times_A A') \simeq D'(A') \times D'(k[t]) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & D'(A') \times_{D'(A)} D'(A') \arrow[d] \\ D(A' \times_A A') \simeq D(A') \times D(k[t]) \arrow[r] & D(A') \times_{D(A)} D(A') \end{tikzcd}$$

Bei allen Abbildungen dieses Diagramms wird der erste Faktor respektiert. Über $(\xi'', \xi') \in D(A') \times_{D(A)} D(A')$ liegt dann ein Paar $(u'', u') \in D'(A') \times_{D'(A)} D'(A')$, da ξ'' Bild von $p \cdot v \in D'(A')$ und $D'(k[t]) \simeq D(k[t])$, d. h. $u'' = p \cdot v$ ist. Für $u' : S/J_{\nu+1} \to A'$ gilt dann $D(u')\, \eta_{\nu+1} = \xi'$, q.e.d.

5.6. Infinitesimale Deformationen affiner Schemata

Wir wollen als erstes Beispiel zur Illustration der allgemeinen Theorie den folgenden Funktor betrachten:

$X_0 = \operatorname{Spec} P_0$ sei ein affines algebraisches k-Schema, A eine lokale k-Algebra, $A/\mathfrak{m} = k$,

$$D_{P_0}(A) = D_{X_0}(A) = \left\{ \begin{array}{l} (X, \theta),\ X \text{ affines flaches } A\text{-Schema}, \\ \theta : X \otimes_A k \xrightarrow{\sim} X_0 \end{array} \right\}$$
modulo Isomorphismen.

Eine solche Deformation X von X_0 ist durch eine flache A-Algebra P und einen Isomorphismus $P \otimes_A k \simeq P_0$ bestimmt. Wir nehmen generell an, daß P im wesentlichen von endlichem Typ über A ist. P ist also eine gewisse Erweiterung der Algebra P_0 durch $\mathfrak{m}P$. Zum Studium dieses Funktors D ist es nützlich, zunächst einen geeigneten formalen Apparat einzuführen, nämlich der Kohomologie von Algebren im Sinne von Gerstenhaber (vgl. M. Gerstenhaber [15]), den wir zunächst beschreiben wollen.

Es sei A ein kommutativer Grundring, C eine A-Algebra im wesentlichen von endlichem Typ und N ein C-Modul. C ist Quotient einer glatten A-Algebra F; wir fixieren eine solche Algebra F und einen Isomorphismus $F/I = C$. (Eine geeignete Polynomalgebra beispielsweise — das entspricht einer Einbettung von $\operatorname{Spec}(C)$ in den affinen Raum — I wird erzeugt durch die definierenden Gleichungen).

Es sei $\cdots \to L_2 \to L_1 \to I/I^2 \to 0$ eine projektive Auflösung von I/I^2 (als C-Modul) und L_* der Komplex

$$\cdots \to L_2 \to L_1 \to L_0, \qquad L_0 = \Omega_{F|A} \otimes_F C,$$

wobei $L_1 \to L_0$ Komposition der Abbildungen

$$L_1 \to I/I^2 \quad \text{und} \quad I/I^2 \to \Omega_{F|A} \otimes_F C, \qquad f \mapsto df$$

ist. Die Kohomologie des Komplexes $\operatorname{Hom}(L_*, N)$ bezeichnen wir mit

$$D^*(C\,|\,A, N) = H^*(\operatorname{Hom}(L_*, N)).$$

Sie hängt nicht von der Wahl der Darstellung $C = F/I$ und der Auflösung von I/I^2 ab. Denn ist $C = G/J$, G eine glatte A-Algebra, so folgt aus der Glattheit (vgl. 3.8.1.) die Existenz von Homomorphismen $\sigma : F/I^2 \to G/J^2$, $\tau : G/J^2 \to F/I^2$, die auf C die Identität induzieren.

Zwei Homomorphismen $\sigma_i : F/I^2 \to G/J^2$, $i = 1, 2$, unterscheiden sich um eine Derivation $\delta = h \circ d : F/I^2 \to J/J^2$, d. h., es gilt

$$\sigma_2(f) = \sigma_1(f) + h \cdot df,$$
$$h : \Omega_{F|A} \otimes_F C \to J/J^2.$$

Ist $\cdots \to M_2 \to M_1 \to J/J^2$ eine projektive Auflösung, dann läßt sich h zunächst zu einer Abbildung $H_1 : \Omega_{F|A} \otimes_F C \to M_1$ liften (da $\Omega_{F|A} \otimes_F C$ projektiv über C ist); σ_1, σ_2 lassen sich zu Homomorphismen von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_2 \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & L_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \Omega_{F|A} \otimes_F C \arrow[d, shift right, "\sigma_1^*"'] \arrow[d, shift left, "\sigma_2^*"] \\
\cdots \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d_0"] & \Omega_{G|A} \otimes_G C
\end{tikzcd}$$

fortsetzen, so daß

$$\sigma_2{}^* - \sigma_1{}^* = d_0 \cdot H_1$$

ist, und H_1 läßt sich sukzessive liften zu Homomorphismen $H_{i+1} : L_i \to M_{i+1}$, so daß

$$d_i \cdot H_{i+1} + H_i \cdot d_{i-1} = \sigma_2{}^* - \sigma_1{}^*$$

ist (da L_* projektiv und M_* eine Auflösung ist). Folglich induzieren zwei Abbildungen bis auf Homotopie eindeutige homotope Fortsetzungen, $D^*(C\,|\,A, N)$ ist also ein eindeutig bestimmter Kohomologiefunktor in N. (Eindeutigkeit ergibt sich, wenn man die Überlegung auf den Fall

$$(G, J) = (F, I), \qquad \sigma_1 = \mathrm{id}_{F/I^2}, \qquad \sigma_2 = \tau \circ \sigma$$

anwendet.)

Aus der exakten Folge

$$I/I^2 \to \Omega^1_{C|A} \otimes_F C \to \Omega^1_{C|A} \to 0$$

ergibt sich

$$(1) \qquad \begin{cases} D^0(C\,|\,A, N) = \mathrm{Der}_A(C, N), \\ D^1(C\,|\,A, N) = \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N)/\mathrm{Der}_A(F, N), \\ D^{i+1}(C\,|\,A, N) = \mathrm{Ext}_C{}^i(I/I^2, N), \qquad i \geqq 1. \end{cases}$$

Ist $\cdots \to M_2 \to M_1 \to M_0 \to \Omega^1_{C|A} \to 0$ eine Auflösung von $\Omega^1_{C|A}$, so kann man wie oben die Identität $\Omega^1_{C|A}$ zu einem Homomorphismus von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_2 \arrow[r] \arrow[d] & L_1 \arrow[r] \arrow[d] & L_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^1_{C|A} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & \Omega^1_{C|A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

fortsetzen (da L_* projektiv und die untere Zeile exakt ist), der bis auf Homotopie eindeutig bestimmt ist. Also erhält man einen kanonischen Morphismus von Kohomologiefunktoren

$$(2) \qquad \mathrm{Ext}_C{}^i(\Omega^1_{C|A}, N) \to D^i(C\,|\,A, N).$$

Für $i = 0$ ist dieser bijektiv, für $i = 1$ injektiv (da man $L_0 = M_0$, $L_1 = M_1$ wählen kann).

Wir setzen von jetzt an voraus, daß der singuläre Ort

$$S(C\,|\,A) =: S(\mathrm{Spec}(C)\,|\,\mathrm{Spec}(A))$$

keine Komponenten von Fasern von $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A)$ enthält (vgl. 3.8.4.). Dann gilt weiterhin:

Ist C über A lokal vollständiger Durchschnitt, so ist (2) *ein Isomorphismus (da dann I/I^2 lokal fre ist); ist C über A glatt, so ist $D^i(C\,|\,A, N) = 0$ für $i > 0$.*

Also gilt:

a) *Kern und Kokern von* (2) *sind konzentriert auf die Menge der Punkte, in denen C nicht vollständiger Durchschnitt über A ist.*

b) *$D^i(C\,|\,A, N)$, $i > 0$, ist auf den singulären Ort von C über A konzentriert, und für $i > 1$ auf den Ort, in dem C kein vollständiger Durchschnitt über A ist.*

Diese Aussagen kann man noch wie folgt präzisieren: Es sei $V \subseteq \mathrm{Spec}(C)$ die abgeschlossene Menge der Punkte von $\mathrm{Spec}(C)$, in denen $\mathrm{Spec}(C)$ nicht vollständiger Durchschnitt über A ist, und

$$\mathrm{codh}_V N = \inf_{P \in V} \{\mathrm{codh}\, N_P\}.$$

Dann gilt:

c) *Der kanonische Morphismus* (2) *ist ein Isomorphismus für $i \leqq \mathrm{codh}_V N$.*

Das ergibt sich aus der kohomologischen Charakterisierung der homologischen Kodimension $\mathrm{codh}_V N > i$, falls $\mathrm{Ext}_A{}^i(M, N) = 0$ für alle C-Moduln M mit $\mathrm{supp}\, M \subseteq V$ und den exakten Folgen (dI Bild von I/I^2)

$$0 \to dI \to \Omega^1_{F|A} \otimes_F C \to \Omega^1_{C|A} \to 0,$$
$$0 \to M \to I/I^2 \to dI \to 0,$$

da $\mathrm{supp}\, M \subseteq V$ ist. Denn für $i < \mathrm{codh}_V M$ ist

$$\mathrm{Ext}_C{}^i(dI, N) \to \mathrm{Ext}_C{}^i(I/I^2, N)$$

ein Isomorphismus (Kohomologiefolge auf die zweite exakte Folge anwenden), und aus der ersten exakten Folge erhält man

$$\mathrm{Ext}_C{}^i(dI, N) \simeq \mathrm{Ext}_C{}^{i+1}(\Omega^1_{C|A}, N).$$

Aus a) ergibt sich dann die Behauptung.

Als weiteren Spezialfall erhält man z. B.

d) *Ist C normal und $\mathrm{Spec}(C)$ in allen Punkten der Kodimension 1 vollständiger Durchschnitt über A, so ist*

$$\mathrm{Ext}_C{}^i(\Omega^1_{C|A}, C) \simeq D^i(C\,|\,A, C) \quad \textit{für} \quad i \leqq 2.$$

Für normale isolierte Singularitäten ist das auf direktem Wege bei G. N. Tjurina [56] bewiesen.

Es gilt nun

5.6.1. Satz.

(1) *$D^1(C\,|\,A, N)$ klassifiziert die Erweiterungen der A-Algebra C durch den C-Modul N.*

(2) *$D^0(C\,|\,A, N)$ ist die Automorphismengruppe der Erweiterungen von C durch N.*

Der Beweis ist nicht schwierig und ergibt sich wie folgt: Eine Erweiterung von C durch N ist durch eine exakte Folge $0 \to N \to E \to C \to 0$ gegeben, E eine A-Algebra, N Ideal in E, $N^2 = 0$. Ist $C = F/I$, so ergibt sich aus der Glattheit von F über A und aus $N^2 = 0$ ein A-Algebrahomomorphismus $\varphi : F/I^2 \to E$, der auf C die Identität induziert und bis auf eine Derivation $\delta : F/I^2 \to N$ eindeutig bestimmt ist. Daher ist die Klasse von $\varphi/I/I^2 : I/I^2 \to N$ in $D^1(C|A, N) = \mathrm{Hom}_C(I/I^2, N)/\mathrm{Der}_C(F, N)$ eindeutig durch die Erweiterung E bestimmt, man erhält somit eine kanonische Abbildung $E \mapsto C(E) \in D^1(C|A, N)$.

Ist umgekehrt $\psi : I/I^2 \to N$ gegeben, so ist $E_\psi =: F \oplus N/I$ eine Erweiterung von C, wobei $F \oplus N$ die triviale Erweiterung von F durch N ist und I durch $f \mapsto (f, -\psi(f))$ mit einem Ideal in $F \oplus N$ identifiziert wird. Durch $(f, x) \mapsto \bar{f} \in C$ $(f \in F, x \in N)$ erhält man einen surjektiven A-Algebrahomomorphismus $E_\psi \to C$ mit dem Kern N. Die so beschriebene Konstruktion ist invers zu der oben beschriebenen Zuordnung $E \mapsto C(E)$ und hängt nur von der Klasse von ψ in $D^1(C|A, N)$ ab.

Jeder Automorphismus σ einer Erweiterung E, der auf C und N die Identität induziert, definiert durch

$$\delta(f) = \sigma(f) - f$$

eine Derivation von E, die auf N verschwindet, also ein Element aus $D^0(C|A, N) = \mathrm{Der}_A(C, N)$. Ist umgekehrt $\delta \in \mathrm{Der}_A(C, N)$, $f \in E$, $\bar{f}$ Bild von f in C, so wird durch

$$f \mapsto \sigma(f) = f + \delta(\bar{f})$$

ein Automorphismus der Erweiterung definiert, q.e.d.

Wir spezialisieren jetzt unsere Betrachtungen auf folgende Situation: B sei ein lokaler Ring, $J \subseteq B$ ein Ideal mit $J^2 = 0$, $A = B/J$ und P eine flache A-Algebra (im wesentlichen von endlichem Typ). Wir wollen Deformationen von P über B studieren, d. h. flache B-Algebren Q, versehen mit einem Isomorphismus $Q \otimes_B A = Q/JQ \simeq P$. Ist Q B-flach, so ist $JQ \simeq J \otimes_B Q$, und ist $J_0 \supseteq J$ der Annullator von J in B, so ist

$$J \otimes_B Q \simeq J \otimes_B (Q/J_0Q) \simeq J \otimes_B P/J_0P.$$

Also ist der Kern JQ von $Q \to P$ unabhängig von Q bereits durch J und P bestimmt (als P-Modul):

$$JQ \simeq J \otimes_B P_0 =: N, \qquad P_0 = P/J_0P.$$

Die Deformationen von P über B sind also spezielle Erweiterungen von P durch N (als B-Algebren); wir wollen untersuchen, welche Klassen aus $D^1(P|B, N)$ solche Deformationen repräsentieren. Dazu sei wieder F eine glatte B-Algebra mit einem Isomorphismus $F/I \simeq P$. Damit $\psi : I/I^2 \to N = J \otimes_B P_0$ eine Deformation repräsentiert, ist offenbar notwendig, daß $\psi(af) = (a \otimes 1)f$ für $a \in J$, $f \in F/I^2$ ist. Wir zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Es sei $E_\psi = Q$ die durch ein solches ψ bestimmte Erweiterung; da $N = J \otimes_B P_0$ von allen $\psi(a) = a \otimes 1$ $(a \in J)$ erzeugt wird (als P-Modul), folgt aus der Bedingung bereits $N = JQ$.

Weiterhin ist offensichtlich:

(1) $Q \otimes_B A = P$ ist A-flach.

(2) $\mathrm{Tor}_1^B(Q, A) = 0$, wegen $J \otimes_B Q \simeq J \otimes_B P_0 = JQ$.

Nach 1.3.3. ist daher Q B-flach.

Die Eigenschaft $\psi(af) = (a \otimes 1)f$ bleibt erhalten, wenn man ψ um eine B-Derivation abändert und wenn man zu ψ eine Abbildung $\psi_0 : I/I^2 \to N$ addiert, die mit $\alpha : N \to I/I^2$, $a \otimes \bar{f} \mapsto af$ $(\bar{f} \in P_0$, $f \in F/I^2$ ein Repräsentant, af ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten für $a \in J)$ die Nullabbildung ergibt. Es ist unmittelbar klar, daß solche Abbildungen ψ_0 genau denjenigen Erweiterungen von P durch N entsprechen, die bereits eine A-Algebrastruktur besitzen (d. h., auf denen J annulliert wird). Wir haben somit die erste Aussage des folgenden Satzes erhalten.

5.6.2. Satz.

(1) *Die Klasse aller Deformationen von P über B (P flache A-Algebra, $A = B/J$, $J^2 = 0$) ist entweder leer oder eine Nebenklasse in $D^1(P|B, N) = D^1(P_0|A_0, N)$ bezüglich der Untergruppe $D^1(P|A, N)$ $(P_0 = P \otimes_A A_0$, $A_0 = A/JA$, J_0 Annullator von J in B, $N = J \otimes_B P = J \otimes_B P)$.*

(2) *Es sei $V \subseteq \mathrm{Spec}(P_0)$ die Menge aller der Punkte, in denen $\mathrm{Spec}(P_0)$ kein vollständiger Durchschnitt über A_0 ist, und $\mathrm{codh}_V N > 0$ (N als P_0-Modul). Dann existiert eine Obstruktion $c(P|A, B) \in D^2(P_0|A_0, N)$, deren Verschwinden gleichbedeutend mit der Existenz einer Deformation von P über B ist.*

Beweis. Wir wählen eine glatte B-Algebra F, so daß $P = F/I$ ist. Dann ist $J \subseteq I$ wegen $JP = 0$. Wir bezeichnen mit E bzw. H die glatte A-Algebra F/JF bzw. das Ideal I/JI. Dann ist $E/H \simeq P$, und der Kokern der kanonischen Abbildung

$$N = J \otimes_B P \to I/I^2 = I \otimes_B P$$

ist offensichtlich

$$(I/I^2)/(JF + I^2/I^2) \simeq (I/JF)/(I^2 + JF/JF).$$

Eine Erweiterung Q von P durch N, gegeben durch einen Morphismus

$$\psi : I/I^2 \to N = J \otimes_B P_0,$$

ist genau dann eine Deformation, wenn $\psi(af) = (a \otimes 1)f$ ist für alle $a \in J$, $f \in F/I^2$. Das ist offensichtlich gleichbedeutend damit, daß die kanonische Abbildung $N \to I/I^2$, komponiert mit ψ, die Identität ergibt. Also ist die Existenz von Deformationen äquivalent zu folgenden Aussagen:

(i) $N \to I/I^2$ ist injektiv.

(ii) Die exakte Folge

$$0 \to N \to I/I^2 \to H/H^2 \to 0$$

zerfällt.

Wir zeigen, daß $\mathrm{codh}_V N > 0$ die Injektivität von $N \to I/I^2$ impliziert. Es sei $K = \ker(N \to I/I^2)$; das ist ein P_0-Modul. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{supp}(K) \subseteq V$

ist, weil aus der Definition von $\mathrm{codh}_V N > 0$ (vgl. 3.8.4.) $\mathrm{Hom}_{P_0}(K, N) = 0$, also $K = 0$ folgt.

Nach Lokalisierung in Punkten, in denen P_0 vollständiger Durchschnitt ist, können wir annehmen, daß P_0 lokal vollständiger Durchschnitt über A_0 ist. Es genügt zu zeigen, daß dann $N \to I/I^2$ injektiv ist.

Die exakte Folge

$$0 \to H \to E \to P \to 0$$

liefert nach Tensorierung mit A_0 (mit $H_0 =: H \otimes_A A_0$)

$$0 \to H_0 \to E_0 \to P_0 \to 0.$$

Folglich kann man dem Lemma von Nakayama, angewendet auf H, H_0, eine Basis von H liften. Also ist P lokal vollständiger Durchschnitt über A.

Es sei nun $f_1, \ldots, f_m \in E$ eine reguläre Folge, die H erzeugt, und $g_i \in F$ seien Repräsentanten der f_i; wir werden zeigen, daß $Q =: F \Big/ \sum_{i=1}^m g_i F$ eine Deformation von P über B ist.

Es ist

$$Q/JQ = F/JF + \sum_{i=1}^m g_i F \simeq P,$$

und nach 1.4.5. ist Q flach über B. Also ist im Fall vollständiger Durchschnitte

$$0 \to N \to I/I^2 \to H/H^2 \to 0$$

exakt und zerfallend.

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück. Nach den vorhergehenden Überlegungen ist

(1) $$0 \to N \to I/I^2 \to H/H^2 \to 0$$

exakt und zerfallend außerhalb V, also ist $\mathrm{supp}\big(\mathrm{Tor}_1{}^A(H/H^2, A_0)\big) \subseteq V$ und somit $\mathrm{Hom}_{A_0}\big(\mathrm{Tor}_1{}^A(H/H^2, A_0), N\big) = 0$. Daher erhält man aus (1) durch Faktorisierung mit A_0 eine exakte Folge und einen Morphismus exakter Folgen

(2) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, dashed] & I/I^2 \otimes_A A_0 \arrow[r] & H_0/H_0{}^2 \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, equal] & I/I_2 \arrow[r] \arrow[u] & H/H^2 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

Falls (1) zerfällt, so auch (2). Es gilt aber auch die Umkehrung, da ein Zerfällungshomomorphismus $I/I^2 \otimes_A A_0 \to N$, komponiert mit $I/I^2 \to I/I^2 \otimes_A A_0$, einen Zerfällungsmorphismus von (1) liefert. Die Klasse $c(P|A, B) \in \mathrm{Ext}^1_{A_0}(H_0/H_0{}^2, N) = D^2(P_0|A_0, N)$, die durch die Folge (2) definiert ist, liefert somit eine Obstruktion für die Existenz von Deformationen.

Bemerkung. Verschiedene Deformationen (Q, σ_1), (Q, σ_2) von P über B können dieselbe Deformation (Q, τ) von P_0 liefern $\big((P, \theta) \in D_{P_0}(A)\big)$, nämlich genau dann, wenn $\theta \circ \bar\sigma_1 = \theta \circ \bar\sigma_2$ ist ($\bar\sigma_i$ ist der durch $\sigma_i : Q/JQ \simeq P$ induzierte Isomorphismus $Q/\mathfrak{m}Q \simeq P/\mathfrak{m}P$). (Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, daß J durch $\mathfrak{m}$ annulliert wird.)

Auf den Fasern von $D_{P_0}(B) \to D_{P_0}(B/J)$ operiert also $D^1(P_0|B, J \otimes_B P_0)$ zwar transitiv, aber nicht notwendig frei. Damit die Operation auch frei ist, ist offenbar hinreichend und notwendig, daß sich jeder Automorphismus $\sigma : P \simeq P$, für den $\theta \circ \bar\sigma = \theta$ ist, zu einem Automorphismus von Q liften läßt.

Wir ziehen einige Folgerungen hieraus; die erste kann man auch leicht direkt nachweisen.

5.6.3. Korollar. *Ist P glatt über A, so gibt es genau eine Deformation von P über B.*

Wir bezeichnen mit $D_P(B)$ die Klasse aller Deformationen von P über B. Dann gilt:

5.6.4. Korollar. *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$T : D^1(P|A, J \otimes_A P) \to D_P(A \oplus J).$$

Insbesondere erhält man also im Fall $A = k$, $P = P_0$, $J = tk$, $t^2 = 0$ einen kanonischen Isomorphismus

$$T : D^1(P_0|k, P_0) \xrightarrow{\sim} D_{P_0}\big(k[t]/(t^2)\big);$$

dieser wurde im Spezialfall einer normalen isolierten Singularität von Tjurina konstruiert.

Ist $P = A[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, so folgt unmittelbar aus den Flachheitsbedingungen, daß $Q \in D_P(B)$ durch Gleichungen

$$F_i = f_i + \sum_{j=1}^q g_{ij} t_j \in B[X_1, \ldots, X_n]$$

definiert wird, wobei $B = A \oplus J$ und $t_1, \ldots, t_q$ eine Basis von J ist. Dann ist leicht nachzuprüfen, daß $T(Q) \in D^1(P|A, J \otimes_A P)$ durch die Abbildung

$$\sum_i a_i f_i \mapsto \sum_{i,j} t_j \otimes \overline{g_{ij} a_i}$$

repräsentiert wird ($\bar f$ bedeutet Bild von $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ in P).

5.6.5. Korollar. *D_{P_0} besitzt eine formale semiuniverselle Deformation, wenn* $\mathrm{Spec}(P_0)|k$ *nur isolierte Singularitäten besitzt. Ist außerdem* $\mathrm{codh}_x P_0 > 0$ *in singulären Punkten* $x \in \mathrm{Spec}(P_0)$ *und* $D^2(P_0|k, P_0) = 0$, *so ist die formale semiuniverselle Deformation über dem Potenzreihenring* $k[[T_1, \ldots, T_r]]$ *definiert,* $r = \dim_k D^1(P_0|k, P_0)$.[1])

Dazu sind die Bedingungen des Satzes von Schlessinger nachzuprüfen. Es sei $A' \to A \leftarrow A''$ gegeben und Deformationen P', P, P'' von P_0 über A', A, A'', so daß $P' \otimes_{A'} A \simeq P \simeq P'' \otimes_{A''} A$ ist (als Deformationen). Ist $A = A''/J$, $J^2 = 0$, $B =: A' \times_A A''$, dann ist J Ideal in B ($x \in J$ mit $(0, x) \in B$ identifizieren) und

[1]) Allgemein gilt, daß die formale semiuniverselle Deformation über einem Ring

$$k[[T_1, \ldots, T_r]]/(f_1, \ldots, f_s)$$

definiert ist, wobei $r = \dim_k D^1(P_0|k, P_0)$, $s \leqq \dim D^2(P_0|k, P_0)$ ist und die f_i von der Ordnung $\geqq 2$ sind.

$B/J \simeq A'$. Aus der exakten Folge $0 \to JP'' \to P'' \to P \to 0$ erhält man die exakte Folge

$$0 \to JP'' \to P' \times_P P'' \to P' \to 0$$

und

$$JP'' \simeq J \otimes_A P \simeq J \otimes_A (P' \otimes_{A'} A) \simeq J \otimes_{A'} P' \simeq J \otimes_B P',$$

d.h., $P' \times_P P''$ ist Erweiterung von P' durch $J \otimes_B P'$. Die Zuordnung $P'' \mapsto P' \times_P P'$ entspricht gemäß Satz 5.6.1. einer kanonischen Abbildung

$$D^1(P \mid A'', J \otimes_A P) \to D^1(P' \mid B, J \otimes_B P'),$$

bei der Nebenklassen modulo $D^1(P \mid A, J \otimes_A P)$ in Nebenklassen modulo $D^1(P' \mid A', J \otimes_B P')$ übergehen, wie man unmittelbar verifiziert, indem man eine Darstellung $F/I' = P'$ mit einer glatten B-Algebra F und $F \otimes_B A''/I'(F \otimes_B A'') \simeq P$ benutzt.

Ebenso ist sofort zu verifizieren, daß im Fall $A = k$, $A'' = k[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, die Abbildung

$$D^1(P \mid A'', J \otimes_A P_0) \to D^1(P^1 \mid B, J \otimes_B P')$$

injektiv ist (da $I'/I'^2 \to I''/I''^2$, $I'' =: I'(F \otimes_B A'')$ surjektiv und $\mathrm{Der}_B(F, P_0) \simeq \mathrm{Der}_{A''}(F'', P_0)$ ist).

Außerdem ist $T : D_{P_0}(k[\varepsilon]) \to D^1(P_0 \mid k, P_0)$ ein Vektorraumisomorphismus und $D^1(P_0 \mid k, P_0)$ auf den singulären Ort von $\mathrm{Spec}(P_0) \mid k$ konzentriert, also von endlicher Dimension. Die letzte Behauptung folgt aus 5.6.1., (2), q.e.d.

Bemerkung. Damit die formale semiuniverselle Deformation eine universelle formale Deformation ist (d. h. D_{P_0} proreprësentierbar ist), ist notwendig und hinreichend, daß sich jeder Automorphismus einer infinitesimalen Deformation $(P, \theta) \in D_{P_0}(A)$ auf jede Fortsetzung $(Q, \tau) \in D_{P_0}(B)$ $(A = B/tB,\ mt = 0)$ von (P, θ) liften läßt. (Ist $(\bar{A}, P_\nu, \theta_\nu)$ semiuniverselle formale Deformation, so zeigt man durch Induktion nach $\dim_k A$, daß $\mathrm{Hom}_k(\bar{A}, A) \to D_{P_0}(A)$ bijektiv ist.)

Ist $\mathrm{Spec}(P_0)|k$ vollständiger Durchschnitt der Kodimension m,

$$P_0 = k[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m),$$

so erhält man eine formale universelle Deformation wie folgt: Es sei $D^1(P_0|k, P_0) = P_0{}^m/\Delta$, Δ der von den n Spalten der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$ erzeugte P_0-Untermodul von $P_0{}^m$ ($I_0/I_0{}^2 \simeq P_0{}^m$, und $I_0/I_0{}^2 \to \Omega_{k[X]|k} \otimes_{k[X]} P_0 \simeq P_0{}^n$ ist durch die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$ definiert). Bilden

$$G_i = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{mi} \end{pmatrix} \in P_0{}^m \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

eine Basis von $P_0{}^m$ modulo Δ, so wird durch

$$P = B[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m),$$
$$F_i = f_i + \sum_j t_j g_{ij}, \qquad B = k[[t_1, \ldots, t_r]]$$

eine formale semiuniverselle Deformation von P_0 definiert, da

$$\mathrm{Hom}_k(B, k[t]/(t^2)) \simeq D_{P_0}(k[t]/(t^2))$$

und $B|k$ glatt ist.

5.7. Infinitesimale Deformationen eigentlicher Schemata

Es sei jetzt X_0 ein eigentliches k-Schema und $D_{X_0}(A)$ wie oben definiert. Wir wollen zeigen, daß D_{X_0} die Voraussetzungen des Satzes von SCHLESSINGER erfüllt. Die Bedingungen a), b) sind offensichtlich erfüllt. Ist $A' \to A \leftarrow A''$ und sind X', X, X'' wie in 5.6.1. gegeben, so ist $(\underline{X_0}, \mathcal{O}_{X'} \times_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X''}$ eine Deformation (nach der lokalen Konstruktion im vorigen Abschnitt). Es ist also lediglich noch $D_{X_0}(k[\varepsilon])$ zu berechnen ($\varepsilon^2 = 0$).

Die im vorigen Abschnitt konstruierte Kohomologie ist offensichtlich mit Lokalisierungen verträglich. Ist daher $\mathscr{F}_0$ eine kohärente Garbe auf X_0, so ist eine kohärente Garbe $\mathscr{D}^1(X_0 \mid k, \mathscr{F}_0)$ definiert durch

$$\mathscr{D}^1(X_0 \mid k, \mathscr{F}_0)(U) = D^1\big(\mathcal{O}_{X_0}(U) \mid k, \mathscr{F}_0(U)\big)$$

für affine offene Teilmengen U.

Insbesondere erhält man eine kanonische Abbildung

$$D_{X_0}(k[\varepsilon]) \to H^0\big(X, \mathscr{D}^1(X_0 \mid k, \mathscr{F})\big),$$

deren Kern aus denjenigen Deformationen besteht, die „lokal trivial" sind. Da nun

$$\mathscr{G} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0|k}}(\Omega_{X_0|k}, \mathcal{O}_{X_0}) = \mathscr{D}^0(X_0 \mid k, \mathcal{O}_{X_0})$$

die Garbe der Keime der Automorphismen der trivialen Deformation $(\underline{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}[\varepsilon])$ ist, bestimmt jede lokal triviale Deformation einen Kozyklus mit Werten in $\mathscr{G}$ und umgekehrt, und daher ist $H^1(X_0, \mathscr{G})$ der Kern von

$$D_{X_0}([\varepsilon]) \to H^0\big(X_0, \mathscr{D}^1(X_0 \mid k, \mathcal{O}_{X_0})\big).$$

Ist $d \in H^0\big(X_0, \mathscr{D}^1(X_0 \mid k, \mathcal{O}_{X_0})\big)$ vorgegeben, so bedeutet das, daß über den Teilen einer affinen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von X_0 Deformationen V_α vorgegeben sind, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Auf dem Durchschnitt $U_{\alpha\beta}$ von U_α und U_β gibt es daher Isomorphismen

$$f_{\alpha\beta} : \mathcal{O}_{V_\alpha} \mid U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{V_\beta} \mid U_{\alpha\beta}.$$

Auf $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ gilt dann

$$g_{\alpha\beta\gamma} =: f_{\gamma\alpha}^{-1} \circ f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} : \mathcal{O}_{V_\alpha} \mid U_{\alpha\beta\gamma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{V_\alpha} \mid U_{\alpha\beta\gamma},$$
$$g_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X} + D_{\alpha\beta\gamma}, \qquad D_{\alpha\beta\gamma} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0|k}, \mathcal{O}_{X_0})(U_{\alpha\beta\gamma}),$$

und die Verträglichkeitsbedingung dafür, daß sich die V_α zu einer Deformation von X_0 verkleben lassen, ist die Bedingung, daß der 2-Kozyklus $D_{\alpha\beta\gamma}$ kohomolog 0 ist (eventuell nach Verfeinerung der Überdeckung). Es gibt also eine kanonische Abbildung

$$H^0\big(X_0, \mathscr{D}^1(X_0 \mid k, \mathcal{O}_{X_0})\big) \to H^2\big(X_0, \mathscr{D}^0(X_0 \mid k, \Omega_{X_0})\big),$$

deren Kern aus den Schnitten besteht, die zu Deformationen über $k[\varepsilon]$ gehören.

Wir haben damit bis auf Verifikation einiger technischer Details, die wir dem Leser überlassen, folgenden Satz bewiesen:

5.7.1. Satz. *Ist X_0 ein separiertes algebraisches k-Schema, dann gibt es eine exakte Folge*

$$0 \to H^1(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) \to D_{X_0}(k[\varepsilon]) \to H^0(X_0, \mathscr{D}^1(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) \to H^2(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})).$$

(Diese Folge geht nach M. Schlessinger [54] auf H. Levelt zurück.)

5.7.2. Korollar. *Ist $X_0|k$ eigentlich, so gibt es eine formale semiuniverselle Deformation von X_0.*

Bemerkung. *Ist $H^0(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$, so ist die formale semiuniverselle Deformation von X_0 automatisch eine formale universelle Deformation* (d. h., D_{X_0} ist prorepräsentierbar).

Denn in diesem Fall folgt, daß infinitesimale Deformationen $(X, \theta) \in D_{X_0}(A)$ keine Automorphismen, d. h. Automorphismen $\sigma: X \simeq X$ mit $\bar\sigma \circ \theta = \mathrm{id}_{X_0}$, besitzen (außer $\sigma = \mathrm{id}_X$), d. h. also, daß $D_{X_0}(k[\varepsilon])$ transitiv *und frei* auf den Fasern von $D_{X_0}(A) \to D_{X_0}(A/tA)$ (mit $t \in A$, $\mathfrak{m}t = 0$) und von $\mathrm{Hom}_k(\bar A, A) \to \mathrm{Hom}_k(\bar A, A/tA)$ ($\bar A$ Basis der semiuniversellen Deformation) operiert (Homomorphismen α, β von $\bar A$ in A induzieren dieselbe Abbildung in A/tA genau dann, wenn $\beta = \alpha + \delta$, $\delta \in \mathrm{Der}_k(\bar A, tA) = \mathrm{Hom}_k(\bar A, k[\varepsilon]) \simeq D_{X_0}(k[\varepsilon])$ ist), und somit $\mathrm{Hom}_k(\bar A, A) \simeq D_{X_0}(A)$ (Induktion nach $\dim_k A$!).

Die Nichtexistenz von Automorphismen $\sigma: (X, \theta) \simeq (X, \theta)$ zeigt man durch Induktion nach $\dim_k A$. Ist $t \in A$, $\mathfrak{m}t = 0$, $t \neq 0$, dann ist $\sigma \bmod t = \mathrm{id}$, also

$$\sigma^* - \mathrm{id} = \delta \in H^0(X, \mathrm{Der}_A(\mathscr{O}_X, t\mathscr{O}_X)) \simeq H^0(X_0, \mathscr{D}^0(X_0, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$$

(da $t\mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_{X_0}$, $\mathrm{Der}_A(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_{X_0}) = \mathrm{Der}_k(\mathscr{O}_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$), also $\sigma^* = \mathrm{id}$, $\sigma = \mathrm{id}_X$ ist, q.e.d.

5.7.3. Korollar. *Ist $X_0|k$ glatt, so ist*

$$H^1(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) \to D_{X_0}(k[\varepsilon])$$

ein Isomorphismus (und $H^1(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) \simeq \mathrm{Ext}^1_{X_0}(\Omega_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})$) (Kodaira-Spencer-Isomorphismus).

5.7.4. Korollar. *Es sei $X_0|k$ eigentlich, $V \subset X_0$ der singuläre Ort von X_0, und $\mathrm{codh}_V \mathscr{O}_{X_0} > 0$. Dann folgt aus $H^1(X_0, \mathscr{E}xt^1_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$, $H^2(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$ und $\mathscr{D}^2(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0}) = 0$, daß die formale semiuniverselle Deformation von X_0 über $k[[t_1, \ldots, t_r]]$ definiert ist, und $r = \dim \mathrm{Ext}^1_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})$.*

Beweis. Um zu zeigen, daß der Grundring der formalen, semiuniversellen Deformation ein formaler Potenzreihenring ist, genügt es zu zeigen, daß $D_{X_0}(B) \to D_{X_0}(A)$ surjektiv ist, falls A, B Artin-Ringe sind und $A = B/tB$ mit $\mathfrak{m}t = 0$.

Es sei $X \in D_{X_0}(A)$, und für offene $U \subseteq X$ sei $\mathscr{D}_X(B)_0(U)$ die Klasse aller Deformationen von U über B. Dann ist $U \mapsto \mathscr{D}_X(B)_0(U)$ eine Prägarbe; $\mathscr{D}_X(B)$ sei die dazu assoziierte Garbe.

Aus Satz 5.6.1. folgt, daß die Garbe $\mathscr{D}^1(X|A, \mathscr{O}_{X_0})$ frei und transitiv auf $\mathscr{D}_X(B)$ operiert und daß $\mathscr{D}_X(B)(U) \neq \emptyset$ ist für affine U (wegen $\mathscr{D}^2(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0}) = 0$), d. h. also, $\mathscr{D}_X(B)$ ist prinzipal homogene Garbe, assoziiert zu $\mathscr{D}^1(X|A, \mathscr{O}_{X_0})$.

Wir zeigen, daß $H^1(X, \mathscr{D}^1(X|A, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$ ist. Da diese Gruppe die bezüglich $\mathscr{D}^1(X|A, \mathscr{O}_{X_0})$ prinzipal homogenen Garben klassifiziert, gibt es dann einen globalen

Schnitt in $\mathscr{D}_X(B)$. Wegen $\mathrm{codh}_V \mathscr{O}_{X_0} > 0$ ist

$$\mathscr{D}^1(X|A, \mathscr{O}_{X_0}) = \mathscr{E}xt_X^1(\Omega^1_{X|A}, \mathscr{O}_{X_0}).$$

Jedem lokalen Schnitt entspricht daher eine kurze exakte Folge

$$0 \to \mathscr{O}_{X_0}|U \to \mathscr{E} \to \Omega^1_{X|A}|U \to 0.$$

Da $\mathrm{Tor}_1^A(\Omega^1_{X|A}, k)$ auf den singulären Ort V konzentriert und $\mathrm{codh}_V \mathscr{O}_{X_0} > 0$ ist, gilt wie beim Beweis von 5.6.1., daß die Folge

$$0 \to \mathscr{O}_{X_0}|U \to \mathscr{E} \otimes_A k \to \Omega^1_{X_0|k}|U \to 0$$

exakt ist ($\Omega^1_{X_0|k} = \Omega^1_{X|A} \otimes_A k$!). Außerdem gibt es einen kanonischen Morphismus

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_{X_0}|U & \longrightarrow & \mathscr{E} & \longrightarrow & \Omega^1_{X|A}|U & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_{X_0}|U & \longrightarrow & \mathscr{E} \otimes_A k & \longrightarrow & \Omega^1_{X_0|k}|U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und hieraus folgt leicht, daß $\mathscr{E}xt_X^1(\Omega^1_{X|A}, \mathscr{O}_{X_0})$ direkter Summand von $\mathscr{E}xt^1_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})$ ist.

Da nach Voraussetzung $H^1(X_0, \mathscr{E}xt^1_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$ ist, ist auch

$$H^1(X, \mathscr{E}xt_X^1(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})) = 0.$$

Also gibt es einen globalen Schnitt in $\mathscr{D}_X(B)$. Diesem entspricht eine affine Überdeckung U_i von X und Deformationen V_i von U_i über B, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Wie beim Beweis von 5.7.1. wird dadurch wieder ein 2-Kozyklus mit Koeffizienten aus

$$\mathscr{H}om_X(\Omega^1_{X|A}, \mathscr{O}_{X_0}) = \mathscr{H}om_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0}) = \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})$$

definiert. Die Verklebungsvorschrift für die V_i besteht dann wieder im Verschwinden der zugehörigen Kohomologieklasse, was wegen $H^2(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$ der Fall ist. Also ist die formale semiuniverselle Deformation über einem formalen Potenzreihenring definiert, die Anzahl der Unbestimmten ist wegen Satz 5.7.1. gleich

$$r = \dim H^1(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) + \dim H^0(X_0, \mathscr{E}xt^1_{X_0}(\Omega_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})).$$

Die beiden Summanden sind aber gerade die Anfangsterme der Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(X_0, \mathscr{E}xt^q(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})) \Rightarrow \mathscr{E}xt^{p+q}_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})$$

für $p + q = 1$. Wegen

$$E_2^{20} = H^2(X_0, \mathscr{D}^0(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$$

ist aber $E_2^{01} = E_\infty^{01}$, $E_2^{10} = E_\infty^{10}$, und

$$0 \to E_\infty^{10} \to \mathscr{E}xt^1_{X_0}(\Omega_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0}) \to E_\infty^{01} \to 0$$

ist exakt, q.e.d.

Ist beispielsweise X_0 lokal vollständiger Durchschnitt, so ist $\mathscr{D}^2(X_0|k, \mathscr{O}_{X_0}) = 0$ erfüllt. Treten außerdem höchstens isolierte Singularitäten auf, so ist

$$H^1(X_0, \mathscr{E}xt^1_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathscr{O}_{X_0})) = 0$$

(da die Garbe auf den singulären Ort konzentriert ist) und somit ist in diesem Fall $H^2(X_0, \mathscr{D}^0(X_0 | k, \mathcal{O}_{X_0})) = 0$ hinreichend dafür, daß eine über $k[[t_1, \ldots, t_r]]$ definierte formale semiuniverselle Deformation existiert.

Beispiele.

1. Ist X_0 eine singularitätenfreie komplette Kurve vom Geschlecht $g > 1$, dann sind alle Voraussetzungen von 5.7.4. erfüllt, und es ist

$$r = \dim \operatorname{Ext}^1_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathcal{O}_{X_0}) = \dim H^0(X_0, \Omega^{1\otimes 2}_{X_0|k}) = 3g - 3$$

nach dem Satz von Riemann-Roch (und dem Dualitätssatz von Serre), und

$$\operatorname{Hom}_{X_0}(\Omega^1_{X_0|k}, \mathcal{O}_{X_0}) = H^0(X_0, (\Omega^1_{X_0|k})^{-1}) = 0\,.$$

Es gibt also für jedes $\nu \geqq 0$ ein glattes eigentliches A_ν-Schema X_ν, $k[[t_1, \ldots, t_r]]/\mathfrak{m}^{\nu+1} = A_\nu$ mit einem Isomorphismus der speziellen Faser mit X_0, so daß die Familie (A, X_ν), $A = k[[t_1, \ldots, t_r]]$, universell ist. Man kann alle diese X_ν in „denselben" projektiven Raum einbetten (z. B. trikanonische Einbettung). Es gibt also, wenn wir mit $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von $\mathsf{P}_A{}^m = \mathsf{P}^m \times \operatorname{Spec}(A)$ bezeichnen (m eine geeignete Zahl, z. B. $m = 5g - 4$ bei der trikanonischen Einbettung), für jedes ν eine kohärente Idealgarbe $J_\nu \subset \mathcal{O}$, durch die $\bar{X}_\nu$ definiert, und zwar so, daß $J_{\nu+1} + \mathfrak{m}^{\nu+1}\mathcal{O} = J_\nu$ ist. Es sei J der Durchschnitt dieser J_ν und $\bar{X} \subset \mathsf{P}_A{}^m$ das durch J definierte Unterschema. Nach dem bereits früher zitierten „Théorème d'existence" (vgl. 1.4.) ist $\bar{X}$ ein eigentliches $\bar{A}$-Schema mit

$$\bar{X} \times_{\operatorname{Spec}(\bar{A})} \operatorname{Spec}(A_\nu) \simeq \bar{X}_\nu\,.$$

Also ist $\bar{X}$ ein eigentliches, glattes $\bar{A}$-Schema, dessen spezielle Faser X_0 ist und das universell in bezug auf infinitesimale Deformationen ist.

Es sei jetzt $A = k\langle t_1, \ldots, t_r\rangle$. Der Funktor D_{X_0} ist offensichtlich lokal von endlicher Darstellung. Also kann man wegen $A^\wedge = \bar{A}$ das Schema $\bar{X} \in D_{X_0}(\bar{A})$ modulo einer beliebig vorgegebenen Ordnung c durch ein A-Schema $X \in D_{X_0}(A)$ approximieren, d. h.

$$X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A_c) \simeq \bar{X} \times_{\operatorname{Spec}(\bar{A})} (A_c)\,.$$

Aus der Universalität von $\bar{X}$ folgt für jedes $\nu > c$ die Existenz eines eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{A} \to A_\nu$, der $\bar{X}$ in $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A_\nu)$ überführt. Ist $c \geqq 1$, so resultiert daraus also ein Isomorphismus $\bar{A} \to A^\wedge$, der $\bar{X}$ in $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} (A^\wedge)$ überführt; X ist also ebenfalls universell in bezug auf infinitesimale Deformationen.

Falls es überhaupt eine universelle Deformation von X_0 gibt, so ist X eine solche. Daß das tatsächlich der Fall ist, folgt aus Satz 5.8.2., wenn wir noch zeigen, daß ein glattes eigentliches B-Schema X (B ein kompletter lokaler Ring) mit der speziellen Faser X_0 durch die Folge

$$X_\nu = X \times_{\operatorname{Spec}(B)} \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{m}_B{}^{\nu+1})$$

eindeutig bestimmt ist. Da man, wie bereits bemerkt, alle betrachteten Schemata in denselben projektiven Raum einbetten kann, folgt die Behauptung wieder aus dem „Théorème d'existence".

Wir haben somit folgenden, für die Modultheorie wichtigen Existenzsatz erhalten:

Ist X_0 eine singularitätenfreie, komplette Kurve vom Geschlecht $g > 1$ ist, so gibt es eine universelle Deformation X von X_0, die über $A = k\langle t_1, \ldots, t_r\rangle$ definiert ist, $r = 3g-3$.

Beispiele.

1. In einfachen Beispielen kann man die universelle Deformation direkt angeben. Dazu betrachten wir etwa die ebene Kurve C_0:

$$X^4 + Y^4 + Z^4 = 0$$

(X, Y, Z homogene Koordinaten). Die Einbettung in den P^2 ist die kanonische (in den Koordinaten $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ bilden

$$\xi = \frac{x}{y^3}\,dx, \qquad \eta = \frac{1}{y^2}\,dx, \qquad \zeta = \frac{1}{y^3}\,dx$$

eine Basis von $H^0(C_0, \Omega^1_{C_0|k})$).

Für jede Deformation definiert die kanonische Klasse ebenfalls eine ebene Einbettung, die universelle Deformation ist also durch eine Form vom Grade 4 aus dem Ring $A[X, Y, Z]$ definiert ($A = k\langle t_1, \ldots, t_6\rangle$), der affine Kegel ist eine Deformation des affinen Kegels von C_0. Die universelle Deformation des affinen Kegels von C_0 ist nach der im vorigen Abschnitt gezeigten Methode leicht zu berechnen.

Es ergibt sich, daß die universelle Deformation von C_0 durch

$$X^4 + Y^4 + Z^4 + t_1X^2Y^2 + t_2X^2Z^2 + t_3Y^2Z^2 + t_4X^2YZ + t_5XY^2Z + t_6XYZ^2 = 0$$

definiert wird (alle Monome, in denen die einzelnen Variablen höchstens vom Grade 2 vorkommen!).

2. Dieses Beispiel zeigt, daß es nicht immer semiuniverselle Deformationen in unserem Sinne gibt. Für Details verweisen wir auf I. R. Šafarevič [51], Kap. IX.

Es sei X_0 eine singularitätenfreie algebraische Fläche, deren kanonisches Bündel $\omega = \wedge^2\Omega_{X_0|\mathsf{C}}$ trivial sei. Dann ist

$$\mathscr{D}^0(X_0 \mid \mathsf{C}, \mathcal{O}_{X_0}) = \mathscr{H}om(\Omega^1_{X_0|\mathsf{C}}, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq \Omega^1_{X_0|\mathsf{C}},$$

da man durch

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi \wedge \eta \in \omega$$

eine nicht-ausgeartete Paarung

$$\Omega^1_{X_0|\mathsf{C}} \times \Omega^1_{X_0|\mathsf{C}} \to \omega \simeq \mathcal{O}_{X_0}$$

erhält.

Aus dem Serreschen Dualitätssatz folgt dann

$$q = \dim H^0(X_0, \Omega^1_{X_0|\mathsf{C}}) = \dim H^2(X_0, \Omega^1_{X_0|\mathsf{C}}).$$

Im Fall $q = 0$ ($K3$-Flächen) sind daher die Bedingungen für die Existenz einer singularitätenfreien universellen Deformation erfüllt. Die Dimension des Basisraumes ist

$$h^{11} = \dim H^1(X_0, \Omega^1_{X_0|\mathsf{C}}) = 20.$$

In der Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten gibt es eine universelle Deformation $X \to M$, $X_{t_0} \simeq X_0(M, t_0)$ ein Keim einer 20-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Würde eine algebraische universelle Deformation existieren, so würde $X \to M$ durch diese induziert werden.

Man kann M als hinreichend kleine Umgebung von t_0 betrachten, so daß $X \simeq X_0 \times M$ ist als C^∞-Mannigfaltigkeit und $\wedge^2\Omega_{X|M} \simeq \mathcal{O}_X$, erzeugt durch eine 2-Form $\omega(x, t)$.

Es sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_{22}$ eine Basis von $H_2(X, \mathsf{Z})$ und

$$\alpha_i(t) = \int_{\sigma_i \times t} \omega(x, t).$$

Dann wird in [51] gezeigt, daß

$$t \mapsto (\alpha_1(t) : \cdots : \alpha_{22}(t))$$

lokal eine Einbettung $\mathbf{P}^{21}$, und zwar auf die Quadrik

$$(Z_1, \ldots, Z_{22}) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{22} \end{pmatrix} = 0$$

(Q die Schnittmatrix der σ_i) definiert.

Unter den X_t, $t \in M$, kommen aber transzendente Flächen vor. Die Perioden der algebraischen Flächen würden nämlich noch einer linearen Relation genügen, die man wie folgt erhält. Man wähle eine Familie von Kurven $C \subset X$ über M (wenn X algebraisch wäre, z. B. einen geeigneten Hyperebenenschnitt). Ist $p(C_t)$ die Homologieklasse von C und

$$p(C_t) = \sum_{i=1}^{22} \beta_i \sigma_i \times \{t\},$$

dann gilt

$$\sum_{i=1}^{22} \beta_i \alpha_i(t) = 0.$$

Aus diesem Grunde kann keine algebraische universelle Deformation existieren.

Erst indem man den Funktor D_{X_0} abändert und die Flächen mit einer Polarisation versieht (das entspricht anschaulich der Fixierung einer projektiven Einbettung), erhält man eine 19-dimensionale *algebraische* universelle Deformation von *polarisierten* $K3$-Flächen.

Als Beispiel betrachten wir im $\mathbf{P}^3$ die Fläche V, die in inhomogenen Koordinaten durch

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 0$$

definiert wird. Man rechnet leicht nach, daß durch $z^3 dx \wedge dy$ eine nirgends verschwindende reguläre 2-Form definiert wird. Außerdem folgt aus der Kohomologiefolge für

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_V \to 0,$$

daß $q = \dim H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ ist, also ist V $K3$-Fläche.

Fixiert man die Einbettung in $\mathbf{P}^3$ bei den Deformationen, so erhält man durch

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 + \sum t_{ijk} x^i y^j z^k = 0,$$

wobei über alle (ijk) mit

$$2 \leq i + j + k \leq 4, \qquad i \leq 2, \quad j \leq 2, \quad k \leq 2,$$

summiert wird (19 Summanden!), eine universelle Deformation.

5.8. Algebraisierung formaler Deformationen

Wir stützen uns in diesem Abschnitt wesentlich auf M. Artins Arbeit [5].

Wir betrachten dieselbe Situation wie in 3.1. und nehmen an, daß eine formale semiuniverselle Deformation $(\overline{B}, (\eta_\nu))$, $\eta_\nu \in D(\overline{B}/\mathfrak{m}_{\overline{B}}^{\nu+1})$, existiert. $\overline{B}$ ist von der Form $\Lambda^\wedge[[X_1, \ldots, X_n]]/(f_1, \ldots, f_m)$. Die folgenden Fragen sind dann zu klären:

1. Kann man die f_i aus $\Lambda\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ wählen, so daß $\overline{B}$ damit Komplettierung von

$$B =: \Lambda\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$$

ist?

2. Wenn ja, kann man ein η in $D(B)$ wählen, das η_ν in $D(B_\nu)$ induziert?
3. Ist (B, η) eine semiuniverselle Deformation?

Wir zeigen zunächst, daß die Frage 3 positiv zu beantworten ist, sofern D lokal von endlicher Darstellung, d. h. mit gefilterten induktiven Limites vertauschbar ist, und noch eine weitere Eigenschaft erfüllt ist. Es gilt:

5.8.1. Satz. *Λ sei von endlichem Typ über einem universell japanischen diskreten Bewertungsring oder einem kompletten lokalen Ring. D sei lokal von endlicher Darstellung, und für jede lokale komplette Λ-Algebra A sei $D(A) \to$ lim-proj $(D(A/\mathfrak{m}_A{}^{n+1}))$ injektiv. Erfüllt (B, η), $\eta \in D(B)$, die Bedingung* (UD 1) *für Artinsche Λ-Algebraen und* (UD 2) *und ist B eine lokale Henselsche Λ-Algebra von endlichem Typ, so ist (B, η) eine semiuniverselle Deformation.*

Beweis. Es ist (UD 1) nachzuweisen für beliebige lokale Henselsche Λ-Algebren A. Da D mit induktiven Limites vertauschbar ist und ebenso der Funktor $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, -)$, kann man sich von vornherein auf den Fall endlich erzeugter lokaler Henselscher Λ-Algebren A beschränken.

Zu gegebenen $\xi \in D(A)$, $\overline{u} : (B, \eta) \to (A/I, \overline{\xi})$ ($\overline{\xi} \in D(A/I)$ Bild von ξ) ist eine Fortsetzung $u : (B, \eta) \to (A, \xi)$ zu konstruieren.

Man kann sukzessive Fortsetzungen von $\overline{u}_n : B \to A/(\mathfrak{m}_A{}^{n+1} + I)$ zu $u_n : B \to A/\mathfrak{m}_A{}^{n+1}$ konstruieren, so daß die u_n ein $u^\wedge : B \to A^\wedge$ definieren, das modulo $IA^\wedge$ mit $\overline{u}$ übereinstimmt, und so daß $D(u^\wedge)\, \eta = \xi^\wedge$ Bild von ξ in $D(A^\wedge)$ ist. Da A die Approximationseigenschaft besitzt und der Funktor

$$F(C) = \{v \in \mathrm{Hom}_\Lambda (B, C);\ D(v)\eta = \xi_C,\ v \equiv u \bmod IC\}$$

(C eine Henselsche A-Algebra, ξ_C Bild von ξ in $D(C)$) offensichtlich von endlicher Darstellung ist, läßt sich $u^\wedge \in F(A^\wedge)$ durch ein $u \in F(A)$ approximieren, q.e.d.

Es ist weiterhin klar, daß eine positive Antwort auf Frage 1 eine positive Antwort auf Frage 2 impliziert, falls D folgende Eigenschaften besitzt:

a) D ist lokal von endlicher Darstellung.
b) Die kanonische Abbildung

$$D\big(\text{lim-proj}\,(\overline{B}/\mathfrak{m}_{\overline{B}}{}^{n+1})\big) \to \text{lim-proj}\,\big(D(\overline{B}/\mathfrak{m}_{\overline{B}}{}^{n+1})\big)$$

hat ein dichtes Bild.

Die Bedingung a) ist eine natürliche Forderung, die Bedingung b) läßt sich in konkreten Fällen manchmal verifizieren (Grothendiecks „Théorème d'existence").

Ein Kernproblem ist daher die Algebraisierung der Ringe $\overline{B}$ und die Beantwortung der Frage 3.

Der folgende Satz stellt das fundamentale Resultat bezüglich der Algebraisierung dar.

5.8.2. Satz (M. Artin). *Es sei Λ wie in* 3.4.1. *und D lokal von endlicher Darstellung, ferner sei $\overline{B}$ eine komplette Noethersche Λ-Algebra, $\overline{\eta} \in D(\overline{B})$, so daß $(\overline{B}, (\overline{\eta}_n))$ eine formale semiuniverselle Deformation für D ist ($\overline{\eta}_n$ = Bild von $\overline{\eta}$ in $D(B/\mathfrak{m}_B{}^{n+1})$). Dann* *gibt es eine lokale Henselsche Λ-Algebra B, einen Isomorphismus $B^\wedge \simeq \overline{B}$ und ein $\eta \in D(B)$, so daß $\overline{\eta}_n$ durch η induziert wird.*

Zum Beweis würde es genügen, daß $\overline{B}$ Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra von endlichem Typ ist, da dann nach der Approximationseigenschaft ein $\eta \in D(B)$ mit $\eta_1 = \overline{\eta}_1$ existiert und ein Automorphismus von $\overline{B}$ (bestimmt durch die Folge (η_n)), der $(\overline{\eta}_n)$ in (η_n) überführt. $\overline{B}$ ist jedoch nicht a priori Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra von endlichem Typ, obwohl das in vielen Beispielen, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, der Fall ist. Die Grundidee von ARTINS Beweis ist nun, $\overline{B}$ als endliche Algebra über der Komplettierung einer Henselschen Λ-Algebra A von endlichem Typ darzustellen und $(\overline{B}, \overline{\eta})$ gleichzeitig durch ein Paar (B, η), $\eta \in D(B)$, B eine endliche A-Algebra, in geeigneter Weise zu approximieren.

Man kann sich von vornherein darauf beschränken, daß Λ ein Körper oder ein diskreter Bewertungsring ist. Falls das nämlich noch nicht der Fall sein sollte, ist Λ eine Algebra über einem Körper oder diskreten Bewertungsring Λ_0 von endlichem Typ (im Henselschen Sinne). Für eine Λ_0-Algebra A und $\mu \in \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, A)$ bezeichnen wir mit ${}^\mu A$ den Ring A, versehen mit der durch μ induzierten Λ-Algebrastruktur.

Ist

$$D_0(A) = \{(\mu, \xi),\ \mu \in \mathrm{Hom}_{\Lambda_0}(\Lambda, A),\ \xi \in D({}^\mu A)\},$$

dann ist D_0 ein Funktor auf der Kategorie der lokalen Henselschen Λ_0-Algebren. D_0 ist ebenfalls lokal von endlicher Darstellung, und ist $\nu: \Lambda \to \overline{B}$ die gegebene Λ-Algebrastruktur auf $\overline{B}$, so ist $(\nu, \overline{\eta}) \in D_0(\overline{B})$ ebenfalls formal semiuniversell. Eine Algebraisierung von $(\nu, \overline{\eta})$ liefert dann auch eine Algebraisierung von $\overline{\eta}$.

Im folgenden sei also Λ ein Körper oder ein Henselscher diskreter Bewertungsring. Dann enthält $\overline{B}$ einen Unterring

$$A^\wedge = \Lambda^\wedge[[x_1, \ldots, x_n]] \simeq \Lambda^\wedge[[X_1, \ldots, X_n]],$$

so daß $\overline{B}$ endlich über $A^\wedge$ ist. Der Unterring $A^\wedge$ ist natürlich algebraisierbar ($A^\wedge$ Komplettierung von $A = \Lambda\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$). Es zeigt sich, daß bei geeigneter Wahl von A dann auch $(\overline{B}, \overline{\eta})$ algebraisiert werden können.

Ordnet man jeder A-Algebra A' die Menge aller Paare (B', η'), B' eine endliche A'-Algebra, $\eta' \in D(B')$, zu, so ist dieser Funktor von endlicher Darstellung, und $(\overline{B}, \overline{\eta})$ läßt sich daher beliebig genau durch ein (B', η'), B' eine endliche A-Algebra, $\eta' \in D(B')$, approximieren. Die formale Semiuniversalität von $(\overline{B}, \overline{\eta})$ impliziert dann einen Λ-Homomorphismus $\overline{B} \to B'^\wedge$. Dieser ist natürlich surjektiv, sofern man $\overline{B}$ bis mindestens zur Ordnung 2 approximiert. Um zu erreichen, daß er auch injektiv ist, benötigt man allerdings noch mehr Information über B'.

Es sei A' eine A-Algebra, M' ein A'-Modul, und $L_0, \ldots, L_n$ seien endliche Moduln. Dann definieren wir nach M. ARTIN:

Eine $(x_1, \ldots, x_n)$-*Vorbereitung vom Typ* $(L_0, \ldots, L_n)$ von M' ist eine Folge von A'-Homomorphismen

$$L_\nu \otimes_A A_\nu' \underset{v_\nu}{\overset{u_\nu}{\rightleftarrows}} M' \otimes_{A'} A_\nu' =: M_\nu'$$

mit

$$u_\nu \circ v_\nu = x_{\nu+1}\, \mathrm{id}_{M_\nu'}, \qquad v_\nu \circ u_\nu = x_{\nu+1}\, \mathrm{id}_{L_\nu \otimes_A A_\nu'}$$

für $\nu \leqq n$ (wobei wir $x_{n+1} = 1$ setzen). Hierbei bezeichnet A_ν' den Restklassenring $A'/(x_1 A' + \cdots + x_\nu A')$ $(A_0' =: A')$.

5.8.2.1. Hilfssatz. *Bei geeigneter Wahl von $x_1, \ldots, x_n \in \overline{B}$ gibt es Λ-Moduln L_ν, so daß $\overline{B}$ als $A^\wedge$-Modul eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ besitzt* $(A^\wedge = \Lambda^\wedge[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Beweis. Da $A_n{}^\wedge = \Lambda^\wedge$ ist, ist $\overline{B} \otimes_{A^\wedge} A_n^\wedge$ endlicher $\Lambda^\wedge$-Modul, also stets vom Typ $L_n \otimes_\Lambda \Lambda^\wedge$. (Jeder endliche $\Lambda^\wedge$-Modul ist direkte Summe von $\Lambda^\wedge$-Moduln vom Typ $\Lambda^\wedge/p^e\Lambda^\wedge = \Lambda/p^e\Lambda$ und von freien Bestandteilen, p bezeichnet dabei ein Primelement, falls Λ diskreter Bewertungsring ist.)

Angenommen, $x_1, \ldots, x_n$ sind so, daß für $\nu < s$ bereits Λ-Moduln L_ν mit Homomorphismen $L_\nu \otimes_\Lambda A_\nu^\wedge \rightleftarrows \overline{B}_\nu$ mit den geforderten Eigenschaften existieren. $\overline{B}_s$ ist ein endlicher $A_s^\wedge = \Lambda^\wedge[[x_{s+1}, \ldots, x_n]]$-Modul. Da die Lokalisierung von $A_s^\wedge$ in $pA_s^\wedge$ ein diskreter Bewertungsring mit p als Primelement oder ein Körper ist, ist sofort klar, daß es eine Zariski-Umgebung $D(x)$ von $pA_s^\wedge$ gibt $(x \in A_s^\wedge)$, über der $\overline{B}_s$ vom Typ $L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$ ist mit einem geeigneten Λ-Modul L_s.

Da $\dim(A_s^\wedge/xA_s^\wedge) < \dim(A_s^\wedge)$ und x zu p prim ist, kann man $(x_1, \ldots, x_n)$ durch eine Folge $(x_1', \ldots, x_n')$ mit $x_\nu' = x_\nu$, $\nu \leqq s$, x_{s+1}' geeignete Potenz von x, $x_\nu' \in A^\wedge$ ersetzen, so daß $A^\wedge$ endlich über dem Unterring $\Lambda^\wedge[[x_1', \ldots, x_n']]$ ist. Für Moduln über regulären lokalen Ringen gilt aber stets $\mathrm{codh} + dh = \dim$ (J.-P. SERRE [55]). Also ist $A^\wedge$ freier $\Lambda^\wedge[[x_1', \ldots, x_n']]$-Modul. Folglich erfüllt $(x_1', \ldots, x_n')$ die geforderten Bedingungen für $\nu \leqq s$ (indem man die L_ν, $\nu \leqq s$, geeignet abändert). Durch vollständige Induktion folgt daraus der Hilfssatz.

Die weitere Beweisidee von 3.4.2. ist nun, $x_1, \ldots, x_n$ und $(L_0, \ldots, L_n)$ zu fixieren, so daß $\overline{B}$ eine $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung vom Typ $(L_0, \ldots, L_n)$ besitzt, und diese mit zu approximieren. Dazu ist zu zeigen:

5.8.2.2. Hilfssatz. *Für A-Algebren A' sei*

$$F(A') = \{(B', \eta', [u_\nu, v_\nu]) \mid B' \text{ endliche } A'\text{-Algebra},\ \eta' \in D(B'),\ [u_\nu, v_\nu]$$
$$(x_1, \ldots, x_n)\text{-Vorbereitung von } B' \text{ über } A' \text{ vom Typ } (L_0, \ldots, L_n)\}.$$

Dann ist $A' \to F(A')$ ein Funktor lokal von endlicher Darstellung (auf der Kategorie der lokalen Henselschen, Noetherschen Λ-Algebren).

Beweis. Die Vorgabe von (B', η') ist durch endlich viele Daten bestimmt, die der u_ν, v_ν mit den geforderten Eigenschaften ebenfalls wie folgt: Ist $B' = B_0' \otimes_{A_0'} A'$ (A_0' eine A-Algebra, so daß B' über A_0' definiert ist), so daß $A' = \text{lim-ind}\,(A_\alpha')$ ist, A_α' A_0'-Algebren, so sind u_ν, v_ν durch ihre Wirkung auf L_ν bzw. B_0' bestimmt, q.e.d.

Wir können also $(\overline{B}, \overline{\eta})$ mit der fixierten $(x_1, \ldots, x_n)$-Vorbereitung $[\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu]$ modulo $\mathfrak{m}_{A^\wedge}^c$ approximieren durch eine endliche A-Algebra B, ein $\eta \in D(B)$ und eine Vorbereitung $[u_\nu, v_\nu]$. Das heißt, wenn man mit $A/\mathfrak{m}_A{}^{c+1}$ tensoriert, sind $(\overline{B}, \overline{\eta}, [\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu])$ und $(B, \eta, [u_\nu, v_\nu])$ isomorph. Wie bereits bemerkt, induziert die Semiuniversalität von $\overline{\eta}$ sukzessive Λ-Homomorphismen $\overline{B} \to B/\mathfrak{m}_A{}^{m+1}B$, $m = c, c+1, \ldots$, also einen

Λ-Homomorphismus $\psi : \overline{B} \to B^\wedge$, der im Fall $c \geqq 1$ auf alle Fälle surjektiv ist, und so daß $\overline{\eta}$ bei $\overline{B} \to B/\mathfrak{m}_\Lambda{}^{m+1}B$ in η_m (= Bild von η) übergeht. Es ist also zu zeigen, daß ψ auch injektiv ist, sofern c hinreichend groß ist.

Es ist $\psi(x_\nu) = x_\nu + y_\nu$, $y_\nu \in \mathfrak{m}_\Lambda{}^{c+1}B^\wedge$. Folglich wird $\mathfrak{m}_\Lambda B^\wedge$ auch durch $p, x_1, \ldots, x_s, \psi(x_{s+1}), \ldots, \psi(x_n)$ erzeugt $(0 \leqq s \leqq n)$, und daher gilt

$$(1) \qquad \mathfrak{m}_\Lambda{}^m B_s^\wedge = \left(\sum_{\nu=s+1}^{h} \psi(x_\nu)\, B_s^\wedge + pB_s^\wedge\right)^m .$$

Die entscheidende Bemerkung ist nun die, daß die Multiplizität der einzelnen $B_s^\wedge$ bezüglich $\mathfrak{m}_\Lambda A_s^\wedge$ durch die Vorbereitung eindeutig bestimmt ist. Sie ist nämlich gleich der Anzahl der freien Summanden von L_s (da $L_\nu \otimes_\Lambda A_s^\wedge \to B_s^\wedge$ injektiv ist und der Kokern durch x_{s+1} annulliert wird, also kleinere Dimension hat)[1].)

Wegen (1) hat also $B_s^\wedge$ bezüglich des Ideals $\sum_{\nu=s+1}^{n} \psi(x_\nu)\, B_s^\wedge + pB_s^\wedge$ dieselbe Multiplizität wie $\overline{B}_s$ bezüglich des Ideals $\sum_{\nu=s+1}^{n} x_\nu \overline{B}_s + p\overline{B}_s$. Daher haben alle Elemente des Kernes von $\overline{B}_s \to B_s^\wedge$ eine kleinere Dimension als dim $\overline{B}_s$.[2])

Wir betrachten zunächst den Fall, daß Λ ein Körper ist. Dann ist wegen $x_{s+1}\overline{B}_s \subseteq L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$ und da $L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge$ frei ist, also alle von 0 verschiedenen Elemente dieselbe Dimension haben,

$$(2) \qquad x_{s+1}\overline{B}_s \cap K_s = 0 .$$

Offenbar ist $K_n = 0$, da $\overline{B}_n \to B_n^\wedge$ surjektiv ist und beide Seiten Algebren vom gleichen Rang über Λ sind. Aus (2) folgt daher durch Induktion nach $n - s$, daß $K_s = 0$ für alle s, also insbesondere $K_0 = \text{Kern}\ \psi = 0$ ist.

Im Falle eines diskreten Bewertungsringes Λ ist der Beweis im Prinzip derselbe. Man betrachte hier jedoch auch noch die Multiplizitäten von $\overline{B}_s/p^m\overline{B}_s$ und $B_s^\wedge/p^mB_s^\wedge$, die wieder durch die Vorbereitung eindeutig bestimmt sind und übereinstimmen; bezeichnet man diese Multiplizität als Funktion von m mit $e(m)$, so ist $e(m)$ stückweise linear, und der Anstieg an einer Stelle m ist gleich der Anzahl der Summanden von L_s, deren Länge mindestens gleich m ist. Da wieder alle von 0 verschiedenen Elemente von $L_s \otimes_\Lambda A_s^\wedge/p^mA_s^\wedge$ $(m \geqq 1)$ dieselbe Dimension haben, folgt wie oben

$$\overline{B}_n/p^m\overline{B}_n \simeq B_n^\wedge/p^mB_n^\wedge$$

für alle m, also $K_n = 0$ und ebenso Gleichung (2), also $K_s = 0$ für alle s, q.e.d.

---

[1]) Ist $d = \dim A_s^\wedge$, dann ist die Multiplizität eine additive Funktion auf der Kategorie der $A_s^\wedge$-Moduln, die auf der Unterkategorie der Moduln der Dimension $<d$ verschwindet.

[2]) Aus $\psi(x_\nu) = x_\nu + y_\nu$ folgt

$$\mathfrak{m}_\Lambda{}^mB^\wedge + \sum_{\nu=1}^{s} x_\nu B^\wedge = \mathfrak{m}_\Lambda{}^mB^\wedge + \sum_{\nu=1}^{s} \psi(x_\nu)B^\wedge$$

für alle m; somit hat auch $\overline{B}_s \otimes_{\overline{B}} B^\wedge$ dieselbe Multiplizität.

6. Die Kategorie der algebraischen Räume

6.1. Motivierung

Im Gegensatz zur Kategorie der analytischen Räume weist die Kategorie der algebraischen Schemata einen wesentlichen Nachteil auf: Die Bildung von Quotienten eines Schemas bezüglich einer Äquivalenzrelation ist allgemein nicht möglich, und solche Fragestellungen wie die nach der Existenz der Hilbert- und Picard-Schemata lassen sich nicht in befriedigender Weise beantworten. Ein anderes Problem ist die Existenz von Kontraktionen und Dilatationen, insbesondere die Frage, ob für die Existenz dieser Modifikationen bereits ihre formale Existenz hinreichend ist.

Wenn wir solche Fragen untersuchen, die sich in der Kategorie der analytischen Räume wesentlich besser behandeln lassen, dann bietet es sich an, nach einem algebraischen Analogon der analytischen Räume zu suchen. Zunächst ist es dafür erforderlich, in der Kategorie der Schemata die „richtige" Topologie einzuführen, nämlich die Etaltopologie. Um dies einzusehen, betrachten wir die Einbettung der Kategorie der über C algebraischen Schemata in die der analytischen Räume. Bei ihr gehen die Etalmorphismen der Schemata in lokale Homöomorphismen über. Unser Ziel wird nun darin bestehen, die Kategorie der Schemata zu erweitern, indem wir die Differenzkokerne bezüglich der Etaläquivalenzrelationen hinzunehmen. Es wird sich als sinnvoll erweisen, unter einem algebraischen Raum eine Etalgarbe über der Kategorie der Schemata zu verstehen, die noch zusätzlichen Bedingungen (lokale Darstellbarkeit und Quasiseparierbarkeit) genügt. Insbesondere wird jedes Schema durch die Yoneda-Einbettung zu einer solchen Etalgarbe. Wir erhalten so auf natürliche Weise eine Kategorie, in der die gewünschten Quotienten existieren. Die Definition des algebraischen Raumes und die für uns wesentlichen Resultate gehen auf M. Artin zurück.

6.2. Etalgarben

Wir wollen in diesem Kapitel als Grundlage für die algebraischen Räume Etalgarben auf einer Unterkategorie der Kategorie der geometrischen Räume betrachten. Man vergleiche dazu 1.5. Es gelten hier die in der Kategorie der Schemata wesentlichen Sätze. Es sei im weiteren $\mathscr{C}$ eine volle und universelle Unterkategorie der Kategorie der geometrischen Räume ($\mathscr{C}$ heißt *universell,* wenn alle Faserprodukte enthalten sind).

Definition. Es sei $\mathscr{F}$ ein kontravarianter Funktor der Unterkategorie $\mathscr{C}$ der geometrischen Räume in die der Mengen. $\mathscr{F}$ heißt *Etalgarbe,* wenn für jeden surjektiven Etalmorphismus $T' \to T$ das Diagramm

$$\mathscr{F}(T) \to \mathscr{F}(T') \rightrightarrows \mathscr{F}(T' \times_T T')$$

exakt ist (dabei sind T und T' lokal geringte Räume, und die Abbildungen im Diagramm sind die kanonischen).

Vollkommen analog definiert man eine Etalgarbe über $X \in \mathscr{C}$, wenn der Funktor nur auf $(\mathscr{C}/X)$ gegeben ist.

In Analogie zur Etaltopologie in der Kategorie der Schemata gilt der folgende Satz (vgl. 1.5.):

6.2.1. Satz. *Der Inklusionsfunktor der Kategorie der Garben über ($\mathscr{C}$) bezüglich der Etaltopologie in die Kategorie der Prägarben (d. h. der kontravarianten Funktoren von ($\mathscr{C}$) in* (Ens)) *besitzt einen linksadjungierten Funktor $\#$, der mit endlichen projektiven Limites vertauschbar ist.*

Zum Beweis bemerken wir nur: Es sei $\mathscr{F}$ Prägarbe. Wir führen unsere Konstruktion in zwei Schritten aus:

(1) Es sei $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}/R$, wobei R die Äquivalenzrelation

$$R = \{(f, g) \in \mathscr{F}(U) \times \mathscr{F}(U),\ \text{so daß ein } U' \xrightarrow{\text{Überdeckungen}} U \text{ mit } f\,|\,U' = g\,|\,U' \text{ existiert}\}$$

(2) bedeutet. $\mathscr{F}^{\#}$ werde gegeben durch

$$\mathscr{F}^{\#}(U) = \text{lim-ind}\left(\mathscr{F}_0(U'),\ U' \xrightarrow{\text{Überdeckungen}} U\right).$$

Man sieht, daß durch (1) gerade die Gültigkeit des ersten Garbenaxioms und durch (2) die des zweiten Garbenaxioms bewirkt wird.

Für einen geometrischen Raum $\mathscr{F}$ ist nun stets $\mathscr{F} = \mathscr{F}^{\#}$.

Wir wollen nun diesen für unsere Betrachtungen wichtigen Satz beweisen:

6.2.2. Satz. *Jeder lokal geringte Raum definiert durch die Yoneda-Einbettung eine Etalgarbe.*

Beweis. Wir haben folgendes zu zeigen: Ist $f : X \to Y$ ein surjektiver Etalmorphismus, dann ist $X \times_Y X \rightrightarrows X \to Y$ exakt, d. h.

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(X \times_Y X, Z)$$

ist exakt in (Ens) für alle geometrischen Räume Z.

Nun ist die obige Folge genau dann exakt, wenn

(1) das entsprechende Diagramm der zugrunde liegenden Räume in der Kategorie der topologischen Räume exakt ist,

(2) das entsprechende Diagramm der Strukturgarben in der Kategorie der Abelschen Garben über Y exakt ist.

Es seien $\varphi, \psi : Y \rightrightarrows Z$ gegeben, so daß $f \circ \varphi = f \circ \psi$ bei $X \to Y \rightrightarrows Z$ ist. Es ist zu zeigen, daß $\varphi = \psi$ ist. Man sieht sofort, daß wegen (1) $\underline{\varphi} = \underline{\psi}$ ist ($\underline{X} \to \underline{Y}$ ist ja surjektiv). Analoges gilt für die Garbenmorphismen, da (2) gilt.

Es sei nun $\alpha : X \to Z$ gegeben mit

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Z, \\ & Y \arrow[ur, dashed, "\alpha'"'] & \end{tikzcd} \qquad \alpha \circ \mathrm{pr}_1 = \alpha \circ \mathrm{pr}_2$$

Es ist zu zeigen, daß ein α' existiert, welches das Diagramm kommutativ macht. Man sieht sofort, daß $\underline{\alpha}'$ wegen (1) und α_*' wegen (2) existiert. Wir haben also, um den Satz zu beweisen, noch (1) und (2) zu zeigen.

Zu (1): Wir müssen zeigen, daß (0) das Diagramm der Mengen exakt ist, a) $\underline{f}$ surjektiv ist, b) $U \subseteq Y$ offen genau dann, wenn $f^{-1}(U)$ offen ist. Sind nämlich (0), a), b) erfüllt und ist

$$\begin{tikzcd} \underline{X \times_Y X} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \underline{X} \arrow[r] \arrow[dr, "q"'] & \underline{Y} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

T topologischer Raum, $q \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2$, dann existiert genau ein φ mit $\varphi \circ f = q$.

Es sei $y \in \underline{Y}$, $x \in \underline{X}$ mit $f(x) = y$ (ein solches X existiert, da a) erfüllt ist). Dann setzen wir $\varphi(y) =: q(x)$. Die Definition ist vom Repräsentanten unabhängig; denn sind x, x' gegeben mit $f(x) = f(x')$, dann existiert ein $z \in X \times_Y X$ mit $\mathrm{pr}_1(z) = x$, $\mathrm{pr}_2(z) = x'$. Wir definieren Z wie folgt kanonisch:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,(k(x) \otimes_{k(f(x))} k(x')) \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{Spec}\,(k(x')) \arrow[dl] \arrow[ddd] \\ & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\ & X \arrow[r] & Y & \\ \mathrm{Spec}\,(k(x)) \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & \mathrm{Spec}\,(k(f(x))) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Wegen b) ist φ stetig.

Es genügt also, a), b) und (0) zu zeigen. Die Behauptung a) ist nach Voraussetzung erfüllt (f ist surjektiv); b) ist erfüllt, da f etal ist, also offen (vgl. 2.2.4.), und (0) ist erfüllt, wie wir sofort aus dem obigen Diagramm sehen.

Wir müssen also noch zeigen, daß das Diagramm der Strukturgarben exakt ist.

(1) $\mathcal{O}_Y \to \underline{f}_*\mathcal{O}_X$ ist injektiv.

(2) Für jedes $f \in \underline{f}_*\mathcal{O}_X(U)$, $U \subseteq Y$ mit $\mathrm{pr}_{1*}(f) = \mathrm{pr}_{2*}(f)$ folgt $f \in \mathcal{O}_Y(U)$.

Zu (1): Es sei $0 \neq f \in \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\underline{f}^{-1}(U))$. Nun ist $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ flach, also (als Morphismus von lokalen Ringen) treuflach und somit insbesondere injektiv. Für $x \in \underline{f}^{-1}(U)$ gilt also $\underline{f}_*(f)_x \neq 0$, falls $f_{f(x)} \neq 0$ ist. Somit ist (1) bewiesen.

Es bleibt noch folgendes zu zeigen: Ist $y \in Y$ beliebig, $\alpha \in (f_*\mathcal{O}_X)_y$, so daß α bei beiden Morphismen auf das gleiche Bild abgebildet wird, dann ist $\alpha \in \mathcal{O}_{Y,y}$. Nun wissen wir, daß wir lokal

$$X = \mathrm{Spec}_Y\,(\mathcal{O}_X[T]/F)_G$$

setzen können, wobei $G = G_0F'$, $G_0 \notin (F)$ und F ein normiertes irreduzibles Polynom aus $\mathcal{O}_Y(Y)\,[T]$ ist. Dann ist

$$X \times_Y X = \mathrm{Spec}_Y\big(\mathcal{O}_Y[T_1, T_2]/\big(F(T_1), F(T_2)\big)\big)_{G(T_1)\cdot G(T_2)}.$$

Für die Halme der uns interessierenden Folge $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X \rightrightarrows (f \circ \mathrm{pr}_1)_*\,\mathcal{O}_{X\times_Y Y}$ erhalten wir dann

$$\mathcal{O}_{Y,y} \to (\mathcal{O}_{Y,y}[T]/F)_{(G^\nu + \mathfrak{m}_{Y,y}\mathcal{O}_{Y,y}[T]/F)} \rightrightarrows L,$$

wobei

$$L = \big(\mathcal{O}_{Y,y}[T_1, T_2]/\big(F(T_1), F(T_2)\big)\big)_{(G(T_1)^\nu G(T_2)^\nu + \mathfrak{m}_{Y,y}\mathcal{O}_{Y,y}[T_1,T_2]/(F(T_1),F(T_2))}$$

ist.

Es ergibt sich somit folgendes Problem: Es sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, F ein irreduzibles normiertes Polynom von $A[T]$,

$$G = G_0(T)\,F'(T) \notin (F),$$
$$B_0 = A[T]/F, \qquad B = B_{0(G^\nu + \mathfrak{m}B_0)}, \qquad B/A \text{ treuflach},$$
$$C_0 = B_0 \otimes_A B_0 = A[T_1, T_2]/\big(F(T_1), F(T_2)\big),$$
$$C = C_{0(G(T_1)^\nu G(T_2)^\nu + \mathfrak{m}C_0)},$$
$$A \xrightarrow{i} B \overset{\varphi_1}{\underset{\varphi^2}{\rightrightarrows}} C, \qquad \varphi_i \text{ die kanonische Abbildung.}$$

Ist dann $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, so ist $b \in A$.

Es genügt natürlich, für eine treuflache Erweiterung B'/A zu zeigen, daß $B' \otimes_A (B/A) \to B' \otimes_A C$ injektiv ist. Wir können die zu untersuchende Folge $A \to B \rightrightarrows C$ mit der strengen Henselisierung A' von A tensorieren, d. h. mit einer treuflachen Erweiterung ($A'|A$ treuflach, A' Henselscher lokaler Ring, mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper. Wir können hier o.B.d.A. annehmen, daß F in verschiedene lineare Polynome zerfällt. Über $A'/\mathfrak{m}[T] = k'[T]$ ist nämlich (k' ist ja algebraisch abgeschlossen)

$$\bar{F} = (T - \bar{c}_1)^{e_1} \cdots (T - \bar{c}_r)^{e_r},$$

d. h. (Henselsches Lemma) $F = F_1 \cdots F_r$ mit $F_i = (T - \bar{c}_i)^{e_i}$. Ist jetzt $e_i > 1$, so fällt dieser Bestandteil bei der Lokalisierung nach F' sowieso weg. Wir können also annehmen, daß $F = F_1 \cdots F_r$ ist, $F_i = T - c_i$. Wir erhalten

$$(A'[T]/F)_{F'} \simeq \underbrace{A' \times \cdots \times A'}_{r\text{-mal}}.$$

Nun wählen wir G_0 mod F so, daß $\deg G_0 < \deg F$ ist. Offensichtlich ist $G_0 \notin \mathfrak{m}A[T]$, da X durch G_0 definiert wird.

Wir wollen G_0 nun noch genauer beschreiben. Dazu betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} m & \to & A & \to & k & \to & k[T] & \to & k[T]/F =: k_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ m' & \to & A' & \to & k' & \to & k'[T] & \to & k'[T]/F \end{array}$$

Da $\bar{G}_0$ Einheit in $k[T]/F$ ist (G_0 definiert ja gerade X, und es ist $k[T]/F = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$), ist $\bar{G}_0$ auch Einheit in $k'[T]/F$, und somit (für $\bar{F} = (T - \bar{c}_1) \cdots (T - \bar{c}_r) = k'[T]$) ist $\bar{G}_0(\bar{c}_i) \neq 0$ für alle i; denn sonst wäre ja $\bar{G}_0$ Nullteiler, $\bar{G}_0(\bar{c}_i) \neq 0$, d. h., $g_i =: G_0(c_i)$ ist Einheit in A'. Wir erhalten somit

$$(A'[T]/F)_{F'G_0} \simeq A'_{g_r} \times \cdots \times A'_{g_r} = \underbrace{A' \times \cdots \times A'}_{r\text{-mal}}$$

und damit

$$\big(A'[T_1, T_2]/F(T_1), F(T_2)\big)_{G(T_1)\cdot G(T_2)} \simeq \underbrace{A' \times \cdots \times A'}_{r^2\text{-mal}}.$$

Wir müssen also jetzt wegen der treuflachen Erweiterung nur noch zeigen, daß

$$A' \to (A' \times \cdots \times A')_{(1+\mathfrak{m}A[T]/F)_G} \rightrightarrows (A' \times \cdots \times A')_{(1+\mathfrak{m}A[T_1,T_2])}$$

exakt ist. Nun ist aber

$$(A' \times \cdots \times A')_{(1+\mathfrak{m}A[T]/F)_G} = A'_{(1+\mathfrak{m}A[c_1])_{g_1}} \times \cdots \times A'_{(1+\mathfrak{m}A[c_r])_{g_r}} = A' \times \cdots \times A',$$

da auch $(1 + \mathfrak{m}A[c_i])_{g_i}$ Einheiten in A' sind.

Wir haben somit den Satz bewiesen; denn das Diagramm

$$A' \xrightarrow{i} \underbrace{A' \times \cdots \times A'}_{r\text{-mal}} \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \underbrace{A' \times \cdots \times A'}_{r^2\text{-mal}}$$

mit den kanonischen Abbildungen

$$i\colon a \mapsto (a, \ldots, a),$$
$$\varphi\colon (a_1, \ldots, a_r) \mapsto (a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_r),$$
$$\psi\colon (a_1, \ldots, a_r) \mapsto (a_1, \ldots, a_r, a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_1, \ldots, a_r)$$

ist exakt. Wir haben somit bewiesen, daß jeder lokal geringte Raum durch die Yoneda-Einbettung eine Etalgarbe ist.

Wir haben jetzt die Voraussetzung geschaffen, Etalgarben über einer beliebigen Unterkategorie der Kategorie der geometrischen Räume zu untersuchen. Wir wollen im nächsten Abschnitt untersuchen, wann eine Etalgarbe über einer solchen Kategorie durch einen „algebraischen Raum“ repräsentiert werden kann und wann ein solcher Raum ein geometrischer Raum ist.

6.3. $\mathscr{C}$-Räume

Es sei $\mathscr{C}$ eine streng volle und universelle Unterkategorie der geometrischen Räume, von der wir überdies voraussetzen, sie sei abgeschlossen bezüglich einer Klasse A von Idealgarben. Das soll bedeuten, daß jedem Objekt X von $\mathscr{C}$ eine Klasse $A(X)$ von Idealgarben der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ zugeordnet wird, die 0 enthält. Dann soll $\mathscr{C}$ mit $J \in A(X)$ auch den Morphismus

$$(\operatorname{Supp} \mathcal{O}_X/J, \mathcal{O}_X/J) \to X$$

enthalten. Derartige Morphismen von $\mathscr{C}$ sollen *abgeschlossene Einbettungen* heißen, und es gelte:

6.3.1. *Es sei D die Klasse der abgeschlossenen Einbettungen von $\mathscr{C}$. Diese hat folgende Eigenschaften:*

(i) *D enthält alle Isomorphismen.*
(ii) *D enthält nur Monomorphismen.*
(iii) *D ist multiplikativ abgeschlossen.*
(iv) *D ist universell.*

6.3.2. Es sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, D eine Klasse von Morphismen. $\mathscr{C}$ enthalte Faserprodukte. Dann bezeichnen wir als *D-separierte Morphismen* die Klasse (D-sep) aller $(f: X \to Y) \in Fl(\mathscr{C})$, für die die kanonischen Morphismen $\mathscr{C} \to X \times_Y X$ in D liegen.

Im folgenden soll D stets die Klasse der abgeschlossenen Einbettungen der Kategorie $\mathscr{C}$ sein; die Elemente von (D-sep) nennen wir dann einfach separierte Morphismen. Der Beweis für den folgenden Satz ist rein kategorial; er gilt für jede Klasse D von Morphismen, die die Bedingungen (i) bis (iv) von **6.3.1.** erfüllt.

6.3.3. Satz. *Für die Klasse D der abgeschlossenen Einbettungen von $\mathscr{C}$ gilt:*

(i) $D \subseteq$ (D-sep).
(ii) (D-sep) *ist multiplikativ abgeschlossen.*
(iii) (D-sep) *ist universell.*
(iv) *Ist $P = D$ eine universelle und multiplikativ abgeschlossene Klasse von Morphismen, so gilt:*
Aus $fg \in P$ und $f \in$ (D-sep) folgt $g \in F$.

Beweis.

(i) Aus $j \in D$ folgt, daß j Monomorphismus, also $\delta_{X|Y} = 1_X \in D$ ist.
(ii) $X \to Y \to Z$; es gilt

$$\begin{tikzcd} \delta_{X|Z}: X \arrow[r] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \times_Z X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

ist universell. Da D universell und multiplikativ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung:

(iii)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad f \in (D\text{-sep}),\ \text{d. h. } \delta_{X|Y} \in D,$$

ist universell.

Nun ist
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\delta_{X'|Y'}"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & X' \times_{Y'} X' \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ X' \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d] & X \times_Y X \times_Y Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\delta_{X|Y}"] & X \times_Y X \end{tikzcd}$$

universell. Damit folgt die Behauptung.

Es sei nun $fg \in P$, $f \in$ (D-sep),

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "1_X"'] & & \\ & X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p"] & Y \arrow[d] \\ & X \arrow[r, "fg"] & Z \end{tikzcd}$$

Zu zeigen ist, daß $h \in P$ ist; dies gilt, da

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \times_Z Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\delta_{Y|Z}"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

universell ist.

Wir haben uns nun mit einigen Eigenschaften der Kategorie $\mathscr{C}$ vertraut gemacht. Einen Morphismus in $\mathscr{C}$ nennen wir *Etalmorphismus*, wenn er als Morphismus lokal geringter Räume etaliert ist. Die Kategorie $\mathscr{C}$ wird so mit einer Etaltopologie versehen, und wir können wie im vorigen Abschnitt Etalgarben über $\mathscr{C}$ betrachten.

6.3.4. Definition. Ein *$\mathscr{C}$-Raum* ist eine Etalgarbe A über $\mathscr{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Es existiert in $\mathscr{C}$ eine Etaläquivalenzrelation $R \rightrightarrows U$, so daß (bei der Yoneda-Einbettung) A der Quotient dieser Relation in der Kategorie der Etalgarben ist.
(ii) Der nach (i) induzierte Morphismus $R \to U \times U$ ist eine abgeschlossene Einbettung (Separiertheit).

Das wichtigste Beispiel für eine Kategorie von $\mathscr{C}$-Räumen erhalten wir für $\mathscr{C} =$ (Sch). Dies sind die algebraischen Räume im Sinne von Artin. Wir werden außerdem die Fälle betrachten, in denen $\mathscr{C}$ die Kategorie der formalen bzw. der Henselschen Schemata ist. In diesen werden wir dann die $\mathscr{C}$-Räume als formale algebraische Räume bzw. Henselsche algebraische Räume bezeichnen.

Wir fahren nun fort in der allgemeinen Theorie der $\mathscr{C}$-Räume. Ein Morphismus zweier $\mathscr{C}$-Räume war eine natürliche Transformation der Funktoren. Wir wollen dies nun auf andere Weise ausdrücken.

6.3.5. Bemerkung. *Es sei $f: A_1 \to A_2$ ein Morphismus zweier $\mathscr{C}$-Räume. Dann existieren Äquivalenzrelationen $R_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} U_1$, $R_2 \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} U_2$, die A_1 bzw. A_2 repräsentieren, und Morphismen $g: R_1 \to R_2$, $h: U_1 \to U_2$ mit $q_1 g = hp_1$ und $q_2 g = hp_2$, durch die f induziert wird.*

Die zu dieser Behauptung umgekehrte Bemerkung ist trivial. Der Beweis wird sofort klar nach dem Lemma von Yoneda und der Konstruktion eines Quotienten in der Kategorie der Etalgarben. Oft ist es nützlich, eine äquivalente Definition für $\mathscr{C}$-Räume anzugeben.

6.3.6. Satz. *Eine Etalgarbe F auf $\mathscr{C}$ ist durch einen $\mathscr{C}$-Raum darstellbar genau dann, wenn*

(1) *ein Objekt U aus $\mathscr{C}$ existiert und ein Garbenmorphismus $U \to F$, daß für alle $V \to F$ ($V \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$) das Faserprodukt $U \times_F V$ durch ein Objekt aus $\mathscr{C}$ darstellbar ist und der Morphismus $U \times_F V \to V$ etaliert und surjektiv ist.*

(2) *$U \times_F U \to U \times U$ eine abgeschlossene Einbettung ist.*

Beweis. Wenn (1) und (2) erfüllt sind, setzt man $R = U \times_F U$. Dann ist $R \rightrightarrows U$ eine etale Äquivalenzrelation mit Quotienten F, und (2) gibt die Separiertheit.

Ist F ein $\mathscr{C}$-Raum, definiert durch $R \rightrightarrows U$, und $V \to F$ gegeben, so betrachten wir $U \times_F V$. Es ist zu zeigen, daß $U \times_F V$ durch einen $\mathscr{C}$-Raum darstellbar und $U \times_F V \to V$ etaliert und surjektiv ist.

Die Bedingung (2) ist trivialerweise erfüllt, da $U \times_F U = R$ ist.

a) $V \to F$ läßt sich über U funktorisieren. In diesem Fall ist $V \times_F U = V \times_U U \times_F U = V \times_U R$, also darstellbar, und da $R \to U$ etaliert ist, ist $V \times_F U = V \times_U R \to V$ etaliert.

b) Wenn wir im allgemeinen $V \to F$ betrachten, dann existiert (da F Quotient in der Kategorie der Etalgarben ist) ein W und ein surjektiver Etalmorphismus $W \to V$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ W \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

Nach a) wissen wir, daß $W \times_F U$ darstellbar und $W \times_F U \to W$ etaliert und surjektiv ist. Wir haben

$$\begin{tikzcd} W \times_U R = W \times_F U \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] \\ V \times_F U \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

wobei λ wegen $(*)$ und der Faserprodukteigenschaft existiert. Nun ist $W \times_F U \to W$ etaliert, d. h. lokal von der Form $W \times_F U = (W[T]/F)_G$. Dann ist $V \times_F U$ wegen der Existenz von λ lokal durch $(V[T]/F)_G$ darstellbar. Damit ist auch b) bewiesen.

Für die Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume gelten nun viele in $\mathscr{C}$ wichtige Sätze. Für den Fall $\mathscr{C} = $ (Sch) findet man detaillierte Ausführungen in [29]. Wir wollen hier nun einige kurze Ausführungen dazu machen.

6.3.7. Satz. *In der Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume existieren disjunkte Vereinigungen und Faserprodukte, falls sie in $\mathscr{C}$ existieren.*

Beweis. Es seien X_i, $i = 1, 2, 3$, $\mathscr{C}$-Räume und das folgende Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_3 . \end{tikzcd}$$

Die Existenz von X_1, X_3, X_2 in der Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume wird durch folgendes Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd}
 & & & R_2 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[ddddd] \\
 & & U_2 \arrow[dl] \arrow[ddd] & \\
 & X_2 \arrow[d] & & \\
X_1 \arrow[r] & X_3 & & \\
U_1 \arrow[u] \arrow[rr] & & U_3 \arrow[ul] & \\
R_1 \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[rrr] & & & R_3 \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right]
\end{tikzcd}$$

d. h., $X_1 \times_{X_3} X_2$ wird durch

$$R_1 \times_{R_3} R_2 \rightrightarrows U_1 \times_{U_3} U_2$$

definiert. Analog zeigt man, daß disjunkte Vereinigungen existieren. Wir wollen nun Morphismen von $\mathscr{C}$-Räumen betrachten.

6.3.8. Definition. Ein Morphismus $f: X_1 \to X_2$ von $\mathscr{C}$-Räumen heißt *etaliert* (bzw. *hat die Eigenschaft P*), wenn $R_i \rightrightarrows U_i$ existieren, die X_i definieren, und f gegeben ist durch $g, h, g: U_1 \to U_2$, $h: R_1 \to R_2$ und g etaliert ist (bzw. die Eigenschaft P hat).

Die Definition 6.3.8. gibt die Möglichkeit, auf der Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume Etaltopologie einzuführen. Natürlich ist ein Morphismus genau dann in der Kategorie der $\mathscr{C}$ etaliert, wenn er in der Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume etaliert ist.

Wir erhalten das folgende Resultat:

6.3.9. Satz. *Der Inklusionsfunktor der Kategorie $\mathscr{C}$ in die Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume ist voll und treu und mit der Etaltopologie vertauschbar.*

Wir können nun auf dem eben definierten Situs Garben betrachten (Etalgarben der Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume). Speziell können wir jedem $\mathscr{C}$-Raum X eine Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ zuordnen:

$$\mathcal{O}_X = \mathrm{Hom}(-, \mathsf{A}_Z^1), \qquad \mathsf{A}_Z^1 = \mathrm{Spec}\, Z[T].$$

Man überlegt sich nun leicht, daß die abgeschlossenen Subfunktoren von X (d. h. die abgeschlossenen Unterräume) genau durch die Idealgarben von $\mathcal{O}_X$ definiert werden. Wir werden später bei der Konstruktion des relativen Spektrums genauer darauf eingehen.

Wir wollen nun noch andeuten, wie wir Eigenschaften der Objekte von $\mathscr{C}$ auf die Objekte der Kategorie der $\mathscr{C}$-Räume übertragen werden. Wir werden dies hier am Beispiel „quasikompakt" und „lokal Noethersch" durchführen.

6.3.10. Definition. Ein $\mathscr{C}$-Raum X heißt *quasikompakt* (bzw. *lokal Noethersch*), wenn eine Äquivalenzrelation $R \rightrightarrows U$ existiert, die $\mathscr{C}$ definiert und U quasikompakt (bzw. lokal Noethersch) ist.

Analog können wir jetzt die Begriffe „kohärent", „quasikohärent" usw. auf die Kategorie der Garben (Etalgarben oder auch Zariski-Garben; man kann ja die Zariski-Topologie in Analogie zur Etaltopologie auf $\mathscr{C}$-Räume übertragen) ausdehnen.

6.3.11. Definition. Es sei X ein $\mathscr{C}$-Raum. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe F heißt *quasikohärent* (*kohärent*), wenn eine X definierende etale Äquivalenzrelation $R \rightrightarrows U$ existiert ($i : U \to X$) und i^*F als Garbe von $\mathcal{O}_U$-Moduln quasikohärent (kohärent) ist. (Dabei ist i^*F das inverse Bild von F im Sinne der Topi).

Man kann sich nun leicht überlegen, daß inverse Bilder von quasikohärenten Garben wieder quasikohärent sind. Weiterhin kann man zeigen, daß (für $\mathscr{C} = $ (Sch)) die Kategorie der quasikohärenten Garben eines $\mathscr{C}$-Raumes X genügend viele injektive Objekte hat (vgl. D. Knutson [29]) und daß $H^q(X, I) = 0$, $q = 0$ und I injektiv ist. Wir wollen hier auf den Beweis nicht eingehen.

Wir erhalten somit die Möglichkeit, in kanonischer Weise Kohomologiegruppen als abgeleitete Funktoren des Funktors der globalen Schnitte zu definieren.

Auf die Resultate, die sich aus dieser Theorie ergeben, wollen wir nicht weiter eingehen. Man kann in der Kategorie der Schemata wesentliche Sätze in der Kategorie der (Sch)-Räume (d. h. der algebraischen Räume) beweisen (z. B. Endlichkeitssatz, Satz von Chevalley, Dévissage usw.). Wir werden aber bei uns nicht davon Gebrauch machen und deshalb hier nicht weiter darauf eingehen.

Abschließend wollen wir noch einige allgemeine Konstruktionen übertragen.

6.3.12. Definition. Es sei X ein durch die Äquivalenzrelation $R \rightrightarrows T$ definierter $\mathscr{C}$-Raum, f ein Morphismus $U \to T$, $U \in \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$. Wir sagen, X' ist der durch U *induzierte Raum*, wenn X' durch die folgende Äquivalenzrelation definiert ist:

$$R \times_{T \times T} U \times U \rightrightarrows U .$$

6.3.13. Definition. Es sei X ein $\mathscr{C}$-Raum, gegeben durch $R \rightrightarrows T \xrightarrow{i} X$, $\mathscr{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Algebren. Mit $\mathrm{Spec}_X\, \mathscr{F}$ (bzw. $\mathrm{Spec}\, \mathscr{F}$) bezeichnen wir den durch $\mathrm{Spec}_T\, (i^*\mathscr{F})$ (bzw. $\mathrm{Spec}\, i^*\mathscr{F}$) induzierten Raum.

Wir wollen einige Beispiele dazu bringen:

Ist $J \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe, dann ist $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X/J$ ein abgeschlossener Unterraum von X, und alle Unterräume können auf diese Weise definiert werden. $\mathrm{Spec}_X\, (\mathcal{O}_X)_J^h$ ist die Henselsche Abschließung von X in $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X/J$ (vgl. Kap. 5).

$\mathrm{Spec}_X\, (\mathcal{O}_X)_J^\wedge$ ist die Komplettierung von X in $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X/J$.

Es sei $\mathcal{N}_X$ die Garbe der nilpotenten Elemente von $\mathcal{O}_X$, $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X/\mathcal{N}_X$. Die zuletzt angegebenen Konstruktionen werden wir vor allen Dingen in Kapitel 7 benötigen.

6.4. Darstellungskriterium

Wir wollen in diesem Teil ein Kriterium dafür angeben, wann eine Etalgarbe über der Kategorie $\mathscr{C}$ durch einen $\mathscr{C}$-Raum darstellbar ist. Es handelt sich hierbei um ein von M. Artin in seiner Arbeit [5] bewiesenes Kriterium. Wesentliches Hilfsmittel für den Beweis dieses Kriteriums wird der Artinsche Approximationssatz (vgl. Kap. 5) sein.

Wir wollen zunächst an einige Begriffe erinnern bzw. einige Definitionen geben. Wir erinnern daran, daß ein Funktor $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to$ (Ens) lokal von endlicher Darstellung war, wenn $\text{lim-ind}\; F(A_i) \simeq F(\text{lim-ind}\; A_i)$ galt für jedes filtrierte System A_i von Ringen, $A_i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

6.4.1. Definition. Es sei $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to$ (Ens) ein Funktor, $X \in \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$ und $\xi \in F(X)$. ξ heißt *formal etaliert* in $x \in X$, wenn zu folgendem Diagramm ein f existiert, das das Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\xi"'] & Z_0 \arrow[l, "f_0"'] \arrow[d] \\ F & Z \arrow[l] \arrow[ul, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Dabei ist $Z \in \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$ das Spektrum eines Artinschen Ringes, $Z_0 \subset Z$ ein durch eine nilpotente Idealgarbe definiertes abgeschlossenes Unterschema, $f_0(Z_0) = \{x\}$.

6.4.2. Bemerkung. *Es sei* $Y \in \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$ (*d. h. natürlich* $Y : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to$ (Ens)). *Der Morphismus* $f : X \to Y$ *ist formal etaliert genau dann, wenn* f *flach und unverzweigt ist.*

Der Beweis folgt aus den Bemerkungen in Kapitel 1 und 2.

6.4.3. Definition. Es sei $X \in \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$, X von endlichem Typ über dem Endobjekt von $\mathscr{C}$, $\xi, \eta \in F(X)$, $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to$ (Ens). Wenn dann stets die Bedingung $\xi = \eta$ durch einen abgeschlossenen Unterraum $U \in \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$ von X darstellbar ist, dann heißt F *relativ repräsentierbar*.

6.4.4. Definition. Es sei $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to$ (Ens) ein Funktor. Wir sagen, F ist *effektiv pro-repräsentierbar*, wenn

a) eine Indexmenge I existiert,

b) für jedes $p \in I$ Körper $k^p \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ von endlichem Typ über dem Endobjekt von $\mathscr{C}$ und $\xi_0{}^p \in F(k^p)$ existieren,

c) für jedes $p \in I$ effektive formale Deformationen $(\bar{A}^p, \bar{\xi}^p)$ $\left(\bar{A}^p \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\right)$ existieren, so daß für alle lokalen Artinschen Ringe B aus $\mathscr{C}$ von endlichem Typ über dem Endobjekt und alle $\eta \in F(B)$ stets genau ein $p \in I$ existiert und eine Abbildung $\bar{A}^p \to B$, die $\bar{\xi}^p$ in η überführt.

Wir haben nun für das folgende Darstellungskriterium die Grundlage geschaffen:

6.4.5. Satz von Artin. *Es sei $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to (\mathrm{Ens})$ ein Funktor, $\mathscr{C}$ eine Kategorie (wie auf S. 169), die ein Endobjekt hat, das lokal von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten Dedekindschen Ring ist. F läßt sich durch einen algebraischen Raum lokal von endlichem Typ über dem Endobjekt von $\mathscr{C}$ darstellen genau dann, wenn*

a) *F Etalgarbe über $\mathscr{C}$ ist,*

b) *F lokal von endlicher Darstellung ist,*

c) *F effektiv pro-repräsentierbar ist,*

d) *F relativ repräsentierbar ist,*

e) *aus $X \xrightarrow{\xi} F$ ist formal etaliert in $x \in X$ ($X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, von endlichem Typ über dem Endobjekt) stets folgt, daß $X \xrightarrow{\xi} F$ formal etaliert in einer Umgebung von x ist.*

Beweis. Wir wollen zunächst einmal annehmen, daß F durch einen $\mathscr{C}$-Raum Y darstellbar ist. Dann ist a) nach Definition erfüllt. Wenn wir Y als Quotient von $R \rightrightarrows U$ darstellen, folgt $Y(\text{lim-ind } A_i) \simeq \text{lim-ind } Y(A_i)$ aus der Eigenschaft, daß die $Y(A_i)$ gegeben sind durch $U(T_i)$, $T_i \to \mathrm{Spec}(A_i)$ etaliert und surjektiv ist und zwei Abbildungen α, $\beta \in Y(A_i)$ gleich sind, wenn sie für ein T_i durch α', $\beta' \in U(T_i)$ definiert sind, die durch eine Abbildung aus $R(T_i)$ gegeben sind, $U(\text{lim-ind } A_i) = \text{lim-ind } U(A_i)$.

d) Wir betrachten $R \rightrightarrows U \to Y$. Dann existiert ein $T \to X$ (etaliert und surjektiv) und das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & U \arrow[r] & Y \\
T \times_X T = R' \arrow[u, shift left, "\psi"'] \arrow[u, shift right, "\varphi"] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & T \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[r] & X \arrow[u, shift left, "\eta"'] \arrow[u, shift right, "\xi"]
\end{tikzcd}$$

Nun läßt sich $\xi = \eta$ durch ein abgeschlossenes Unterschema von X darstellen, weil $\xi = \eta$ durch $\varphi = \psi$ gegeben ist und $\varrho = \psi$ sich durch ein abgeschlossenes Unterschema $R_0 \subseteq R'$ darstellen läßt (R_0 definiert kanonisch das entsprechende Unterschema von X).

e) Wir betrachten

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U \arrow[r] & Y \\
& & X \arrow[u, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

Es existiert ein $T \to X$ (etaliert und surjektiv), so daß $T \to U$ formal etaliert in einem Punkt t über X ist. Dann ist aber $T \to U$ formal etaliert in einer Umgebung von t; da $T \to X$ offen ist, gilt dies auch für ξ.

c) Unter einem Punkt von Y verstehen wir ja wie üblich eine Isomorphieklasse von Monomorphismen $k \to Y$. Wir definieren: $I = \{\text{Punkte } p \text{ von } Y\}$, k^p, $\xi_0{}^p$ gegeben durch den Punkt p, d. h. $k^p \xrightarrow{\xi_0{}^p} Y$ (wir wählen jeweils einen Repräsentanten aus der Isomorphieklasse aus),

$$A_0{}^p =: \text{lim-ind}\,\{\mathrm{Hom}(V, A^1),\ V \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),\ V \to Y,\ \text{Etalumgebung von } p\},$$

$A_0{}^p$ ist ein lokaler Henselscher Ring. Die Komplettierung von $A_0{}^p$ in Maximalideal bezeichnen wir mit $\bar{A}^p$, die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\bar{A}^p) \to \mathrm{Spec}(A_0{}^p) \to \mathrm{Spec}(k^p) \to F$$

bezeichnen wir mit $\bar{\xi}^p$.

Dann sind I, $\{k^p, \xi_0{}^p\}$, $\{\bar{A}^p, \bar{\xi}^p\}$ diejenigen Daten, die die Eigenschaft „effektiv pro-repräsentierbar" definieren. Ist nämlich $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ein lokaler Artinscher Ring von endlichem Typ über dem Endobjekt von $\mathscr{C}$, $\eta \in Y(B)$, dann liefert der durch den Restklassenkörper von B definierte Punkt p die gewünschte Abbildung $\bar{A}^p \to B$ mit $\bar{\xi}^p \mapsto \eta$. Wir haben somit eine Richtung bewiesen.

Es seien nun die Eigenschaften a) bis e) erfüllt. Es sei p ein Punkt von F von endlichem Typ über dem Endobjekt von $\mathscr{C}$, $(A^p, \bar{\xi}^p)$ die formale Deformation, die F in p pro-repräsentiert. Nun ist F nach b) lokal von endlicher Darstellung. Daraus folgt nach dem Algebraisierungstheorem von Kapitel 5, daß das Paar $(\bar{A}^p, \bar{\xi}^p)$ algebraisierbar durch (X^p, x^p, ξ^p) ist, wobei $X^p \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ist, von endlichem Typ über dem Endobjekt von $\mathscr{C}$, usw.

Wir zeigen nun zunächst, daß $\xi^p : X^p \to F$ formal etaliert in x^p ist. Wenn wir dies gezeigt haben, können wir X^p nach e) durch eine offene Umgebung von x^p so ersetzen, daß o.B.d.A. $X^p \to F$ überall formal etaliert ist. Nun ist F relativ repräsentierbar, d. h., für ein $Z \to F$ ist $X^p \times_F Z$ darstellbar durch ein Objekt aus $\mathscr{C}$, und der Morphismus $X^p \times_F Z \to Z$ ist etaliert. Es ist nämlich $X^p \times_F Z = \mathrm{Kern}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$, $\mathrm{pr}_i : X^p \times_S Z \to F$ (S Endobjekt von $\mathscr{C}$). Wegen f) ist dieser Kern durch einen abgeschlossenen Unterraum von $X^p \times_S Z$ darstellbar (wir können ja, da b) gilt, o.B.d.A. $Z | S$ von endlichem Typ annehmen). Da $X^p | S$ lokal von endlichem Typ ist, also in unserem Fall lokal von endlicher Darstellung, ist auch $X^p \times_S Z \to Z$ lokal von endlicher Darstellung und somit $X^p \times_S Z \to Z$. Nun ist $X^p \times_F Z \to Z$ formal etaliert. Ist nämlich etwa das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[r] \arrow[d] & X^p \times_F Z \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & X^p \arrow[d, "\xi^p"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[urr, dashed, "\varphi"] & Z \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

(B Spektrum eines Artinschen Ringes aus $\mathscr{C}$, B_0 abgeschlossene Teilmenge von B, durch ein nilpotentes Ideal definiert) kommutativ, so existiert φ wegen der formalen Etaliertheit von ξ^p und ψ aus Faserprodukteigenschaften. Dann ist aber, da $X^p \times_F Z \to Z$ lokal von endlicher Darstellung ist, $X^p \times_F Z \to Z$ etaliert.

Es sei nun $U = \coprod_{p \in I} X^p$, p von endlichem Typ. Wenn wir nun einen beliebigen geometrischen Raum Z aus $\mathscr{C}$ und ein $\eta \in F(Z)$ (o.B.d.A. von endlichem Typ über S) wählen, dann ist die Projektion

$$U \times_F Z \to Z$$

etaliert, und $U \times_F Z$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $U \times_S Z$, wie wir gesehen haben. Wir müssen zeigen, daß die Abbildung surjektiv ist. Ein Punkt $z \in Z$ definiert einen Punkt $p \in F$. Nach c) kann man die Abbildung $z \to F$ über $\bar{A}^p$ faktorisieren, und somit hat z nach der Definition von X^p ein Urbild in X^p. Wir haben somit gezeigt, daß F Quotient der etalen Äquivalenzrelation $U \times_F U \rightrightarrows U$ in der Kategorie der Etalgarben ist. Es bleibt zum Schluß noch zu zeigen, daß die Abbildung

$$\xi^p : X^p \to F$$

ormal etaliert in X^p ist. Wir betrachten also das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X^p \arrow[d, "p"'] & Z_0 \arrow[l] \arrow[d] \\ F & Z \arrow[l] \arrow[ul, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

wobei Z Artinscher Ring $\in \mathscr{C}$ ist, Z_0 abgeschlossenes Unterschema von Z durch eine nilpotente Idealgarbe definiert ist. Nun ist Z (da F lokal von endlicher Darstellung ist) o.B.d.A. von endlichem Typ über S; die Existenz von f folgt aus der Pro-Repräsentierbarkeit. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen abschließend ohne Beweis noch eine Bemerkung zu den Gruppenobjekten in der Kategorie der algebraischen Räume machen. Es gilt der folgende Satz:

6.4.6. Satz von Murre. *Ist X ein algebraischer Raum lokal von endlichem Typ über einem Körper k. der ein Gruppenobjekt ist, dann ist X ein Schema.*

6.5. Die geometrische Realisierung

Wir wollen jetzt die geometrische Struktur der $\mathscr{C}$-Räume untersuchen.

Der Inklusionsfunktor der Kategorie der geometrischen Räume in die Kategorie der mengenwertigen Kofunktoren besitzt einen linksadjungierten Funktor, die geometrische Realisierung. Man überlegt sich leicht, daß für einen $\mathscr{C}$-Raum F, gegeben durch $R \rightrightarrows U$, die geometrische Realisierung F_* gerade der Quotient von $R \rightrightarrows U$ in der Kategorie der geometrischen Räume ist. Wir wollen diese Tatsache hier als Definition nehmen.

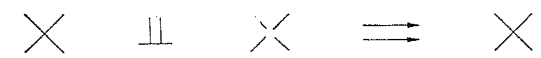
Wir wollen nun die Beziehungen von F und F_* untersuchen. Zunächst wissen wir aus 6.1., daß jeder geometrische Raum eine Etalgarbe ist. Damit gibt es, da $F = \text{Quotient}_{\text{Et}}(R \rightrightarrows U)$ ist, einen kanonischen Morphismus $F \to F_*$ (der natürlich allgemein durch die Linksadjungiertheit von $*$ gegeben ist).

Im allgemeinen wird $F \to F_*$ kein Isomorphismus sein. Ein Beispiel (vgl. D. Knutson [29]) wird das zeigen.

6.5.1. Beispiel. Es sei $\mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Wir betrachten $\mathbf{C}[X, Y]$ (X, Y Unbestimmte) und darin $V(XY) = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[X, Y]/XY$ und $D(X, Y)$. Es sei $U =: V(XY)$ und $R =: U \amalg U \cap D(X, Y)$. Wir definieren zwei Projektionen $\pi_1, \pi_2 \colon R \rightrightarrows U$. Dabei sei π_1 die kanonische Projektion, und π_2 sei auf der einen Komponente U die kanonische Projektion und auf der anderen Komponente $U \cap D(X, Y)$ wie folgt gegeben:

$$(X, Y - a) \mapsto (X - a, Y) \quad \text{und} \quad (X - b, Y) \mapsto (X, Y - b).$$

Geometrisch bedeutet das:



Die Geraden der zweiten Komponente werden bei dieser Projektion gerade vertauscht.

Es sei Q der Quotient in der Kategorie der lokal geringten Räume. Man sieht sofort, daß Q genau die affine Gerade ist. Wie man aber sieht, ist $U \times_Q U \neq R$. Das ist aber eine notwendige Bedingung, daß Q auch Quotient in der Kategorie der Etalgarben ist (dort waren die Quotienten ja effektiv und universell). Der durch (R, U, π_1, π_2) definierte algebraische Raum ist also nicht gleich seiner geometrischen Realisierung. Wir wollen dazu nur bemerken, daß das wesentlich damit zuammenhängt, daß $U \to Q$ nicht etaliert ist (im Nullpunkt passiert etwas, ansonsten ist der Morphismus etaliert).

Wir wollen im folgenden untersuchen, wann ein $\mathscr{C}$-Raum mit seiner geometrischen Realisierung übereinstimmt. Wir wollen dabei unsere Aussagen für den Fall machen, daß $\mathscr{C}$ die Kategorie der Schemata oder der Schemata über einem festen Basisschema ist. Die Aussagen gelten bei gewissen Voraussetzungen über $\mathscr{C}$ (X geometrischer Raum, $\{U_i\}$ Überdeckung von X, $U_i \in \mathscr{C}$ für alle i; dann ist auch $X \in \mathscr{C}$, dann sind abgeschlossene und offene Teilmengen von X in der Kategorie der geometrischen Räume in $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ ist abgeschlossen gegenüber Faserprodukten) allgemein für $\mathscr{C}$-Räume.

6.5.2. Satz. *Ein lokal Noetherscher algebraischer Raum F (d. h.* (Sch)-*Raum) stimmt mit seiner geometrischen Realisierung überein genau dann, wenn F Schema ist.*

Bevor wir 6.5.2. beweisen, wollen wir zunächst einige Bemerkungen machen.

6.5.3. Bemerkung. *Es sei F eine Etalgarbe auf der Kategorie der Schemata, F_0 die Fortsetzung von F auf die Kategorie der geometrischen Räume (d. h., wir betrachten die zur Prägarbe $X \mapsto \operatorname{Hom}(X, F)$ bezüglich der Etaltopologie auf der Kategorie der geometrischen Räume assoziierte Garbe). Dann ist die Einschränkung von F_0 auf die Kategorie der Schemata wieder F. Ist F algebraischer Raum, so ist $F_* = F_{0*}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für einen geometrischen Raum X, der etaliert auf ein Schema T abgebildet wird, folgt, daß X Schema ist (der Übergang von der Prägarbe zur assoziierten Garbe wird ja gerade durch solche Etalüberlagerungen gegeben). Ist nun $X \to T$ etaliert, so ist X lokal von der Form $(U[L]/F)_G$, $U \subseteq T$ offen. Somit ist X ein Schema, wenn T ein Schema ist.

6.5.4. Bemerkung. *Ein algebraischer Raum F, definiert durch $R \rightrightarrows U$, stimmt mit seiner geometrischen Realisierung genau dann überein, wenn der kanonische Morphismus $U \to F_*$ etaliert ist.*

Beweis. Wenn der algebraische Raum mit seiner geometrischen Realisierung übereinstimmt, ist $U \to F_*$ nach Definition 6.3.6. etaliert, wenn man dabei noch 6.5.3. berücksichtigt. Wir nehmen nun an, daß $U \to F_*$ etaliert ist, und betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & U \arrow[r] & F_* \\ U \times_{F_*} U \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \end{tikzcd}$$

(α existiert nach Faserprodukteigenschaften, da F Quotient von $R \rightrightarrows U$ ist.) Da $U \to F_*$ etaliert (und natürlich surjektiv) ist, ist $U \times_{F_*} U \rightrightarrows U \to F_*$ exakt und $U \times_{F_*} U \rightrightarrows U$ etaliert. Außerdem sind natürlich $R \rightrightarrows U$ nach Definition etaliert, also α. Weiterhin ist α surjektiv (das folgt aus der Quotienteneigenschaft von F_*).

Wir wenden nun auf das Diagramm (wegen 6.5.3.) o.B.d.A. F (eigentlich die Fortsetzung F_0 von F auf die Kategorie der geometrischen Räume) an. Es ergibt sich das folgende exakte Diagramm:

$$\begin{tikzcd} F(F_*) \arrow[r] & F(U) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & F(R) \\ & & F(U \times_{F_*} U) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Das kanonische Element $U \to F$ (aus der Definition des algebraischen Raumes) hat bei $F(U) \rightrightarrows F(R)$ bei beiden Abbildungen das gleiche Bild, denn F war ja Quotient von $R \rightrightarrows U$. Da

$$F(F_*) \to F(U) \rightrightarrows F(U \times_{F_*} U)$$

exakt ist (Garbenaxiom) und $F(U \times_{F_*} U) \to F(R)$ injektiv (α war etaliert und surjektiv — Garbenaxiom) hat $U \to F$ ein Urbild in $F(F_*)$. Dieses definiert aber gerade die zur kanonischen Abbildung $F \to F_*$ inverse Abbildung.

Wir wollen jetzt den Satz 6.5.2. beweisen. Dazu genügt es, nach den eben gemachten Bemerkungen folgendes zu zeigen:

Ist X ein lokal geringter (d. h. geometrischer) Raum und $f: U \to X$ ein surjektiver Etalmorphismus, dann ist X ein Schema genau dann, wenn U ein Schema ist.

Beweis. Ist X ein Schema, so folgt aus der lokalen Charakterisierung der Etalmorphismen, daß U ein Schema ist (vgl. 6.5.3.). Es sei nun U ein Schema. Wir müssen zeigen, daß jeder Punkt x aus X eine affine Umgebung besitzt. Nun wissen wir, daß es eine Umgebung W von x und V von t (t ein Urbild von x) gibt mit $f^{-1}(W) \supseteq V$, und $f \mid V$ läßt sich wie folgt darstellen:

$$V \xrightarrow{i} (W[T]/F)_{F'} =: W_0 \to W,$$

wobei F ein normiertes Polynom aus $\Gamma(W)[T]$ ist und i eine offene Einbettung. Wir können V o.B.d.A. als affin $(V = \operatorname{Spec}(B))$ voraussetzen. Wir nehmen einmal an, daß V in W_0 durch $D(\mathscr{J})$ ($\mathscr{J}$ Idealgarbe von $\mathscr{O}_{W_0}$) definiert wird, d. h., z liegt in V genau dann, wenn $\mathscr{O}_{W_0,z} = \mathscr{J}_z$ ist. Nun existiert für unser t ein j aus $(\mathscr{J}(W_0))$, so daß j_t Einheit in $\mathscr{O}_{W_0,t}$ ist (es ist ja $\mathscr{J}_t = \mathscr{O}_{W_0,t}$, gegebenenfalls verkleinern wir W noch etwas). Dann ist aber $D(j) = \operatorname{Spec}(B_j)$. Wir können also f lokal wie folgt darstellen:

$$\operatorname{Spec}(A) = (W[T]/F)_G \to W.$$

Dabei können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß diese Abbildung surjektiv ist und $G(x) \neq 0$ für unser x aus W ist, da Etalmorphismen offen sind und man W evtl. durch eine offene Teilmenge ersetzen kann.

Nun haben wir zunächst eine kanonische Abbildung

$$\Gamma(W) \to A.$$

Da $\operatorname{Spec}(A) = (W[T]/F)_G$ ist, ist $A = \Gamma((\mathscr{O}_W[T]/F)_G)$. (Eigentlich gilt ja

$$A = \Gamma((\mathscr{O}_W[T]/F)_G)_S,$$
$$S = \{f, f \in \Gamma(W)\,[T]/F)_G \text{ mit } \bar{f} \text{ Einheit in } (k(x)\,[T]/F)_G)\}.$$

Wir können aber W von vornherein so klein wählen, daß $\overline{T}$ Einheit in $\Gamma(W)$ und $G(x) \neq 0$ ist. Dann liefert Quotientenbildung nach S nichts Neues.)

Nun ist

$$\Gamma((\mathscr{O}_W[T]/F)_G) = (\Gamma(W)\,[T]/F)_G,$$

da F normiert ist und W hinreichend klein wählbar.

Wir haben somit erhalten, daß die kanonische Abbildung

$$\Gamma(W) \to A$$

etaliert ist.

Es sei D das offene Unterschema von $\operatorname{Spec}(\Gamma(W))$, das durch den offenen Morphismus (etaliert) $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(\Gamma(W))$ definiert ist. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(A) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"'] & W \arrow[d, "p"] \\ & D \end{tikzcd}$$

Dabei sind jetzt f und k surjektive Etalmorphismen. Es ergibt sich das folgende exakte Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(A) \times_W \operatorname{Spec}(A) \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[d, "h"'] & \operatorname{Spec}(A) \arrow[r] \arrow[dr] & W \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}(A) \times_D \operatorname{Spec}(A) \arrow[ur, shift left, "\lambda"] \arrow[ur, shift right, "\eta"'] & & D \end{tikzcd}$$

h ist etaliert, da φ und λ etaliert sind, und surjektiv, da p surjektiv ist und (φ, ψ) und (λ, η) eine etale Äquivalenzrelation bilden.

Aus diesem exakten Diagramm erhalten wir, da W Etalgarbe ist,

$$\begin{tikzcd} W(D) \arrow[r] & W(\operatorname{Spec}(A)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & W(\operatorname{Spec}(A) \times_D \operatorname{Spec}(A)) \arrow[d, "W(h)"] \\ & & W(\operatorname{Spec}(A) \times_W \operatorname{Spec}(A)) \end{tikzcd}$$

Da h etaliert und surjektiv ist, ist $W(h)$ injektiv. $\operatorname{Spec}(A) \to W$ definiert also ein kanonisches Element aus $W(D)$, d. h. ein $D \to W$, das zu p invers ist. Damit ist der Satz bewiesen.

7. Henselsche algebraische Räume

7.1. Henselsche Schemata

Die Theorie der Henselschen Schemata ist in ihren Grundzügen analog zur Theorie der formalen Schemata. Die Idee besteht darin, für ein abgeschlossenes Unterschema V eines Schemas X jeder affinen offenen Teilmenge U die Henselsche Abschließung von $\mathcal{O}_X(U)$ in $U \cap V$ zuzuordnen (diese hängt nur von $U \cap V$ und nicht von U selbst ab). Dann erhält man eine Garbe auf V, und V (versehen mit dieser Garbe) wird Henselsches Schema genannt. Bezeichnen wir den so entstandenen geringten Raum mit $X_V{}^h$, mit X_V den lokal geringten Raum $(V, \mathcal{O}_X/V)$ und mit $X_V^{\wedge}$ die Komplettierung von X längs V, so gibt es flache bzw. treuflache Morphismen von lokal geringten Räumen $X_V^{\wedge} \to X_V{}^h \to X_V \to X$, und unter gewissen Voraussetzungen ist $X_V{}^h$ gerade die algebraische Abschließung von X_V in $X_V^{\wedge}$.

Wir gehen nun zu detaillierten Ausführungen über.

7.1.1. Henselsche geometrische Räume

Für jeden geometrischen Raum bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_X \subseteq \mathcal{O}_X$ die folgende Idealgarbe auf X:

$\mathcal{N}_X(U) =$: Menge aller $f \in \mathcal{O}_X(U)$, für die f in keinem Punkt von U umkehrbar ist.

Man überzeugt sich leicht, daß das tatsächlich eine Idealgarbe ist. Ist X beispielsweise ein Schema oder ein analytischer Raum, so ist $\mathcal{N}_X$ gerade das Nilradikal von $\mathcal{O}_X$. Ist X ein Schema, V ein abgeschlossenes Unterschema und $X_0 = (\underline{V}, \mathcal{O}_X/\underline{V})$, so ist $(\underline{V}, \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{N}_{X_0}) = V_{\text{red}}$, ebenso ist $(\underline{V}, \mathcal{O}_{X_V}/\mathcal{N}_{X_V}) = V_{\text{red}}$.

Wir nennen einen geometrischen Raum X *Henselsch*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle Punkte $x \in X$ in $V(\mathcal{N}_{X,x})$ Henselsch ist. Die Henselschen geometrischen Räume bilden eine volle Unterkategorie der Kategorie aller geometrischen Räume.

Unser nächstes Ziel ist es, jedem geometrischen Raum eine Henselsche Abschließung zuzuordnen. Zunächst zeigen wir:

7.1.1.1. *X ist genau dann Henselsch, wenn für jede offene Menge U der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ Henselsch in $V(\mathcal{N}_X(U))$ ist.*

Der Beweis ist einfach mit Hilfe des Kriteriums zur Charakterisierung der Henselschen Ringe. Zunächst nehmen wir an, X sei Henselsch, und es sei f ein normiertes

Polynom über $\mathcal{O}_X(U)$ mit $f(0) \equiv 0 \bmod \mathcal{N}_X(U)$, $f'(0)$ Einheit modulo $\mathcal{N}_X(U)$. Dann gilt dasselbe auch für die Halme in jedem Punkt $x \in U$, also existiert zu jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Nullstelle $t_x \in \mathcal{N}_{X,x}$; t_x ist in einer Umgebung von x definiert, und in einer hinreichend kleinen Umgebung ist $f(t_x) = 0$, also bilden die t_x einen Schnitt $t \in \mathcal{N}_X(U)$ und $f(t) = 0$. Folglich ist $\mathcal{O}_X(U)$ Henselsch in $V(\mathcal{N}_X(U))$.

Sind umgekehrt alle Ringe $\mathcal{O}_X(U)$ Henselsch in $V(\mathcal{N}_X(U))$, so ist $\mathcal{O}_{X,x}$ Henselsch in $V(\mathcal{N}_{X,x})$, da dieser Ring induktiver Limes der Ringe $\mathcal{O}_X(U)$, $x \in U$, ist und $\mathcal{N}_{X,x}$ induktiver Limes der Ideale $\mathcal{N}_X(U)$, q.e.d.

Wir definieren nun zu jedem geometrischen Raum X eine Prägarbe $\mathcal{O}_X{}^h$ wie folgt: $\mathcal{O}_X{}^h(U)$ sei die Henselsche Abschließung von $\mathcal{O}_X(U)$ in $V(\mathcal{N}_X(U))$. Da die Henselsche Abschließung ein Funktor ist, wird dadurch tatsächlich eine Prägarbe definiert; die dazu assoziierte Garbe bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_{X^h}$.

7.1.1.2. Satz. *Die Zuordnung $X \mapsto X^h =: (\underline{X}, \mathcal{O}_{X^h})$ definiert einen Funktor der Kategorie der geometrischen Räume in die volle Unterkategorie der Henselschen geometrischen Räume, rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor.*

Der Adjunktionsmorphismus $X^h \to X$ hat folgende Eigenschaften:

1. *Er ist treuflach.*
2. *Er induziert die Identität auf den zugrunde liegenden Räumen, und es ist $\mathcal{O}_{X^h}/\mathcal{N}_X{}^h = \mathcal{O}_X/\mathcal{N}_X$.*
3. *$\mathcal{O}_{X^h,x}$ ist die Henselsche Abschließung von $\mathcal{O}_{X,x}$ in $V(\mathcal{N}_{X,x})$.*

Beweis. Da „Henselsche Abschließung" und „assoziierte Garbe" linksadjungierte Funktoren zu den jeweiligen Inklusionsfunktoren sind, bleibt lediglich noch die Eigenschaft 3 zu zeigen, aus der dann alles weitere folgt.

Ist (A, V) ein Henselsches Paar, dann gilt auf Grund der entsprechenden Definitionen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}\big((\mathcal{O}_{X^h,x}, V(\mathcal{N}_{X^h,x})), (A, V)\big) &= \mathrm{Hom}\Big(\operatorname*{lim\text{-}ind}_{x \in U}(\mathcal{O}_X{}^h(U)), V(\mathcal{N}_X(U)), (A, V)\Big) \\
&= \operatorname*{lim\text{-}proj}_{x \in U} \mathrm{Hom}\big((\mathcal{O}_X{}^h(U), V(\mathcal{N}_X(U))), (A, V)\big) \\
&= \operatorname*{lim\text{-}proj}_{x \in U} \mathrm{Hom}\big((\mathcal{O}_X(U), V(\mathcal{N}_X(U))), (A, V)\big) \\
&= \mathrm{Hom}\big((\mathcal{O}_{X,x}, V(\mathcal{N}_{X,x})), (A, V)\big),
\end{aligned}$$

also gilt Eigenschaft 3, q.e.d.

7.1.1.3. Korollar. *In der Kategorie der Henselschen geometrischen Räume existieren endliche projektive Limites, der Funktor $X \mapsto X^h$ ist mit diesen vertauschbar.*

Das folgt daraus, daß in der Kategorie der geometrischen Räume endliche projektive Limites existieren und daß der Funktor $X \mapsto X^h$ rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor ist. Wir nennen X^h die *Henselsche Abschließung* des geometrischen Raumes X.

7.1.2. Henselsche Schemata

Beispiele von Henselschen geometrischen Räumen sind: Schemata, formale Schemata, analytische Räume, Keime von Umgebungen eines abgeschlossenen Unterraumes in einem analytischen Raum, das ist der lokal geringte Raum $X_V = (\underline{V}, \mathcal{O}_X/V)$ (X analytischer Raum, V abgeschlossener Unterraum).

Die entsprechend definierten Keime von Umgebungen von Unterschemata eines Schemas sind nicht Henselsch.

Es sei X ein Schema, V ein abgeschlossener Unterraum, $X_V =: (V, \mathcal{O}_X/V)$; die Henselsche Abschließung des geometrischen Raumes X_V nennen wir die „Henselsche Abschließung des Schemas X in V" und bezeichnen sie mit $X_V{}^h$. Unter einem *Henselschen Schema* verstehen wir einen Henselschen geometrischen Raum, der lokal isomorph ist zur Henselschen Abschließung von Schemata in abgeschlossenen Unterräumen. Wir wenden uns im folgenden dem Studium Henselscher Schemata zu. Über den Zusammenhang zwischen der Henselschen Abschließung von Ringen und von Schemata gibt der folgende Satz Auskunft.

7.1.2.1. Satz. *Ist $X_V{}^h =: X'$ die Henselsche Abschließung eines Schemas X längs eines abgeschlossenen Unterschemas V und U eine offene, affine Teilmenge von X, dann ist $\mathcal{O}_{X'}(U \cap V)$ die Henselsche Abschließung von $\mathcal{O}_X(U)$ in $U \cap V$.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß für jede endliche Überdeckung (V_i) von $V \cap U$ durch offene Mengen der Form $V_i = U_{f_i} \cap V$ (wobei die $f_i \in \mathcal{O}_X(U)$ sind und $U_{f_i} =: \{x \in U;\, f_i(x) \neq 0\}$ ist) das Diagramm

$$\mathcal{O}_{X'}(U) \to \prod_i \mathcal{O}_X(U_i)^h \rightrightarrows \prod_{j,k} \mathcal{O}_X(U_{jk})^h$$

exakt ist (wobei $U_i =: U_{f_i}$, $U_{jk} =: U_{f_j f_k}$ ist und die Henselsche Abschließung der Ringe in $V \cap U_i$ bzw. in $V \cap U_{jk}$ gebildet wird). (Die endlichen Überdeckungen dieser Form bilden ein kofinales Teilsystem des Systems aller Überdeckungen.)

Man kann ferner voraussetzen, daß $X = U = \operatorname{Spec}(A)$ und A ein in V Henselscher Ring ist, da ein Morphismus $(A, V) \to (A', V')$, der eine Isomorphie der Henselschen Abschließungen der Paare induziert, auch eine Isomorphie der Henselschen Abschließungen der Spektren in V bzw. V' induziert. In dieser Form ergibt sich der Beweis aus Überlegungen im nächsten Abschnitt.

7.1.2.2. Korollar. *Ist X lokal Noethersch, V ein abgeschlossenes Unterschema, so gibt es einen kanonischen treuflachen Morphismus $X_V^\wedge \to X_V{}^h$ von geometrischen Räumen, der in den zugrunde liegenden Räumen die identische Abbildung induziert, und zwar so, daß $\mathcal{O}_{X_V^\wedge}(V \cap U)$ für affine offene Teilmengen U von X die Komplettierung von $\mathcal{O}_{X_V{}^h}(V \cap U)$ (bezüglich der durch ein Definitionsideal J von V (in U) induzierten J-adischen Topologie) ist.*

7.1.2.3. Korollar. *Ist für alle $x_0 \in X$ und Spezialisierungen $x \in V$ von x_0 der Ring $\mathcal{O}_{X_V^\wedge x} \otimes k(x_0)$ geometrisch reduziert über $k(x_0)$ und normal, falls $ht(x_0) = 0$ ist, so ist $X_V{}^h$ die algebraische Abschließung von X_V in $X_V^\wedge$, d. h., für affine offene Mengen $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_{X_V{}^h}(V \cap U)$ die algebraische Abschließung von $\mathcal{O}_X(U)$ in $\mathcal{O}_{X_V^\wedge}(V \cap U)$.*

Folglich ist $X_V{}^h$ der Raum V, versehen mit der Garbe der längs V formal holomorphen *und algebraischen* Funktionen.

Ist (A, V) ein beliebiges Henselsches Paar, so bezeichnen wir das Henselsche

Schema $(\operatorname{Spec}(A))_V{}^h$ mit $\operatorname{Henspec}(A, V)$ und nennen diesen Raum das *Henselsche Spektrum* des Paares (A, V).

„Henspec" definiert einen kontravarianten Funktor der Kategorie der Henselschen Paare in die Kategorie der Henselschen geometrischen Räume; Räume vom Typ $\operatorname{Henspec}(A, V)$ nennen wir *affine Henselsche Schemata*. Jedes Henselsche Schema ist lokal affin in diesem Sinne.

Umgekehrt erhält man einen Funktor der Kategorie der Henselschen geometrischen Räume in die Kategorie der Henselschen Paare, indem man dem Raum X das Paar $(A(X), V(X))$ zuordnet, $A(X) =:$ Ring der globalen Schnitte von X, $V(X) =: V(\mathcal{N}_X(X))$. Analog zum Fall der gewöhnlichen Schemata gilt:

7.1.2.4. Satz. *Der Funktor* „Henspec" *definiert eine volle treue Einbettung der dualen Kategorie der Henselschen Paare in die Kategorie der Henselschen geometrischen Räume, rechtsadjungiert zu dem Funktor $X \mapsto (A(X), V(X))$, d. h., ist (A, V) ein Henselsches Paar, X ein Henselscher lokal geringter Raum, so ist* $\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Henspec}(A, V)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}((A, V), (A(X), V(X)))$ *(induziert durch den Morphismus der Strukturgarben).*

Beweis. Es genügt, eine inverse Abbildung zu der oben angegebenen kanonischen Abbildung zu definieren. Ist $h: (A, V) \to (A(X), V(X))$ ein Morphismus der entsprechenden Paare, so wird zunächst eine stetige Abbildung $\underline{p}: \underline{X} \to V$ induziert, da es eine kanonische stetige Abbildung $\underline{X} \to V(X)$ gibt $(x \in X \mapsto m_{X,x} \cap A(X))$.

Jede offene Teilmenge von V ist von der Form $U \cap V$, U eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$, und es gibt eine kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U) \to \mathcal{O}_X(\underline{p}^{-1}U)$ (da alle in $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)$ umkehrbaren Elemente bei der Abbildung $A \to A(X) \to \mathcal{O}_X(\underline{p}^{-1}U)$ in Einheiten übergeführt werden). Diese läßt sich eindeutig auf die Henselsche Abschließung der Ringe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)$ und dann auf die assoziierte Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Henspec}(A)} \to \mathcal{O}i_X$ fortsetzen, wobei nach Konstruktion der Abbildung p in den lokalen Ringen lokale Morphismen induziert werden. Man überzeugt sich leicht, daß man auf diese Wese eine zu

$$\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Henspec}(A, V)) \to \operatorname{Hom}((A, V), (A(X), V(X)))$$

inverse natürliche Transformation erhält, q.e.d.

7.1.3. Quasikohärente Moduln über Henselschen Schemata

Analog zum Fall affiner Schemata gilt:

7.1.3.1. Satz. *Es gibt einen vollen, treuen, mit endlichen projektiven Limites vertauschbaren Funktor $E \mapsto E^\sim$ der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der Modulgarben des geometrischen Raumes $X = \operatorname{Henspec}(A, V)$, linksadjungiert zum Funktor der globalen Schnitte, so daß für offene Teilmengen der Form $U = X_f = \{x \in X;\, f(x) \neq 0\}$ $(f \in A)$*

$$(*) \qquad E^\sim(U) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_A E = (A_f)^h \otimes_A E$$

((A, V) ein Henselsches Paar) gilt.

Beweis. Da die offenen Mengen der Form X_f eine Basis bilden, genügt es zu zeigen, daß durch $(*)$ eine Garbe definiert wird. Zunächst ist klar, daß durch $(*)$ eine Prägarbe definiert wird, und man überzeugt sich leicht, daß das eine separierte

Prägarbe ist, da für jede Überdeckung (U_i) von $U = X_f$ mit $U_i = X_{f_i}$ der Homomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to \prod_i \mathcal{O}_X(U_i)$ treuflach ist. (Man kann sich immer auf die Betrachtung endlicher derartiger Überdeckungen beschränken, da diese ein konfinales Teilsystem des Systems aller Überdeckungen bilden.) Es genügt zu zeigen, daß die Abbildung $E \to E^\sim(X)$ surjektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen: Ist (U_i) eine endliche Überdeckung von X, $U_i = X_{f_i}$, $U_{ij} =: U_i \cap U_j$, so ist das Diagramm

$$E \to \prod E^\sim(U_i) \rightrightarrows \prod E^\sim(U_{ij})$$

$$\left(E^\sim(U_i) =: E \otimes_A (A_{f_i})^h,\ E^\sim(U_{ij}) =: E \otimes_A (A_{f_if_j})^h\right)$$

exakt.

Da A induktiver Limes der Henselschen Abschließungen aller endlich erzeugten Unterringe ist und lim-ind exakt ist sowie mit Tensorprodukten vertauschbar, kann man folgendes voraussetzen:

1. A ist Henselsche Abschließung eines endlich erzeugten Ringes.
2. E ist ein endlich erzeugter A-Modul und besitzt daher eine Kompositionsreihe endlicher Länge mit Faktoren, die zu Restklassenringen der Form A/P (P Primideal) isomorph sind.

Es gilt ferner: Ist $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ exakt und sind $E'^\sim$, $E''^\sim$ Garben, so ist auch $E^\sim$ eine Garbe. Denn ist $E^{+\sim}$ die zu $E^\sim$ assoziierte Garbe, so hat man folgendes Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'^\sim(X) \arrow[r] & E^{+\sim}(X) \arrow[r] & E''^\sim(X) &
\end{tikzcd}$$

und daraus folgt

$$E^{+\sim}(X) = E.$$

Also genügt es daher, zu zeigen: Ist A ein Integritätsbereich, der die Henselsche Abschließung eines endlich erzeugten Ringes in einer abgeschlossenen Teilmenge $V = V(J)$ seines Spektrums ist, so wird durch

$$V_f \mapsto (A_f)^h =: \text{Henselsche Abschließung von } A_f \text{ in } V_f = V \cap D(f)$$

eine Garbe definiert ($f \in A$). Wir bemerken dazu, daß $(A_f)^h$ die algebraische Abschließung von A_f in $\hat{A}_f$ ($= JA_f$-adische Komplettierung) ist.

Es seien $f_1, \ldots, f_n$ Elemente aus A, so daß die $V_i =: V \cap D(f_i)$ eine Überdeckung von V bilden. Weiter sei $A_i =: (A_{f_i})^h$, $A_{ij} = (A_{f_if_j})^h$, und t_i seien Elemente aus A_i, so daß t_i und t_j dasselbe Bild in A_{ij} haben. Wegen

$$A_i/J^mA_i = (A/J^m)_{f_i}, \qquad A_{ij}/J^mA_{ij} = (A/J^m)_{f_if_j},$$

definieren die t_i dann für jedes m einen eindeutig bestimmten Schnitt a_m auf $\operatorname{Spec}(A/J^m)$, also ein Element $a \in A^\wedge$, so daß a und t_i in $A^\wedge_{f_i}$ gleich sind. Daraus folgt aber, daß a algebraisch über $A^\wedge$ und somit aus A ist.

Damit ist gezeigt, daß E eine Garbe ist. Da $(A_f)^h$ flach über A ist, folgt daraus, daß $E \mapsto E^\sim$ mit endlichen projektiven Limites vertauschbar ist. Ist F eine Modulgarbe auf X, so ist $F(X_f)$ ein A_f^h-Modul, also definiert jeder Homomorphismus $E \to F(X)$ einen Homomorphismus $E^\sim \to F$, so daß

$$\operatorname{Hom}_X(E^\sim, F) \simeq \operatorname{Hom}_A(E, F(X))$$

(durch den Funktor „globale Schnitte“) gilt, q.e.d.

Bekanntlich wird für affine Schemata jede quasikohärente Modulgarbe durch den Modul ihrer globalen Schnitte definiert. Dies hängt mit der Frage zusammen, ob die erste Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ verschwindet.

7.2. Globale Darstellung Henselscher Schemata durch algebraische Räume

Jedes Henselsche Schema ist nach Definition lokal Henselisierung eines Schemas in einem abgeschlossenen Unterschema. Es ergibt sich also die Frage, ob das schon global gilt. Hier stößt man jedoch in der Kategorie der Schemata auf Schwierigkeiten.

Wenn man zur größeren Kategorie, der Kategorie der algebraischen Räume übergeht, läßt sich eine Antwort finden. Wir wollen zu diesem Zweck die Henselisierung eines algebraischen Raumes in einem abgeschlossenen Unterraum definieren. Der Begriff des Henselschen algebraischen Raumes ist aus Kapitel 6 bekannt.

7.2.1. Definition. Es sei X ein algebraischer Raum, Y ein abgeschlossener Unterraum, definiert durch eine Idealgarbe J von $\mathcal{O}_X$. Es sei

$$X_Y{}^h =: \operatorname{Spec}_X(\mathcal{O}_X)_J{}^h;$$

dabei ist $(\mathcal{O}_X)_J{}^h$ die *Henselisierung* der Garbe $\mathcal{O}_X$ im Ideal J.

Man überlegt sich nun leicht, daß X^h ein Henselscher algebraischer Raum ist und daß der Funktor, der jedem algebraischen Raum seine Henselisierung zuordnet, im wesentlichen die Eigenschaften hat, wie der entsprechend in 7.1. definierte Funktor.

7.2.2. Bemerkung. *Es sei X ein Schema, V ein abgeschlossenes Unterschema. Dann ist $X_V{}^h = \operatorname{Spec}_X(\mathcal{O}_X)_V{}^h$. Die Einschränkung der Definition* 7.2.1. *auf die Kategorie der Schemata liefert also die in* 7.1. *gebene entsprechende Definition.*

7.2.3. Satz. *Jeder quasikompakte lokal Noethersche Henselsche algebraische Raum ist Henselisierung eines algebraischen Raumes in einem abgeschlossenen Unterraum.*

7.2.4. Korollar. *Jedes quasikompakte lokal Noethersche Henselsche Schema ist Henselisierung eines algebraischen Raumes in einem abgeschlossenen Unterraum.*

Da in der Kategorie der algebraischen Räume Quotienten bezüglich etaler Äquivalenzrelationen existieren, genügt es, um 7.2.3. zu beweisen, das Korollar zu beweisen.

Beweis des Korollars. Da X ein Henselsches Schema ist, existiert eine Überdeckung U_i von X, und für $U = \coprod U_i$ gilt $U = T_V{}^h$ (T ein affines Schema, $V \subseteq T$

ein abgeschlossenes Unterschema). Wir haben somit einen surjektiven Etalmorphismus

$$\begin{tikzcd} R = T_V{}^h \times_X T_V{}^h \rightrightarrows T_V{}^h \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & X. \\ T \end{tikzcd}$$

Es kommt nun darauf an (evtl. durch Abänderung von T durch strenge Etalumgebungen) eine Etaläquivalenzrelation $R' \rightrightarrows T$ zu finden mit $R' \times_{T\times T} T_V{}^h \times T_V{}^h = R$. Wir haben hier also ein Abstiegsproblem zu lösen. Das bedeutet, wenn R etwa durch die Idealgarbe $J \subseteq \mathcal{O}_{T_V{}^h \times T_V{}^h}$ definiert ist und wir das Urbild J_0 von J bezüglich des Morphismus

$$\mathcal{O}_{T\times T} \to (\pi \times \pi)_* \mathcal{O}_{T_V{}^h \times T_V{}^h}$$

bilden, daß

$$J_0(\pi \times \pi)_* \mathcal{O}_{T_V{}^h \times T_V{}^h} = (\pi \times \pi)_* J$$

ist. Das läuft aber auf die Frage hinaus, wann ein Ideal in einem Ring R', der Henselsche Abschließung eines Ringes R in $V(\underline{a})$ ist, schon durch Elemente aus R erzeugt wird.

Nun können wir (nach Voraussetzung) T, V und somit J so wählen, daß J durch ein Ideal $\subset \Gamma(T_V{}^h \times T_V{}^h)$ definiert wird. Da wir Noethersche Schemata vorausgesetzt haben, wird J durch endlich viele Elemente $j_1, \ldots, j_n$ erzeugt. Nun ist klar, daß wir T so wählen können, daß die j_i aus $\Gamma(T \times T)$ sind (da T affin, $\operatorname{Spec}(T_V{}^h) = \text{lim-proj}\, U$, U strenge Etalumgebung). Wir haben somit ein T und ein R' konstruiert (R' definiert durch $j_1, \ldots, j_n$),

$$R' \rightrightarrows T \quad \text{mit} \quad R' \times_{T\times T} T_V{}^h \times T_V{}^h = R.$$

Wir müssen noch zeigen, daß wir $R' \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} T$ als etale Äquivalenzrelation wählen können. Nun wissen wir, daß eine Äquivalenzrelation durch einen Schnitt $s : T \to R'$ (zu beiden Morphismen), eine Abbildung $t : R' \to R'$ mit

$$\varphi \circ t = \psi, \qquad \psi \circ t = \varphi$$

und eine Abbildung $q : R' \times_T R' \to R'$ gegeben ist mit

$$\varphi \circ q = \varphi \circ \mathrm{pr}_1, \qquad \psi \circ q = \psi \circ \mathrm{pr}_2.$$

Etalmorphismen sind lokal durch Funktorisierungen

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda"'] & & T \\ & (T[x]/F)_{F'} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

gegeben, λ eine offene Einbettung.

Wenn das von uns konstruierte Paar $R' \rightrightarrows T$ keine etale Äquivalenzrelation ist, können wir (da $R \rightrightarrows T_V{}^h$ etale Äquivalenzrelation ist) T noch durch eine strenge Etalumgebung ersetzen:

Existenz des Schnittes. Es sei $B = \Gamma(T)$, R' durch $J' \subseteq B \times B$ definiert, $s : B \times B \to B$ die kanonische Projektion. Wir müssen zeigen, daß $J' \subseteq \operatorname{Kern}(s)$ gilt. Nun gilt aber

$$J' \cdot B^h \subseteq \operatorname{Kern}(B^h \times B^h \to B^h),$$

da bei $R \rightrightarrows T_V{}^h$ ein entsprechender Schnitt existiert, und somit erhalten wir den Schnitt durch Verkleinerung der Etalumgebung.

Analog geht man beim Nachweis der Existenz von t und q vor. Um die Eigenschaft „etaliert" für die entsprechenden Morphismen nachzuweisen, muß man T erneut evtl. durch eine strenge Etalumgebung ersetzen. Wir haben ja lokal eine Funktorisierung

$$\begin{tikzcd} B^h \arrow[r] \arrow[dr] & B^h \times B^h \arrow[r] & B^h \times B^h/J \\ & (B^h[T]/F)_{F'} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Wenn wir nun eine strenge Etalumgebung von B so wählen, daß die Koeffizienten von F und t darin liegen, so erhalten wir eine entsprechende Funktorisierung. Wegen der Quasikompaktheit von X können wir die gemachten Betrachtungen globalisieren. Wir haben also folgendes erreicht:

$$\begin{tikzcd} R \rightrightarrows T_V{}^h \arrow[r] \arrow[d] & X \\ R' \rightrightarrows T \end{tikzcd}$$

(1) $R' \rightrightarrows T$ ist etale Äquivalenzrelation (das folgt aus der Konstruktion von R' und daraus, daß $R \rightrightarrows T_V{}^h$ eine etale Äquivalenzrelation ist).

(2) $R = R' \times_{T\times T} T_V{}^h \times T_V{}^h$.

Es sei nun Q der durch $R' \rightrightarrows T$ definierte algebraische Raum, Q_0 der durch $V \subseteq T$ definierte abgeschlossene Unterraum. Dann ist $T_V{}^h = \operatorname{Spec}_T i^*(\mathcal{O}_Q)^h_{Q_0}$ $(i : T \to Q)$, und somit (nach Konstruktion von Spec_Q) ist $\operatorname{Spec}_Q(\mathcal{O}_Q)^h_{Q_0} = X$. Nun ist aber nach Definition $\operatorname{Spec}_Q(\mathcal{O}_Q)^h_{Q_0} = Q^h_{Q_0}$, und somit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen abschließend darauf hinweisen, daß das analoge Problem in der Kategorie der formalen Schemata sehr viel schwieriger ist. Man sieht sofort, daß die hier angestellten Betrachtungen nicht übertragen werden können.

7.3. Abgeschlossene Einbettungen

7.3.1. Strenge Epimorphismen in den Kategorien K und H

Wir betrachten eine Kategorie C, die dann im folgenden jeweils die Kategorie K aller Paare (A, V) bzw. ihre Unterkategorie H aller Henselschen Paare sein wird. Zunächst erinnern wir an eine bekannte Definition.

7.3.1.1. Definition. Es sei $(f : A \to B) \in Fl(C)$ ein Epimorphismus. f heißt *strenger Epimorphismus*, wenn sich für $(u : A \to C) \in Fl(C)$ u genau dann über f faktorisieren läßt, wenn für alle $D \in C$ sowie $v_1, v_2 \in \mathrm{Hom}_C(D, A)$ mit $fv_1 = fv_2$ stets $uv_1 = uv_2$ gilt.

Wir bemerken, daß in der Kategorie (Ann) die strengen Epimorphismen genau die surjektiven Ringhomomorphismen sind.

7.3.1.2. *Ein Morphismus $\big(f : (A, V) \to (B, W)\big) \in Fl(C)$ ist genau dann strenger Epimorphismus in der Kategorie aller Paare bzw. aller Henselschen Paare, wenn f als Ringhomomorphismus surjektiv und $W =$ (Spec $f)^{-1} V$ ist.*

Beweis. Es sei $V = V(a)$, $W = V(b)$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\big(D, V(d)\big) \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_2"'] & \big(A, V(a)\big) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u"'] & \big(B, V(b)\big) \arrow[d, dashed] \\
& & \big(C, V(c)\big)
\end{tikzcd}$$

das uns als Gedächtnisstütze dienen soll. Der Beweis wird zunächst in der einen Richtung geführt.

($\Rightarrow$) Es sei f strenger Epimorphismus. Dann betrachten wir den durch f induzierten Morphismus

$$u : (A, V) \to \big(f(A), V(f(a))\big).$$

Nun haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(A, V) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & (B, W) \arrow[dl, dashed, shift right, "k"'] \\
& \big(f(A), V(f(a))\big) \arrow[ur, shift right, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

und trivialerweise folgt aus $fv_1 = fv_2$ stets $uv_1 = uv_2$. Daher existiert nach Voraussetzung ein Morphismus k, für den das Diagramm ebenfalls kommutativ ist; j bezeichnet den kanonischen Morphismus. Es ist nun $k \circ j = 1_{f(A)}$ (da u surjektiv ist) und $j \circ k = 1_B$, da f Epimorphismus ist. Also ist auch f surjektiver Ringhomomorphismus und $V(b) = V(aB)$. Wir bemerken noch, daß $\big(f(A), V(f(a))\big)$ Henselsch ist, wenn (A, V) Henselsch ist.

($\Leftarrow$) Wir haben nun zu zeigen, daß die Morphismen von diesem Typ strenge Epimorphismen sind; es sei also f surjektiv und $V(b) = V(aB)$, u beliebig. Wir definieren dann $k : \big(B, V(b)\big) \to \big(C, V(c)\big)$ durch $k(\underline{b}) = u(\underline{a})$ für ein beliebiges Element $\underline{b} \in B$ und $\underline{b} = f(\underline{a})$. Zum Beweis unserer Behauptung haben wir nur noch zu zeigen, daß diese Zuordnung von den Repräsentanten unabhängig ist. Es seien $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in A$ und

$f(\underline{a}_1) = f(\underline{a}_2)$. Die Ringhomomorphismen v_i seien gegeben durch

$$v_i : \big(Z[X], V(0)\big) \to \big(A, V(a)\big),$$
$$X \longmapsto \underline{a}_i$$

für $i = 1, 2$. Dann ist das linke Paar trivialerweise Henselsch, und es gilt $fv_1 = fv_2$, also nach Voraussetzung $uv_1 = uv_2$, d. h. $u(\underline{a}_1) = u(\underline{a}_2)$, q.e.d.

7.3.1.3. *Der Funktor „Henselsche Abschließung" überführt strenge Epimorphismen in strenge Epimorphismen.*

Beweis. $f : \big(A, V(a)\big) \to \big(B, V(b)\big)$ sei strenger Epimorphismus in K. Aus der Linksadjungiertheit der Henselschen Abschließung zum Inklusionsfunktor folgt zunächst, daß f^h Epimorphismus ist. Es sei $u : \big(A^h, V(aA^h)\big) \to \big(C, V(c)\big)$ ein Morphismus in H, und aus $f^h v_1 = f^h v_2$ folge stets $uv_1 = uv_2$. Nach 7.3.1.2. ist f surjektiv, läßt sich also über $u \circ i$ fortsetzen:

$$\begin{tikzcd}
\big(Z[X], V(0)\big) \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_2"'] & \big(A, V(a)\big) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \big(B, V(b)\big) \arrow[d, "j"'] \arrow[dd, dashed, bend left, "s'"] \\
& \big(A^h, V(aA^h)\big) \arrow[r, "f^h"] \arrow[dr, "u"'] & \big(B^h, V(bB^h)\big) \\
& & \big(C, V(c)\big),
\end{tikzcd}$$

wobei $s'(\underline{b}) =: u \circ i(\underline{a})$ gesetzt wird für ein $\underline{a}$ mit $f(\underline{a}) = \underline{b}$. Die Repräsentantenunabhängigkeit dieser Definition folgt wie unter 7.3.1.2., und offenbar ist $s =: s'^h$ ein Morphismus mit $s \circ f^h = u$, q.e.d.

7.3.1.4. Bemerkung. *Es sei X ein Henselsches Schema; jede quasikohärente Idealgarbe J von $\mathcal{O}_X$ definiert dann ein abgeschlossenes Henselsches Unterschema Y von X.*

Wir erhalten daraus eine einfache Schlußfolgerung.

7.3.1.5. *Abgeschlossene Einbettungen sind genau diejenigen Morphismen, für die jeder Punkt von X eine affine Umgebung besitzt, in der sie durch strenge Epimorphismen Henselscher Paare induziert werden.*

Wir betrachten nun (ν)-Umgebungen Henselscher Schemata. Henselsche Schemata haben die folgende einfache Eigenschaft: Ist $U = \mathrm{Henspec}\big(A, V(a)\big)$ eine offene affine Teilmenge von X, so ist die quasikohärente Idealgarbe $\mathcal{N}_X$ auf U durch $\sqrt{a}^{\sim h}$ gegeben.

Wir wollen von nun an stets die Klasse der Paare (X, L) betrachten, X ein Henselsches Schema, für das L eine quasikohärente Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$ mit der Eigenschaft $\sqrt{L} = \mathcal{N}_X$ ist. Wir wollen (X, L) auch ein Henselsches Paar nennen.

7.3.1.6. Definition. Es sei (X, L) ein Henselsches Paar; das durch die Idealgarbe L definierte abgeschlossene Unterschema von X (das auch mit $(X, L)_{(\nu)}$ bezeichnet werden soll) heiße die *(ν)-Umgebung von (X, L)*.

Wenn über die Idealgarbe L von vornherein Klarheit besteht, so schreiben wir einfach $X_{(\nu)}$, „(ν)-Umgebung von X" usw.

7.3.1.7. Bemerkung. *Jede (ν)-Umgebung eines Henselschen Schemas ist ein Schema.*

Die Frage ist lokal; ist $X = \operatorname{Henspec}(A, V(a))$, so ist

$$X_{(\nu)} = \operatorname{Henspec}(A/a^\nu, V(0)) \simeq \operatorname{Spec} A/a^\nu .$$

Wir führen nun in der Klasse der Paare (X, L) eine Äquivalenzrelation ein.

7.3.1.8. Definition. Die Henselschen Paare (X, L) und (X', L') heißen *(ν)-äquivalent*, wenn ihre (ν)-Umgebungen isomorph sind. Sie heißen *formal äquivalent*, wenn für hinreichend große Zahlen ν stets eine (ν)-Äquivalenz existiert, die sich zu einer $(\nu + k)$-Äquivalenz fortsetzen läßt für alle $k \in N$.

Wir bemerken, daß eine formale Äquivalenz in diesem Sinne stets einen Isomorphismus der entsprechenden formalen Schemata induziert.

Es läßt sich keineswegs behaupten, daß eine (ν)-Äquivalenz stets eine $(\nu+1)$-Äquivalenz induziert. Unter gewissen Voraussetzungen für die Idealgarbe L (die wir auch Definitionsidealgarbe nennen wollen) induziert jedoch eine (ν)-Äquivalenz mit $\nu \geqq 2$ stets eine $(\nu - 1)$-Äquivalenz. Dafür zeigen wir zunächst:

7.3.1.9. *Es seien A, B Ringe $\operatorname{Spec}(A) \xrightarrow{\sim} U \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ sei ein offenes Unterschema. Ist $g \in B$ mit $D(g) \subseteq U$, so ist $D(g) \simeq D(f) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ für ein $f \in A$ (d. h. $B_g \simeq A_f$).*

Beweis. Ist $g' \in B^\sim(U)$ das Bild von g, so ist $D(g) = \{x \in U, g_x' \text{ Einheit}\}$. Ist nun $f \in A$ das Element, das g beim Isomorphismus $U \simeq \operatorname{Spec}(A)$ entspricht, so ist $D(g) \simeq D(f)$.

7.3.1.10. *Wir verwenden nun als Definitionsidealgarbe jeweils $\mathcal{N}_X$. X, X' seien (ν)-äquivalente Henselsche Schemata. Dann sind X und X' (k)-äquivalent für alle natürlichen Zahlen $1 \leqq k \leqq \nu$, und die (k)-Äquivalenz ist durch die Kommutativität des Diagramms*

$$\begin{tikzcd} X_{(\nu)} \arrow[r, "\sim"] & X'_{(\nu)} \\ X_{(k)} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & X'_{(k)} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

bereits eindeutig bestimmt.

Beweis. Das Problem ist lokal, und nach 7.3.1.9. können wir uns auf den Fall $X = \operatorname{Henspec}(A, V(a))$, $X' = \operatorname{Henspec}(A', V(a'))$ beschränken, wobei a und a' Semiprimideale sind. Da nun A/a und A'/a' reduzierte Ringe sind, können wir die gegebene (ν)-Äquivalenz auf eindeutige Weise zu einem Morphismus f fortsetzen, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} A/a^\nu \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads, "p"] & A'/a'^\nu \arrow[d, two heads, "p'"] \\ A/a \arrow[r, "f", "\sim"'] & A'/a' \end{tikzcd}$$

Nun ist aber $a/a^\nu = \ker p \simeq \ker p' = a'/a'^\nu$, also $a^k/a^\nu \simeq a'^k/a'^\nu$, d. h.

$$A/a^k \simeq A/a^\nu/a^k/a^\nu \simeq A'/a'^\nu/a'^k/a'^\nu \simeq A'/a'^k ,$$

woraus die Behauptung folgt.

7.3.1.11. *Es seien (X, L) und (X', L') zwei Henselsche Paare, die (ν)-äquivalent sind. Dann induziert diese (ν)-Äquivalenz auf eindeutige Weise eine (ν)-Äquivalenz der Paare $(X, \mathcal{N}_X)$ und $(X', \mathcal{N}_{X'})$.*

Die Eindeutigkeit ist wieder im obigen Sinne zu verstehen. Der Beweis ist klar.

7.4. Henselsche Schemata über einem fixierten Grundkörper

Es sei k ein beliebiger Körper. Hier betrachten wir nur Henselsche Schemata über k und k-Morphismen. Unser besonderes Interesse gilt nun den Unterkategorien, die durch Objekte vom folgenden Typ gebildet werden.

7.4.1. Henselsche Schemata lokal von endlichem Typ

7.4.1.1. Definition. Ein Henselsches Schema X über k heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, die zur Henselschen Abschließung eines affinen Schemas von endlichem Typ über k in einem abgeschlossenen Unterschema ist. Ist überdies noch X quasikompakt, so nennen wir X *von endlichem Typ* über k.

In völliger Analogie zur Schematheorie gilt der folgende Satz:

7.4.1.2. Satz. *Ist das Henselsche Schema X lokal von endlichem Typ über k, so ist die Menge der abgeschlossenen Punkte sehr dicht in X, d. h., jede offene Menge ist bereits durch ihre abgeschlossenen Punkte eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Aussage ist von lokaler Art, und für $X = \operatorname{Henspec}(A^h, V^h)$ und A/k von endlichem Typ ist $A/a \simeq A^h/aA^h$ für ein beliebiges Ideal a von A mit $V = V(a)$. Als topologischer Raum ist nun $\underline{X} \simeq \operatorname{Spec}(A/a)$, womit die Behauptung auf den analogen Satz über Schemata zurückgeführt ist (Hilbertscher Nullstellensatz).

Wir brauchen nun einige spezielle Eigenschaften Henselscher Ringe, deren Globalisierung uns einen wichtigen Satz liefern wird.

7.4.1.3. Hilfssatz. *Es sei R ein Ring, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ Unbestimmte, $A = R[X]$, J das von $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte Ideal in A. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $P_i \in J$ mit $P_i \equiv X_i \bmod J^2$ gegeben. Dann ist der kanonische Morphismus*

$$R\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \to R\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$$

Isomorphismus.

7.4.1.4. Hilfssatz. *Es sei R ein Ring, $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ eine R-Algebra von endlichem Typ. Ferner sei $J = (x_1, \ldots, x_n)\,A$. Wird nun der A-Modul J/J^2 durch $p_1, \ldots,$*

$p_k \in J$ erzeugt, so ist der kanonische Morphismus

$$R\langle p_1, \ldots, p_k\rangle \to R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$$

strenger Epimorphismus in H und $p_1, \ldots, p_k$ erzeugen $(x_1, \ldots, x_n)$.

Die Hilfssätze 7.4.1.3. und 7.4.1.4. ergeben den folgenden Satz:

7.4.1.5. Satz. *Es seien (X, L) und (X', L') Henselsche Schemata, die über k lokal von endlichem Typ sind. Ist $f: X \to Y$ ein Morphismus, der eine (ν)-Äquivalenz von X und X' mit $\nu \geqq 2$ induziert, dann ist f eine abgeschlossene Einbettung Henselscher Schemata.*

Wir weisen darauf hin, daß hier erstmalig ein wesentlicher Unterschied zwischen der Theorie der Schemata und der der Henselschen Schemata auftritt.

7.4.2. Singularitätenfreie Henselsche Schemata

Wir betrachten wiederum nur Henselsche Schemata, die lokal von endlichem Typ über k sind. Für ein solches Henselsches Schema X definieren wir

7.4.2.1. Definition. Es sei $x \in X$.

(i) x heißt *regulär*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ regulärer lokaler Ring ist.

(ii) x heißt *nichtsingulär*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ geometrisch regulär ist, d. h., für alle Erweiterungskörper K von k ist der Ring $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k K$ regulär.

Sind diese Eigenschaften für alle Punkte von X erfüllt, so nennen wir X *regulär* bzw. *singularitätenfrei*.

Diese Definition entspricht genau der altbekannten für Schemata. Es wird sich zeigen, daß sich auch alle „guten" Eigenschaften singularitätenfreier Schemata für Henselsche Schemata beweisen lassen. Wir erinnern uns zunächst an den bekannten Satz, daß die nichtsingulären Punkte eines Schemas (lokal von endlichem Typ über k) eine offene Menge bilden.

7.4.2.2. Bemerkung. *X sei singularitätenfrei. Dann läßt sich X in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes als Henselsche Abschließung eines singularitätenfreien Schemas in einem abgeschlossenen Unterschema darstellen.*

Beweis. Es sei $X = Y_W{}^h$, $Y \in$ (Sch) und Y/k l.v.e.T. („lokal von endlichem Typ"). Dann ist Y in den Punkten von W geometrisch regulär, denn es gilt $A^h \otimes_k K = (A \otimes_k K)^h$ für jede k-Algebra A, und ein Ring A' ist genau dann regulär in den Punkten von $V' \subseteq \operatorname{Spec}(A')$, V' abgeschlossene Teilmenge, wenn seine Henselsche Abschließung in V' ein regulärer Ring ist. Nun existiert nach dem zitierten Satz eine offene singularitätenfreie Teilmenge U von Y mit $W \subseteq U$, und es ist trivialerweise $X = Y_W{}^h = U_W{}^h$, q.e.d.

Unmittelbar klar ist auch

7.4.2.3. Satz. *Die nichtsingulären Punkte von X bilden eine offene Menge.*

Wir erinnern uns daran, daß die Singularitätenfreiheit eines Schemas gleichbedeutend damit war, daß sein Strukturmorphismus glatt ist. Insbesondere ist dann die Garbe $\Omega_X{}^1$ der Differentialformen lokal frei von endlichem Rang, der jeweils gleich der Dimension der entsprechenden Komponente von dem betrachteten Schema war. Es gilt

7.4.2.4. Bemerkung. *Das betrachtete Henselsche Schema X/k sei singularitätenfrei. Dann wird der Strukturmorphismus $X \to \operatorname{Spec}(k)$ lokal durch einen Schemamorphismus der Form*

$$U \xrightarrow{q} A_k{}^n \to \operatorname{Spec}(k)$$

induziert, wobei q Etalmorphismus ist,

$$A_k{}^n = \operatorname{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]).$$

Wir wollen nun stets mit $\omega^1_{B/k}$ den universellen Differentialmodul einer k-Algebra B bezeichnen.

7.4.2.5. Definition. *X/k sei ein Henselsches Schema. Als Garbe der Differentialformen* auf X bezeichnen wir die zur Prägarbe

$$U \to \omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/k}$$

assoziierte Garbe $\Omega_X{}^1$; ihr Dual θ_X nennen wir *Garbe der Vektorfelder* auf X.

Eine leichte Rechnung mit der Universaleigenschaft des Differentialmoduls (Vertauschbarkeit mit induktiven Limites) zeigt sofort

7.4.2.6. $\Omega^1_{X,x} = \omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$ *für alle $x \in X$.*

7.4.2.7. Bemerkung. *Ist $j: Z = X_V{}^h \hookrightarrow X$ der kanonische Morphismus des Henselschen Schemas Z in das Schema X, dann gilt*

$$j^* \Omega_X{}^1 = \Omega_Z{}^1.$$

Diese Bemerkung ist schon in **3.7.2.** bewiesen worden.

Hieraus folgt unmittelbar:

7.4.2.8. Bemerkung. *Das Henselsche Schema X/k sei singularitätenfrei. Dann ist die Garbe der Differentialformen auf X stets lokal frei.*

7.4.3. Eine lokale Fortsetzbarkeitseigenschaft der (ν)-Äquivalenz

Die wichtigsten Resultate dieses Abschnitts werden wesentlich darauf beruhen, daß wir die betrachteten Henselschen Schemata als singularitätenfrei voraussetzen. Zunächst geben wir für ein beliebiges Schema oder Henselsches Schema die folgende Definition:

7.4.3.1. Definition. X heißt *rein n-dimensional*, wenn die Halme der Strukturgarbe von X in allen abgeschlossenen Punkten n-dimensionale Ringe sind.

Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaft wollen wir uns an einige bekannte Tatsachen erinnern: Ist X ein reguläres Schema, dann stimmen die Zusammenhangskomponenten von X mit seinen irreduziblen Komponenten überein. Dann ist X auf jeder dieser Komponenten reindimensional; denn sei einmal X zusammenhängend, so ist es ein reguläres Integritätsschema v.e.T. über k, und daher ist nach einem bekannten Satz die Kodimension jedes abgeschlossenen Punktes gleich dem

Transzendenzgrad von $k(X)$ über k, also konstant. Wenn wir nun einen Ring A in der abgeschlossenen Teilmenge V von $\mathrm{Spec}(A)$ Henselsch abschließen, dann bleibt in den Punkten von V die Kodimension erhalten, und daher überträgt sich unsere Betrachtung sofort auch auf Henselsche Schemata.

7.4.3.2. Satz. *Es sei X/k l.v.e.T. ein singularitätenfreies Schema, V ein abgeschlossenes Unterschema von X, das durch die quasikohärente Idealgarbe L definiert werde. Weiter sei (X, L) (ν)-äquivalent zu einem Schema (X', L') und $\nu \geqq 2$, ferner $U \to X$ eine strenge Etalumgebung von V und x ein beliebiger Punkt von V. Wenn wir dann die betrachteten Schemata auf eine hinreichend kleine offene Umgebung von x beschränken, so gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Es existieren eine strenge Etalumgebung $U' \to X'$ von $V' = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/L')$ und ein Schemamorphismus $f: U' \to U$, der die vorgegebene (ν)-Äquivalenz respektiert.*

(ii) *Der durch f induzierte Morphismus*
$X_V{}^h \to X'_{V'}{}^h$
Henselscher Schemata ist eine abgeschlossene Einbettung.

Wir bemerken zunächst, daß jede (ν)-Äquivalenz sich auf beliebige strenge Etalumgebungen überträgt. Wenn wir nun noch den Satz 7.4.1.6, beachten, ist (ii) eine unmittelbare Konsequenz von (i); dieser Punkt bleibt also zu zeigen.

Beweis. Zunächst überträgt sich die Singularitätenfreiheit von X sofort auch auf U, und $(U, L \cdot \mathcal{O}_U)$ ist (ν)-äquivalent zu (X', L'). Wir können also von vornherein $U = X$ setzen. Nun wird in einer hinreichend kleinen offenen Umgebung von x der Strukturmorphismus induziert durch einen Ringhomomorphismus der Form

$$k \to B = k[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{p} A$$

(o.B.d.A. $X = \mathrm{Spec}(A)$), wobei $\mathrm{Spec}(p)$ etaliert ist, d. h., es existiert ein normiertes Polynom $f \in B[T]$ mit $f' \neq 0$, so daß

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(A) \arrow[rr, hook, "\text{offene Einbettung}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}\big(\underbrace{(B[T]/fB[T])_{f'}}_{C}\big) \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}(B) &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist (wobei man eventuell noch zu einer offenen affinen Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ übergehen muß). Es sei nun L durch das Ideal J von A definiert. Es existiert nun ein $g \in C$, dessen Einschränkung auf $\mathrm{Spec}(A)$ (dies sei $\mathfrak{g}$) eine offene Teilmenge $D(\mathfrak{g})$ von $\mathrm{Spec}(A)$ definiert, die x enthält, und es ist $A_{\mathfrak{g}} = C_g$. Also ist

$$C_g = \big((k[T_1, \ldots, T_n, T]/f \cdot k[T_1, \ldots, T_n, T])_{f'}\big)_g$$

mit $f \in k[T_1, \ldots, T_n, T]$ und $\dfrac{\partial f}{\partial T} \neq 0$. Die vorgegebene (ν)-Äquivalenz ordnet nun x eindeutig ein $x' \in X'$ zu, und in einer hinreichend kleinen Umgebung von x' können wir nach dem bekannten Schluß (7.3.4.4.) annehmen, daß eine (ν)-Äquivalenz zu dem

affinen Schema $(\mathrm{Spec}(C'), J'^{\sim})$ vorliegt, entsprechend dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_g/J^\nu C_g \arrow[r, "\sim"] & C'/J'^\nu \\
C_g \arrow[u, two heads] \arrow[r, dashed, "a"] & C' \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

in dem wir den angedeuteten Morphismus a erst noch konstruieren wollen. Wir werden jedoch sehen, daß es dazu noch nötig ist, C' durch den Koordinatenring einer affinen strengen Etalumgebung von V' zu ersetzen.

Es seien zunächst $T_1', \ldots, T_n' \in C'$ beliebige Repräsentanten der Bildelemente von $T_1, \ldots, T_n$ in C'/J'^ν. Durch die Zuordnung

$$T_i \mapsto T_i'$$

erhalten wir einen Ringhomomorphismus $B \to C'$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_g/J^\nu C_g \arrow[rr, "\sim"] & & C'/J'^\nu \\
& B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C_g \arrow[uu, two heads] & & C' \arrow[uu, two heads]
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Es sei $t \in C_g$ dasjenige Element, das durch T induziert wird. Dann ist also $f \in B[T]$, und in C_g gilt $f(t) = 0$, und $F'(t)$ ist Einheit. Ist nun $t' \in C'$ ein beliebiger Repräsentant des durch die (ν)-Äquivalenz induzierten Bildes von t, dann folgt

$$f(t') \equiv 0 \bmod J'^\nu, \text{ und } f'(t') \text{ ist Einheit mod } J'^\nu.$$

Nun wissen wir (wegen der fundamentalen Eigenschaft Henselscher Ringe), daß die Gleichung $f(T) = 0$ eine Lösung in der Henselschen Abschließung von C' in V' besitzt. Diese jedoch ist der induktive Limes über alle strengen affinen Etalumgebungen von V', d. h., wir können eine strenge Etalumgebung $\mathrm{Spec}(C'') \to \mathrm{Spec}(C')$ von V' angeben, in der diese Gleichung lösbar ist, d. h., es existiert ein $t'' \in C''$ mit $f(t'') = 0$ und $t'' \equiv t' \pmod{J'^\nu}$. Bilden wir nun C''' als den Quotientenring von C'' nach $f'(t'')$, so können wir durch die Zuordnung $t \mapsto t''$ auf natürliche Weise einen B-Algebrahomomorphismus $b: C \to C'''$ angeben, und setzen wir $g' = b(g)$, so erhalten wir einen Morphismus a', der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_g \arrow[r, "a'"] \arrow[d, two heads] & C'''_{g'} \arrow[d, two heads] \\
C_g/J^\nu C_g \arrow[r, "\sim"] & C'''_{g'}/J'^\nu C'''_{g'}
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Damit ist der Beweis unseres Satzes vollendet.

7.4.3.3. Korollar. *Es sei X ein singularitätenfreies Henselsches Schema. Ferner sei X (ν)-äquivalent zu einem Henselschen Schema X', und X und X' seien rein n-dimen-*

sional. Ist nun $\nu \geqq 2$, *so hat jeder Punkt von* X *eine Umgebung, in der* X *und* X' *isomorph sind.*

Der Beweis ist klar; wir betrachten nur den surjektiven Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X',x'}$ für zwei abgeschlossene Punkte x, x', die einander bei der vorgegebenen (ν)-Äquivalenz entsprechen. Sein Kern ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ des regulären, n-dimensionalen Ringes $\mathcal{O}_{X,x}$, und wäre $\mathfrak{p} \neq 0$, so würde nach dem Homomorphiesatz $\dim \mathcal{O}_{X',x'} \leqq n-1$ folgen; dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus dem Satz 7.4.3.2. erhalten wir ein weiteres Korollar:

7.4.3.4. Korollar. *Es seien* (X, L) *und* (X', L') *zwei* (ν)*-äquivalente rein* n*-dimensionale Henselsche Paare,* X *sei singularitätenfrei und* L *umkehrbar. Ist* $\nu \geqq 2$, *dann gilt:*

(i) L' *ist umkehrbar.*

(ii) (X, L) *und* (X', L') *sind* k*-äquivalent für alle natürlichen Zahlen* $1 \leqq k \leqq \nu$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $X = \operatorname{Henspec}(A, V(J))$, $X' = \operatorname{Henspec}(A', V(J'))$, $L = J^{\sim h}$, $L' = J'^{\sim h}$, $X \simeq X'$ mit der (ν)-Äquivalenz verträglich und A, A' reguläre Integritätsbereiche. Betrachten wir das entsprechende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A/J^\nu \arrow[r, "\sim", "f_{(\nu)}"'] & A'/J'^\nu \end{tikzcd}$$

so sehen wir, daß $J'^\nu = (a'^\nu)$ für $a' = f(a)$ ein Hauptideal ist. Dann ist aber J' in dem ZPE-Ring A' umkehrbares Ideal, denn es ist $J'^{-1} = \left(\frac{1}{a'^\nu}\right) J'^{\nu-1}$. Es bleibt also nur noch (ii) zu beweisen. Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A/J^\nu \arrow[r, "f_{(\nu)}"] \arrow[d] & A'/J'^\nu \arrow[d] \\ A/J \arrow[r, "f_{(1)}"] & A'/J' \end{tikzcd}$$

läßt sich konstruieren, wenn aus $a \in J$ folgt, daß $f_{(\nu)}(\bar{a}) \in \bar{J}'$ ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß $J' = (a')$ ist. Ist $J' = (b)$, dann ist wegen $J'^\nu = (a'^\nu)$ eine Gleichung der Form

$$\left(\frac{a'}{b}\right)^\nu - c = 0$$

erfüllt für ein $c \in A$. Da A' normal ist, folgt daraus $(a') \subseteq (b)$ und analog $(b) \subseteq (a')$, q.e.d.

7.5. Monoidale Transformationen

Der Begriff der Aufblasung ist für eine beliebige Unterkategorie der Kategorie der geometrischen Räume definiert, jedoch wissen wir nichts über die Existenz. Wir beweisen sie hier für die Kategorie der Henselschen Schemata. Dazu beginnen wir mit einigen technischen Vorbemerkungen.

7.5.1. *Es sei* X *ein Henselsches Schema,* $J \subseteq \mathcal{O}_X$ *eine quasikohärente Idealgarbe. Dann hat jeder Punkt* $x \in X$ *eine offene Umgebung der Form* $U = \operatorname{Henspec}(A, V)$, *und es gibt ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* A, *so daß* $J/U = \mathfrak{a}^{\sim h}$ *ist.*

7.5.2. Die Existenz der Aufblasung von X in J ist ein lokales Problem, d. h., wenn jeder Punkt von X eine Umgebung besitzt, die sich in J/U aufblasen läßt, dann existiert die Aufblasung von X in J. Eine entsprechende Aussage gilt für den Nachweis der Universaleigenschaft, d. h., um zu zeigen, daß in der Kategorie der X-Objekte Y, für die $J\mathcal{O}_Y$ umkehrbar ist, das Objekt Y' terminal ist, genügt es, für jedes andere Objekt Y eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ anzugeben mit folgender Eigenschaft:

Für jedes der X-Objekte U_i existiert genau ein X-Morphismus $U_i \to Y'$.

7.5.3. *Ist* $j : X = \operatorname{Henspec}(A, V) \to \operatorname{Spec}(A)$ *der kanonische Morphismus und* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von* A, *dann ist*

$$\mathfrak{a}^{\sim h}\mathcal{O}_X = j^*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\sim h}.$$

7.5.4. *Ist* $f : X \to Y$ *ein Schemamorphismus,* $W \subseteq Y$ *abgeschlossen,* $V = f^{-1}W$, *dann ist*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X_V{}^h \arrow[r] \arrow[u] & Y_W{}^h \arrow[u] \end{tikzcd}$$

universell in der Kategorie der Henselschen Schemata.

7.5.5. *Es sei wieder* (A, V) *ein Henselsches Paar,* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal von* A. *Es sei* $X = \operatorname{Spec}(A)$, $p' : Y \to X$ *die Aufblasung von* X' *mit dem Zentrum* $\mathfrak{a}^\sim$ *in der Kategorie der Schemata,* $X = X_V{}'^h$ *und* $W = p'^{-1}V$. *Ist* $p : Z = Y_W{}^h \to X$ *der nach 7.4. induzierte Morphismus Henselscher Schemata, dann ist* $J\mathcal{O}_Z$ *mit* $J = \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_X$ *eine umkehrbare Idealgarbe auf* Z.

Beweis. Wir können o.B.d.A. Y durch ein offenes affines Unterschema der Form $\operatorname{Spec}(B)$ mit $\mathfrak{a}B \simeq B$ ersetzen. Wir erhalten dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(B^h) \arrow[r] & \operatorname{Spec}(B) \arrow[r, "p'"] & \operatorname{Spec}(A) \\ Z = \operatorname{Henspec}(B^h, W^h) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[rr] & & X \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Für geometrische Räume ist es klar, daß für zwei Morphismen

$$X_1 \to X_2 \to X_3$$

und eine Idealgarbe J von $\mathcal{O}_{Y_3}$ stets $J \cdot \mathcal{O}_{Y_1} = (J \cdot \mathcal{O}_{Y_2}) \cdot \mathcal{O}_{Y_1}$ ist. Es sei nun $b = aB$; aus der Flachheit des Adjunktionsmorphismus $B \to B^h$ folgt dann $bB^h \simeq B^h$. Aus 7.5.3. erhalten wir dann die Behauptung, da das inverse Bild umkehrbarer Garben wiederum umkehrbar ist.

7.5.6. *Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei. Ist $f : X_1 = \mathrm{Henspec}(A_1, V_1) \to X$ ein Morphismus Henselscher Schemata, für den $J\mathcal{O}_{X_1} \simeq \mathcal{O}_{X_1}$ ist, dann existiert genau ein X-Morphismus $t : X_1 \to Z$.*

Beweis. f induziert einen Morphismus $f_1 : \mathrm{Spec}(A_1) \to \mathrm{Spec}(A)$ mit $i \circ f = f_1 \circ k$:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "p'"] & \mathrm{Spec}(A) \\
\mathrm{Spec}(A_1) \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[urr, "f_1"'] & Z = Y^h_W \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"] & X = \mathrm{Henspec}(A, V) \arrow[u, "i"'] \\
X_1 = \mathrm{Henspec}(A_1, V_1) \arrow[u, "k"] \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ist $a_1 = aA_1$, so ist $a_1^{\sim h} = J\mathcal{O}_{X_1} \simeq \mathcal{O}_{X_1} = A_1^{\sim h}$; da aber der Funktor ${}^{\sim h}$ eine volle und treue Einbettung ist, folgt daraus $a_1 \simeq A_1$, d. h., es existiert genau ein Schemamorphismus s mit $p's = f_1$, und da Z Faserprodukt in (HSch) ist, gibt es genau einen Morphismus t, der das gesamte Diagramm kommutativ macht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Unsere damit abgeschlossene lokale Konstruktion der Aufblasung in (HSch) und der nach 7.5.2. gerechtfertigte Zusammenklebungsprozeß ergeben:

7.5.7. Satz. *In der Kategorie der Henselschen Schemata existiert die Aufblasung jedes Objekts X in einer beliebigen quasikohärenten Idealgarbe J von $\mathcal{O}_X$.*

Wir wollen nun noch einige einfache und häufig verwendete Eigenschaften der Aufblasung angeben.

7.5.8. Bemerkung. *Ist $f : Y \to X$ die Aufblasung von X mit dem Zentrum J in der Kategorie der Henselschen Schemata, dann gilt:*

(i) *Für jede offene Teilmenge von X (mit der durch X induzierten Struktur eines Henselschen Schemas) ist der Einschränkungsmorphismus $f^{-1}U \to U$ die Aufblasung von U mit dem Zentrum J/U.*

(ii) *Ist $D = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/J)$, dann induziert f einen Isomorphismus*

$$Y - f^{-1}D \xrightarrow{\sim} X - D.$$

Beweis. (i) ist eine triviale Folgerung aus der Universaleigenschaft der Aufblasung, und (ii) erhalten wir aus (i), wenn wir $U = X - D$ setzen; denn es ist dann $J/U = \mathcal{O}_X/U$, und die Aufblasung von X in $\mathcal{O}_X$ ist die Identität $X \to X$.

Für die Anwendungen wird es sich als nützlich erweisen, noch einen weiteren Zusammenhang zwischen den Aufblasungen in der Kategorie der Schemata und denen in der Kategorie der Henselschen Schemata nachzuweisen. Es gilt:

7.5.9. Bemerkung. *Es sei $f : X \to Y$ ein Aufblasungsmorphismus in der Kategorie der Schemata, dessen Zentrum die Idealgarbe J von $\mathcal{O}_Y$ ist. Ist $W = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Y/J)$ und $V = f^{-1}W$, dann ist der induzierte Morphismus $X_V{}^h \to Y_W{}^h$ die Aufblasung von $Y_W{}^h$ mit Zentrum $J \cdot \mathcal{O}_{Y_W{}^h}$ in der Kategorie der Henselschen Schemata.*

Beweis. Das Problem ist lokal. Es sei A ein Ring, a ein Ideal von A, $p : S \to \mathrm{Spec}(A)$ die Aufblasung von $\mathrm{Spec}(A)$ mit dem Zentrum $a^\sim$ in der Kategorie der Schemata. Ist $V = V(a)$, $W = p^{-1}(V)$, dann ist der durch p unmittelbar induzierte Morphismus also von der Gestalt $S_W{}^h \to (\mathrm{Spec}(A))_V{}^h$.

In 7.5.5. und 7.5.6. haben wir unsere Behauptung bereits bewiesen für den Fall, daß A in V Henselsch ist. Darauf werden wir unser Problem zurückführen. Für den (nun wieder beliebigen) Ring A erhalten wir zunächst in der Kategorie der Schemata die Aufblasung

$$p : \mathrm{Proj}\, R \to \mathrm{Spec}(A)$$

mit $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} a^i = A \oplus a \oplus a^2 \oplus \cdots$ durch den kanonischen Morphismus $A \to R$. Es sei nun A^h die Henselsche Abschließung von A in $V(a)$ und $a^h = a \cdot A^h$. Bezeichnen wir mit R' den graduierten Ring

$$R' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} a^{h^i} = A^h \oplus a^h \oplus a^{h^2} + \cdots,$$

so erhalten wir auf natürliche Weise einen Ringhomomorphismus $j : R \to R'$, der homogen vom Grade Null ist und überdies die Eigenschaft hat, daß $\mathrm{Proj}(j) = g$ auf dem ganzen Schema $\mathrm{Proj}\, R'$ definiert ist; denn es ist $j(R_+)$ ein Erzeugendensystem von R_+'. Nun erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}\, R \arrow[r, "p"] & \mathrm{Spec}(A) \\
\mathrm{Proj}\, R' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "p'"] & \mathrm{Spec}(A^h) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

und aus der Flachheit des Adjunktionsmorphismus folgt

$$R \otimes_A A^h = R',$$

und daraus ersieht man leicht die Universalität dieses Diagramms. Zunächst ist klar, daß der durch f induzierte Morphismus $\mathrm{Henspec}(A^h, V(a^h)) \to (\mathrm{Spec}(A))_V{}^h$ ein Isomorphismus ist. Wenn wir nun zeigen können, daß das durch das Diagramm der

Umgebungskeime

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Proj}\, R)_W & \longrightarrow & (\mathrm{Spec}(A))_V \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mathrm{Proj}\, R')_{g^{-1}W} & \longrightarrow & (\mathrm{Spec}(A^h))_{f^{-1}V} \end{array}$$

induzierte Diagramm Henselscher Schemata universell ist, so ist der durch g induzierte Morphismus ebenfalls ein Isomorphismus, und die Behauptung ist bewiesen.

Die Universalität folgt aus einer lokalen Betrachtung: Es seien B, C zwei A-Algebren und $D = B \otimes_A C$. Wir bilden die Henselschen Abschließungen in a bzw. aB, aC, aD. Dann ist $\mathrm{Henspec}(D^h, V(aD^h))$ Faserprodukt von $\mathrm{Henspec}(B^h, V(aB^h))$ und $\mathrm{Henspec}(C^h, V(aC^h))$ über $\mathrm{Henspec}(A^h, V(aA^h))$; dies folgt, da eine Adjungiertheitsbeziehung der Form

$$\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Henspec}(D^h, V^h)) \simeq \mathrm{Hom}_H((D^h, V^h), (\Gamma(X), V(N_X(X))))$$

vorliegt.

7.6. Der Zusammenhang von Aufblasung und (ν)-Äquivalenz

Wir wollen vereinbaren, daß alle nun betrachteten Schemata bzw. Henselschen Schemata über dem vorgegebenen Grundkörper k l.v.e.T. und separiert sind. Weiterhin sprechen wir von einem Henselschen Schema immer nur im Zusammenhang mit einer ausgezeichneten Definitionsidealgarbe, und wenn wir von einer Aufblasung sprechen, so meinen wir damit die Aufblasung in dieser Definitionsidealgarbe. Es liegt hier die im Vergleich zur Schematheorie etwas seltsam anmutende Situation vor, daß wir ein Henselsches Schema in einem abgeschlossenen Unterschema aufblasen, dessen zugrunde liegende Punktmenge das gesamte Henselsche Schema ist. Stellen wir uns jedoch einmal dieses Henselsche Schema als Henselsche Abschließung eines Schemas in einem abgeschlossenen Unterschema vor (was natürlich global nicht immer möglich sein muß). Aus den Untersuchungen in 7.5. ersehen wir dann sofort, daß die Fragestellung nicht nur für Henselsche Schemata sinnvoll ist, sondern auch bei Anwendung auf Henselsche Schemata von diesem speziellen Typ ein schematheoretisches Resultat liefert. Das Hauptresultat dieses Abschnitts wird ein Satz über die Invarianz der (ν)-Äquivalenz gegenüber Aufblasungen sein, für dessen Beweis wir sehr spezielle Methoden aus der Theorie der Henselschen Schemata verwenden müssen. Ein spezieller Fall unseres Resultats wird also dann die Aussage sein, daß die (ν)-Äquivalenz zweier Schemata bezüglich abgeschlossener Unterschemata beim Übergang zu ihren Aufblasungen erhalten bleibt, wobei wir uns jedoch vorbehalten müssen, die Zahl ν eventuell geringfügig zu verkleinern. Dies folgt dann aus der Tatsache, daß die Henselsche Abschließung $X_V{}^h$ des Schemas X im abgeschlossenen Unterschema V dieselbe (genauer: eine kanonisch isomorphe) (ν)-Umgebung hat wie V in X.

7.6.1. Vorbereitende Untersuchungen

Eine leichte Schlußfolgerung aus wohlbekannten Eigenschaften der Aufblasung liefert uns:

7.6.1.1. Bemerkung. *Ist X/k ein Henselsches Schema, lokal von endlichem Typ, dann ist seine Aufblasung $\tilde{X}/k$ ebenfalls lokal von endlichem Typ.*

Aus demselben Vergleichssatz für die Aufblasungen in der Kategorie der Schemata und der der Henselschen Schemata erhalten wir auch:

7.6.1.2. *Wir nennen ein Henselsches Schema reduziert, wenn die Schnitte seiner Strukturgarbe über den affinen offenen Teilmengen stets reduzierte Ringe bilden. Ist nun X reduziert, so gilt dies auch für die Aufblasung $\tilde{X}$ von X.*

Der Beweis ist klar; denn es handelt sich um eine lokale Fragestellung, und die Henselsche Abschließung eines reduzierten Ringes ist stets wieder reduziert.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Henselschen Schemata, die folgende Eigenschaften haben:

7.6.1.3. Satz. *X sei ein lokal Noethersches Henselsches Schema. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *X induziert auf keiner seiner offenen Teilmengen eine Schemastruktur (d. h., $\mathcal{N}_X$ ist auf keiner offenen Teilmenge von X das Nullradikal der Strukturgarbe).*

(ii) *In einer Umgebung jedes Punktes läßt sich X als Henselsche Abschließung eines Schemas Y in einer abgeschlossenen Teilmenge W darstellen, so daß $Y - W$ dichte Teilmenge von Y ist.*

(iii) *Kein offenes Unterschema von X hat eine leere Aufblasung.*

Beweis. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (iii) $\Rightarrow$ (i) sind unmittelbar klar. Wir überlegen uns (ii) $\Rightarrow$ (iii). Die Fragestellung ist lokal; wir nehmen an, die Aufblasung von X sei leer, was dann für jedes offene Unterschema auch gilt, und nach (ii) können wir dann annehmen, es sei $X = Y_W{}^h$, $Y - W$ eine dichte Teilmenge des Schemas Y. Es sei nun $f: Y' \to Y$ die Aufblasung von Y in W, die wir in (Sch) bilden. Dann ist $f^{-1}(W) = \emptyset$, und da f abgeschlossen ist, wird durch f ein Isomorphismus von Y' auf eine Zusammenhangskomponente $Y - W$ von Y induziert.

Da aber diese Teilmenge dicht in Y ist, folgt $W = \emptyset$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

7.6.1.4. Definition. Ein lokal Noethersches Henselsches Schema X heißt *echt*, wenn es die äquivalenten Bedingungen (i) bis (iii) des Satzes 7.6.1.3. erfüllt.

Die nun folgende schematheoretische Überlegung macht es sinnvoll, an gewisse reindimensionale Henselsche Schemata die Forderung zu stellen, daß ihre Aufblasung ebenfalls reindimensional ist.

7.6.1.5. *Es sei X/k v.e.T. ein reduziertes Schema, V ein abgeschlossenes Unterschema, $U = X - V$ dicht in X und $f: X' \to X$ Aufblasung von X in V. Ist dann X rein n-dimensional und X' regulär, so ist auch X' rein n-dimensional.*

Beweis. Wir können annehmen, daß X zusammenhängend ist. Sind $V_1, \dots, V_r$ die irreduziblen Komponenten von X, so liegen deren allgemeine Punkte in U; denn $U = X - V$ ist dicht in X. Da jedoch U regulär ist, folgt leicht $V_1 = \dots = V_r$, d. h., X ist Integritätsschema. Nun ist der Aufblasungsmorphismus birational, also ist insbesondere $n = \operatorname{tr}(k(X) : k) = \operatorname{tr}(k(X') : k)$. In jedem Punkt $x' \in X'$ des regulären Schemas X' gilt die bekannte Formel

$$n = \operatorname{tr}(k(x') : k) + \operatorname{codim} x';$$

die Kodimension der abgeschlossenen Punkte von X' ist also n, q.e.d.

7.6.2. Die Invarianz der (ν)-Äquivalenz gegenüber Aufblasungen

Voausschicken wollen wir zunächst eine einfache Bemerkung:

7.6.2.1. Bemerkung. *X, X' seien reduzierte Henselsche Schemata und $X_{(\nu)} \simeq X'_{(\nu)}$ mit $\nu \geqq 2$. Ist dann X echt, so gilt dies auch für X'.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind X, X' affin, und ihre (ν)-Äquivalenz entspreche dem Isomorphismus

$$A/J^\nu \xrightarrow{\sim} A'/J'^\nu,$$

wobei wir annehmen können, daß J, J' Semiprimideale sind. Wir nehmen nun an, die Behauptung sei falsch. Dann können wir $J' = 0$ annehmen. Da die (ν)-Äquivalenz eine $(\nu - 1)$-Äquivalenz induziert, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{CD} A/J^\nu @>\sim>> A' \\ @VpVV @| \\ A/J^{\nu-1} @>\sim>> A' \end{CD}$$

und offensichtlich ist p injektiv, also $J^\nu = J^{\nu-1}$ insbesondere für $\nu = 2$. Nun ist J im Jacobson-Radikal von A enthalten, daher A in der J-adischen Topologie separiert, d. h. $J = \bigcap_n J^n = 0$ (Widerspruch).

Wir formulieren nun:

7.6.2.2. Hauptsatz. *Es sei X ein quasikohärentes Henselsches Schema, X sei reduziert und die Aufblasung $f : \tilde{X} \to X$ sei rein n-dimensional und nichtsingulär. Ist X echt, so existiert ein Paar (ν_0, s_0) positiver ganzer Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:*

Ist $f' : \tilde{X}' \to X'$ Aufblasung eines reduzierten Henselschen Schemas, X' rein n-dimensional, dann induziert die (ν)-Äquivalenz von X und X' eine $(\nu - s)$-Äquivalenz von X und X' für beliebige $\nu \geqq \nu_0$, $s \geqq s_0$ mit $\nu - s \geqq 1$.

Wir weisen darauf hin, daß dieser Satz ein algebraisches Analogon eines Satzes von Hironaka und Rossi ist, der für den Fall der analytischen Geometrie in [24] bewiesen wurde.

Beweis. Die Hauptschwierigkeit beim Beweis wird die lokale Untersuchung sein. Wir überlegen uns daher zunächst, daß jeder Punkt von X eine offene affine Umgebung besitzt, in der die Behauptung gilt. Es sei zunächst $X = \operatorname{Henspec}(A, V)$

mit

$$A = k[x_1, \dots, x_n]\langle x_{n+1}, \dots, x_m\rangle \quad \text{und} \quad i = (x_{n+1}, \dots, x_m)\,A,\ V = V(i).$$

Nun induziert

$$a_0 : B_0 = k[X_1, \dots, X_m] \to A_0 = k[x_1, \dots, x_m]$$

mit $k_0 = a_0^{-1}(i_0)$, $i_0 = (x_{n+1}, \dots, x_m)\,A_0$ einen strengen Epimorphismus Henselscher Paare

$$a : (B, V(k)) \twoheadrightarrow (A, V(i))$$

mit $k = a^{-1}(i)$. Zur Konstruktion der Aufblasungen der entsprechenden Henselschen Schemata betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{CD} A @>a>> B \\ @VVV @VVV \\ \tilde{A} = (A \oplus i \oplus i^2 \oplus \cdots @<\tilde{a}<< \tilde{B} = (B \oplus k \oplus k^2 \oplus \cdots) \end{CD}$$

wobei der auf natürliche Weise gegebene Morphismus $\tilde{a}$ (homogen vom Grade Null) surjektiv ist; daher ist $\operatorname{Proj} \tilde{a}$ auf ganz $\operatorname{Proj} \tilde{A}$ definiert. Wir erhalten so zunächst ein kommutatives Diagramm reduzierter Schemata

$$\begin{CD} \operatorname{Spec}(A) @>\operatorname{Spec}(a)>> \operatorname{Spec}(B) \\ @AAA @AAA \\ \operatorname{Proj} \tilde{A} @>\operatorname{Proj} \tilde{a}>> \operatorname{Proj} \tilde{B} \end{CD}$$

in dem $\operatorname{Spec}(a)$, $\operatorname{Proj} \tilde{a}$ abgeschlossene Einbettungen sind. Nun wird aber $\operatorname{Proj} \tilde{B}$ durch offene Mengen der Form $D^+(s)$ mit $s \in k$ (aufgefaßt als $\in B_1$) überdeckt. Die umkehrbare Idealgarbe $k \cdot \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}$ wird auf $D^+(s)$ durch s erzeugt, und die Einbettung $\operatorname{Proj} a$ wird auf $D^+(s)$ durch das Ideal

$$c = \ker(\tilde{B}_{(s)} \to \tilde{A}_{(\tilde{a}(s))})$$

definiert, wobei

$$\tilde{B}_{(s)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^n}\, k^n \subseteq B_s$$

ist. Also ist

$$c = \left\{ e = \frac{d}{s^k} \in \tilde{B}_{(s)} \quad \text{mit} \quad \frac{a(d)}{a(s)^k} = 0 \text{ in } A_{(a(s))} \right\},$$

und da $\tilde{B}_{(s)}$ Noethersch ist, hat c ein Erzeugendensystem

$$e_1 = \frac{d_1}{s^{\nu_1}}, \dots, e_N = \frac{d_N}{s^{\nu_N}}$$

mit $d_i \in k^{v_i}$ sowie o.B.d.A. $d_i \in j = \ker a$ (denn sonst folgt aus $\dfrac{a(d_i)}{a(s)^{v_i}} = 0$, daß eine natürliche Zahl i' existiert mit $a(s)^{i'} \cdot a(d_i) = 0$, also $s^{i'} \cdot d_i \in j = \ker a$; man wähle nun statt d_i, v_i einfach $d_i' = s^{i'} \cdot d_i$, $v_i' = v_i + i'$).

Bilden wir nun von dem obigen Diagramm die Henselsche Abschließung in $V(k) \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ bzw. den Urbildern, so erhalten wir ein Diagramm

(i)
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Henspec}(A, V(i)) = X \arrow[r, hook, "u"] & Y = \operatorname{Henspec}(B, V(k)) \\ \tilde{X} \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "\tilde{u}"] & \tilde{Y} \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

in dem u, $\tilde{u}$ abgeschlossene Einbettungen sind, deren Idealgarben wir mit J bzw. $\tilde{J}$ bezeichnen, und f bzw. g die Aufblasungen von X bzw. Y. Bevor wir fortfahren, müssen wir noch eine technische Bemerkung einschieben.

(ii) Ist $f : (A_1, V_1) \to (A_2, V_2)$ strenger Epimorphismus in K, dann ist $\ker f^h = \ker f \cdot A_1{}^h$.

Beweis. Betrachten wir

$$\begin{tikzcd} (A_1, V_1) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (A_2, V_2) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (A_1^h, V_1^h) \arrow[r, "f^h"] \arrow[rr, bend right] & (A_2^h, V_2^h) \arrow[r, dashed, shift left] & A_1^h \otimes_{A_1} A_2 \arrow[l, dashed, shift left] \end{tikzcd}$$

so ist $A_1{}^h \otimes_{A_1} A_2$ homomorphes Bild von $A_1{}^h$ und daher Henselsch in dem entsprechenden Ideal. Auf diese Weise erhalten wir sofort die beiden im Diagramm angedeuteten zueinander inversen Abbildungen. Da $A_1{}^h$ eine flache A-Algebra ist, erhalten wir eine exakte Folge

$$\ker f \otimes_A A_1{}^h \hookrightarrow A_1{}^h \twoheadrightarrow A_2{}^h,$$

q.e.d.

Aus (ii) erhalten wir nun leicht

(iii) Es gibt eine affine Überdeckung $(U_1, \ldots, U_m)$ von Y sowie natürliche Zahlen $v_1, \ldots, v_N$ und $d_1, \ldots, d_N \in \Gamma(J)$ mit $d_i \in (L_Y{}^{v_i})$ $(L_Y = k_0 \cdot \mathcal{O}_Y)$, so daß $\tilde{J}$ auf U_i erzeugt wird durch

$$e_1 = \frac{d_1}{r_i{}^{v_1}}, \ldots, e_N = \frac{d_N}{r_i{}^{v_N}},$$

wenn wir für $r_i \in \Gamma(L_Y)$ ein beliebiges erzeugendes Element von $L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}}/U_i$ wählen.

(Der Beweis ist klar, wenn wir die vorangehende Überlegung auf die Überdeckung $(D^+(a_1), \ldots, D^+(a_m))$ von $\tilde{Y}$ anwenden und dann die Vereinigung der so erhaltenen e_i betrachten.)

Wir wählen nun $s_0 = \text{Maximum}\,(v_1, \ldots, v_N)$, $\nu_0 = s_0 + 2$. Nach 7.4.3.4. genügt es offenbar, die Behauptung für $s = s_0$ zu beweisen.

Es sei $f_{(\nu)} : X_{(\nu)} \xrightarrow{\sim} X_{(\nu)}'$ die gegebene (ν)-Äquivalenz. Wir erhalten durch $x' = f_{(\nu)}(x)$ einen Punkt von X', und wir wollen nun X durch eine noch kleinere Umgebung von x ersetzen, damit wir auch noch X' als affin annehmen können. Dies geschieht wieder nach 7.3.4.4.; x' hat nämlich eine offene Umgebung $\operatorname{Henspec}(A', V(i'))$ in X', wobei $(A', V(i'))$ die Henselsche Abschließung von $(A_0', V(i_0))$ ist und A_0' eine endliche Algebra über dem Grundkörper k, und überdies ist $\operatorname{Spec}(A_0'/i_0'^{\nu})$ k-isomorph zu einer offenen Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A_0/i_0{}^{\nu})$. Daher existiert ein $t \in A_0$ sowie ein $t' \in A_0'$ derart, daß

$$(A_0/i_0{}^{\nu})_t \simeq (A_0'/i_0'^{\nu})_{t'}$$

ist und bei diesem Isomorphismus der Quotientenringe die Restklasse von t in die von t' übergeführt wird. Wir wählen nun ein $q \in B_0$ so, daß es bei der Abbildung $a_0 : B_0 \to A_0$ in t übergeht. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} (A_0)_t/(i_0^{\nu})_t \arrow[r, phantom, "\simeq"] & A_t^h/i^{\nu}A_t^h \arrow[r, phantom, "\simeq"] & A'^h_{t'}/i'^{\nu}A'^h_{t'} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (A_0')_{t'}/(i_0'^{\nu})_{t'} \\ (A_0)_t \arrow[u, two heads] \arrow[r] & A_t^h \arrow[u, two heads] & (A'_{t'})^h_{t''} \arrow[u, two heads] & ((A_0')_{t'})_{t''} \arrow[u, two heads] \arrow[l] \\ & B_q^h \arrow[u, "a'"] \arrow[ur, dashed, "b^h"'] & & \\ & (B_0)_q \arrow[uul] \arrow[u] \arrow[uurr, dashed, "b"'] & & \end{tikzcd}$$

in dem a' die durch a induzierte Abbildung sei. Wir konstruieren b folgendermaßen: Zunächst können wir o.B.d.A. t' ersetzen durch ein Element $t' \cdot t''$, so daß $t'' \in (A_0')_{t'}$ Einheit in $(A_0')_{t'}/(i_0'^{\nu})_{t'}$ ist, und betrachten statt $(A_0')_{t'}$ dann $((A_0')_{t'})_{t''}$ (dies entspricht einer weiteren Lokalisierung in X', und es ist natürlich

$$((A_0')_{t'})_{t''}/((i_0')_{t'})^{\nu}_{t''} = ((A_0')_{t'}/(i_0')^{\nu}_{t'}).$$

Es seien nun $X_i' \in (A_0')_{t'}$ Repräsentanten von $x_i' \in (A_0')_{t'}/(i_0')^{\nu}_{t'}$, wobei x_i' das Bild von X_i bei der Abbildung

$$B_0 \to (B_0)_q \to (A_0)_t \to (A_0')_{t'}/(i_0'^{\nu})_{t'}$$

bedeute. Dann ist $(A_0')_{t'}/(i_0'^{\nu})_{t'} = (k[x_1, \ldots, x_m])_{t'}$ und $t' = p(x_1', \ldots, x_m')$ ein Polynom mit Koeffizienten aus k. Setzen wir $t'' = p(X_1', \ldots, X_m') \in (A_0')_{t'}$, so ist $t'' \equiv t' \bmod (i_0'^{\nu})_{t'}$. Wir setzen

$$b(X_i) = X_i' \quad \text{und} \quad b\left(\frac{l(X_1, \ldots, X_m)}{q^s}\right) = \frac{1}{t^s} \cdot b\bigl(l(X_1, \ldots, X_m)\bigr),$$

l ein beliebiges Polynom in den X_i, s eine natürliche Zahl. Auf diese Weise ist eindeutig ein Ringhomomorphismus b definiert, der das Diagramm (iv) kommutativ macht; und dies gilt dann ebenso für b^h.

Ist nun $Y_1, \ldots, Y_r \in B_0$ eine Basis des Ideals k_0, so läßt sich b faktorisieren in

$$\begin{aligned}(B_0)_q &\xrightarrow{g_1} k[X_1', \ldots, X_m'][b(Y_1), \ldots, b(Y_r)]\\ &\xrightarrow{g_2} ((A_0')_{t'})_{t''}[b(Y_1), \ldots, b(Y_r)]\\ &\xrightarrow{g_3} ((A_0')_{t'})_{t''},\end{aligned}$$

$b = g_3 g_2 g_1$, und g_1^h, g_2^h, g_3^h sind strenge Epimorphismen nach 7.4.1.3. bzw. 7.4.1.4.; daher definiert b^h eine abgeschlossene Einbettung Henselscher Schemata. Wir ersetzen X, X', Y durch ihre in (iv) konstruierten affinen offenen Unterschemata und erhalten durch eine zu (i) analoge Konstruktion das Diagramm

$$\text{(v)}\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "u"] & Y & X' \arrow[l, hook', "u'"'] \\ \tilde{X} \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "\tilde{u}"] & \tilde{Y} \arrow[u, "g"] & \tilde{X}' \arrow[u, "f'"'] \arrow[l, hook', "\tilde{u}'"'] \end{tikzcd}$$

in dem die vertikalen Pfeile Aufblasungen, die horizontalen abgeschlossene Einbettungen (mit den Idealgarben J, J' von $\mathcal{O}_Y$ bzw. $\tilde{J}, \tilde{J}'$ von $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$) sind. Natürlich überträgt sich die Eigenschaft (iii) auf (v). Nach Konstruktion sind $J, J' \subseteq L_Y$. Die Voraussetzung der (ν)-Äquivalenz besagt nun, daß

$$L_Y^{\nu} + J = L_Y^{\nu} + J'$$

ist. Wir behaupten, daß nun

$$(L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}})^{\nu-s} + \tilde{J} = (L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}})^{\nu-s} + \tilde{J}'$$

ist, woraus dann sofort die behauptete $(\nu - s)$-Äquivalenz von $\tilde{X}$ und $\tilde{X}'$ folgt.

Wir wählen $d_1^*, \ldots, d_N^* \in J'(Y)$ mit $d_j \equiv d_j^* \bmod \Gamma(L_Y^{\nu})$. Wir definieren nun auf folgende Weise ein abgeschlossenes Henselsches Unterschema $\tilde{X}^*$ von $\tilde{Y}$: Die Idealgarbe $\tilde{J}^*$ von $\tilde{X}^*$ werde auf U_i definiert durch

$$\tilde{J}^*/U_i = (d_1^* \cdot r_i^{-\nu_1}, \ldots, d_N \cdot r_i^{-\nu_N})^{\sim h}.$$

Nun ist wegen $d_j^* \in J'(Y)$ offenbar $\tilde{J}^* \subseteq \tilde{J}'$ (man erinnere sich an die Konstruktion von u'). Es ist aber

$$d_j \cdot r_i^{-\nu_j} \equiv d_j^* \cdot r_i^{-\nu_j} \bmod (L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(U_i))^{\nu-s},$$

da r_i erzeugendes Element der umkehrbaren Idealgarbe $L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}}/U_i$ ist und $s = \text{Maximum}\,(\nu_j)$. Daraus erhalten wir sofort

$$(L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}})^{\nu-s} + \tilde{J} = (L_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{Y}})^{\nu-s} + \tilde{J}^*.$$

Daher ist $\tilde{X}'$ abgeschlossenes Henselsches Unterschema von $\tilde{X}^*$, und $\tilde{X}^*$ ist $(\nu - s)$-äquivalent zu $\tilde{X}$, d. h. insbesondere $\underline{\tilde{X}} = \underline{\tilde{X}}^*$, und wir behaupten, daß $\tilde{X}^* = \tilde{X}'$ ist.

Aus der $(\nu - s)$-Äquivalenz von $\tilde{X}$ und $\tilde{X}^*$ folgt wegen $\nu - s \geqq 2$ zunächst, daß X regulär und rein n-dimensional ist. Dies gilt jedoch auch für X', und daraus folgt nun leicht die Behauptung unseres Satzes für den lokalen Fall.

Wir haben also bewiesen, daß für alle $\nu \geqq \nu_0$, $s \geqq s_0$ ein Isomorphismus derart existiert, daß das Diagramm

$$\text{(vii)}\qquad \begin{tikzcd} X_{(\nu)} \arrow[r, "\sim", "f_{(\nu)}"'] & X'_{(\nu)} \\ \tilde{X}_{(\nu-s)} \arrow[u] \arrow[r, "\sim", "\tilde{f}_{(\nu-s)}"'] & \tilde{X}'_{(\nu-s)} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, und eine affine Überlegung an (v) zeigt, daß dann auch

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_{(\nu-s)} \arrow[r, hook] \arrow[d, dash, "\wr"', "\tilde{f}_{(\nu-s)}"] & \tilde{X} \arrow[dr, hook] & \\ & & \tilde{Y} \\ \tilde{X}'_{(\nu-s)} \arrow[r, hook] & \tilde{X}' \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

kommutativ sein muß, d. h., $f_{(\nu-s)}$ ist durch die Bedingung (vii) schon eindeutig bestimmt. Daraus und aus der Quasikompaktheit von X folgt die Aussage des Satzes.

7.7. (ν)-Äquivalenz und formale Äquivalenz

Wir untersuchen nun Fortsetzbarkeitseigenschaften der (ν)-Äquivalenz an einem speziellen Typ Henselscher Schemata, den wir auf folgende Weise erhalten: Es sei X/k ein Schema und J eine quasikohärente Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$. Diese definiert ein abgeschlossenes Unterschema V von X, und wir bilden in der Kategorie der Schemata die Aufblasung $Y \to X$ von X mit dem Zentrum V. Das Urbild von V in Y ist ein abgeschlossenes Unterschema, das durch die Idealgarbe $L = J \cdot \mathcal{O}_Y$ definiert wird.

Wir betrachten nun das Henselsche Schema $Y' = Y_W{}^h$ $(W = V(L))$. Es sei L' die umkehrbare Idealgarbe $L \cdot \mathcal{O}_{Y'}$ von $\mathcal{O}_{Y'}$; L' ist eine Definitionsidealgarbe von Y', und wir nennen das Henselsche Paar (Y', L') ein „aufgeblasenes Henselsches Schema". Insbesondere überlegt man sich leicht, daß alle Henselschen Schemata, die durch Aufblasen eines punktförmigen Henselschen Schemas (d. h. eines Henselschen Schemas, dessen zugrunde liegender topologischer Raum aus genau einem Punkt besteht) entstehen, von diesem Typ sind. Das Endresultat dieses Abschnitts wird ein Satz über die Fortsetzbarkeit jeder (ν)-Äquivalenz zu einer $(\nu + 1)$-Äquivalenz sein (für hinreichend große Zahlen ν) unter der Voraussetzung, daß eines der betrachteten Henselschen Schemata aufgeblasen und singularitätenfrei ist sowie beide dieselbe Dimension haben. Dieser Satz findet sich in einer etwas spezielleren Form in [30], wo er für den Fall der analytischen Geometrie bewiesen ist. Wir beginnen mit einer einfachen technischen Bemerkung:

7.7.1. Bemerkung. *Es sei X ein Schema, V eine abgeschlossene Teilmenge und $j : Z = X_V{}^h \to X$ der kanonische Morphismus. Dann ist $j^*(.)$ ein exakter Funktor von der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben in die der quasikohärenten $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $X = \operatorname{Spec} A$ affin. Wir erhalten daher für einen beliebigen A-Modul M die Beziehung $j^*(M^\sim) = M^{\sim h}$. Wir erhalten also $j^*(F)$ für eine quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe F dadurch, daß wir der Reihe nach den Γ-Funktor, die tensorielle Multiplikation mit A^h und den Funktor ${}^{\sim h}$ anwenden; diese drei Funktoren sind aber im affinen Falle exakt.

7.7.2. Lemma. *Es sei (X', L') ein aufgeblasenes Henselsches Schema, das durch die Aufblasung $f : X \to Y$ in der Kategorie (Sch) mit der Idealgarbe $L = \mathcal{O}_X(1)$ von $\mathcal{O}_X$ gegeben wird. Ist $j : X' \to X$ der kanonische Morphismus und F eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, die auf einer offenen Teilmenge von X, die $j(X')$ enthält, kohärent ist, dann existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$ die erste Čechsche Kohomologiegruppe*

$$\check{H}^1\big(X', j^*(F) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} L'^n/L'^{n+1}\big) = 0$$

ist.

Zunächst erinnern wir daran, daß die Idealgarbe L von $\mathcal{O}_X$ very ample ist relativ zu f, und es sind dann die Voraussetzungen des Satzes von SERRE erfüllt. Wir können nun annehmen, daß für hinreichend große Zahlen n

$$R^i f_*(F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1}) = 0$$

ist, denn es ist

$$(F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/L)\,(n) = F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1} \qquad (i > 0)\,.$$

Bevor wir fortfahren können, brauchen wir eine kurze Zusatzbetrachtung: Ist G eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, dann ist $R^i f_*(G)$ die zur Prägarbe

$$U \mapsto H^i\big(f^{-1}(U), G\big)$$

($U \subseteq Y$ offen) assoziierte Garbe. Dies wird sofort klar mit Hilfe der axiomatischen Charakterisierung der abgeleiteten Funktoren. Daraus folgt leicht: Ist $R^i f_*(G) = 0$, so gilt dies auch für alle $H^i\big(f^{-1}(U), G\big)$. Nach einem bekannten Satz (vgl. etwa [30]) stimmt nun die erste Čechsche Kohomologiegruppe mit der gewöhnlichen überein. Nach den bekannten Eigenschaften des Aufblasungsmorphismus ist nun jede offene Teilmenge von X, die $j(X')$ enthält, das Urbild einer offenen Teilmenge von Y. Wenn wir nun G auf $j(X')$ einschränken, erhalten wir leicht

$$\check{H}^1\big(j(X'), G\big) = 0\,.$$

Angewendet auf unsere Garbe $G = F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1}$ ergibt dies leicht

$$\check{H}^1\big(X, j^{-1}(F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1})\big) = 0\,,$$

und wir behaupten, daß $j^{-1}G = j^*G$ ist. Zunächst sieht man jetzt, daß $L \cdot G = 0$ ist. Für $x \in X'$ ist nun

$$G_X \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}^h_{X,x} = G_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}/L_x} \mathcal{O}^h_{X,x}/L_X\mathcal{O}^h_{X,x} = G_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}/L_x} \mathcal{O}_{X,x}/L_x = G_x\,,$$

und dies wollten wir eben zeigen. Es ist also

$$\check{H}^1(X', j^*(F) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} L'^n/L'^{n+1}) = \check{H}^1\big(X', j^*(F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1})\big) = 0\,,$$

q.e.d.

7.7.3. Lemma. *Es sei (X, L) ein aufgeblasenes Henselsches Schema und X singularitätenfrei. Mit $\operatorname{Aut}(n)$ bezeichnen wir die Garbe der k-Automorphismen von $\mathcal{O}_X/L^{n+1}$, die (mod L^n) die Identität induzieren. Dann existiert eine natürliche Zahl n_0 mit der Eigenschaft, daß für alle $n \geqq n_0$*

$$\check{H}^1\big(X, \operatorname{Aut}(n)\big) = 0$$

ist.

Beweis. Wir erinnern zunächst daran, daß die Čechsche Kohomologie nur von der Gruppenstruktur der betrachteten Garbe abhängig ist. Es sei θ_X die Garbe der Vektorfelder auf X. Wir werden zeigen, daß für $n \geqq 2$

(*) $\qquad \theta_X \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1} \simeq \operatorname{Aut}(n)$

ist. Daraus erhalten wir dann nach 7.7.2. leicht die Behauptung. Zum Beweis von (*) zeigen wir:

(i) $\qquad$ Für $n \geqq 2$ gilt $\operatorname{Aut}(n) \simeq \operatorname{Hom}(\Omega_X, L^n/L^{n+1})$.

Zunächst ist $\operatorname{Hom}(\Omega_X, L^n/L^{n+1}) = \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_X, L^n/L^{n+1})$. Im folgenden werden wir nun eine etwas nachlässige Schreibweise verwenden, da die exakte Formulierung unmittelbar klar wird. Zunächst liegt ein Automorphismus s von $\mathcal{O}_X/L^{n+1}$ in $\operatorname{Aut}(n)$, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X/L^{n+1} \arrow[d, "s"] \arrow[dr] & \\
\mathcal{O}_X/L^{n+1} \arrow[r] & \mathcal{O}_X/L^n
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Nun ist die Abbildung

$$\operatorname{Aut}(n) \to \operatorname{Der}_k(\mathcal{O}_X, L^n/L^{n+1})\,,$$
$$s \mapsto d = s - \mathrm{id}$$

ein Isomorphismus. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß d überhaupt eine Derivation ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
d(f_1 \cdot f_2) &- f_1 df_2 - f_2 df_1 \\
&= s(f_1 \cdot f_2) - f_1 \cdot f_2 - f_1 \cdot s(f_2) + f_1 \cdot f_2 - f_2 \cdot s(f_1) + f_1 \cdot f_2 \\
&= s(f_1) \cdot s(f_2) - f_1 \cdot s(f_2) - f_2 \cdot s(f_1) + f_1 \cdot f_2 \\
&= \big(s(f_1) - f_1\big)\big(s(f_2) - f_2\big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Die Injektivität der Zuordnung ist klar. Zum Beweis der Surjektivität sei $d : \mathcal{O}_X \to L^n/L^{n+1}$ eine k-Derivation. Man rechnet leicht nach, daß $s = \mathrm{id} + d$ ein Ringhomomorphismus ist. s ist auch Automorphismus; denn setzen wir $s' = \mathrm{id} - d$, so ist

$$s'(s(f)) = f + df - d(f + df) = f - ddf = f,$$

da $dds \in L^{n-1} \cdot L^n$ ist. Ebenso ist $s \cdot s' = \mathrm{id}$, d. h., s' ist zu s invers, also s Automorphismus, was wir zeigen wollten. Nun gilt außerdem

$$\text{(ii)} \qquad \theta_X \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n/L^{n+1} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, L^n/L^{n+1}).$$

Dies ist klar; denn daß die kanonische Abbildung ein Isomorphismus ist, folgt z. B. schon daraus, daß Ω_X lokal frei ist. Aus (i) und (ii) ergibt sich nun (*), und damit ist das Lemma bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, das Hauptresultat zu beweisen. Es beruht wesentlich auf dem Satz 7.4.3.2. über die lokale Fortsetzbarkeit einer (ν)-Äquivalenz zu einem Isomorphismus Henselscher Schemata.

7.7.4. Satz. *Es sei (X, L) ein rein n-dimensionales singularitätenfreies aufgeblasenes Henselsches Schema. Dann gibt es eine natürliche Zahl ν_0 mit folgender Eigenschaft:*

Ist (X', L') ein rein n-dimensionales Henselsches Schema, das zu (X, L) (ν)-äquivalent ist, und $\nu \geqq \nu_0$, dann läßt sich diese (ν)-Äquivalenz fortsetzen zu einer $(\nu + 1)$-Äquivalenz von (X, L) und (X', L').

Beweis. Betrachten wir zunächst das Problem lokal, so können wir, wenn $f_{(\nu)}$ die gegebene (ν)-Äquivalenz bezeichnet, in einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes $x \in X$ einen Isomorphismus zu einer Umgebung von $x' = f_{(\nu)}(x) \in X'$ konstruieren, der die gegebene (ν)-Äquivalenz respektiert. Wir überdecken nun X mit offenen Mengen U_i, versehen mit Isomorphismen $f_i : U_i \xrightarrow{\sim} U_i' \subseteq X'$, die mit $f_{(\nu)}$ verträglich sind. Nun wird durch $f_i^{-1} f_j$ ein Element von $\mathrm{Aut}(\nu)(U_i \cap U_j)$ definiert, das wir mit f_{ij} bezeichnen. (f_{ij}) bildet offenbar einen Kozyklus dieser Garbe auf X. Haben wir nun von vornherein ν hinreichend groß gewählt, so folgt nun nach 7.7.3. für eine hinreichend feine Überdeckung (U_i), daß der Kozyklus (f_{ij}) trivial ist. Folglich existieren $p_i \in \mathrm{Aut}(\nu)(U_i)$ mit

$$p_i^{-1} f_{ij} p_j = \mathrm{id},$$

also

$$p_i^{-1} f_i^{-1} f_j p_j = \mathrm{id}, \quad \text{d. h.} \quad f_j p_j = f_i p_i,$$

und daher lassen sich die Morphismen

$$f_i p_i : (U_i)_{(\nu+1)} \xrightarrow{\sim} (U_i')_{(\nu+1)}$$

zusammenkleben zu einem Isomorphismus

$$(X, L)_{(\nu+1)} \to (X', L')_{(\nu+1)},$$

der $f_{(\nu)}$ respektiert, q.e.d.

Literatur

[1] Akizuki, Y., Theorems of Bertini on linear systems, J. Math. Soc. Japan **3** (1961), 170–180.

[2] Artin, M., The etale topology of schemes, Berichte des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Moskau 1966, 44–56.

[3] Artin, M., On the solutions of analytic equations, Inventiones math. **5** (1968), 277–291.

[4] Artin, M., Grothendieck-topologies, Mimeographed Notes, Harvard 1962.

[5] Artin, M., Algebraic approximation of formal moduli, I. Global Analysis, A Collection of Mathematical Papers in Honor of K. Kodaira, Edited by D. C. Spencer and S. Iyanaga, Tokyo 1969, p. 21–71.

[6] Artin, M., Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES, No. 36 (1969), 23–58.

[7] Artin, M., The implicit function theorem in algebraic geometry, Papers presented at the Bombay Colloquium, Oxford–Bombay 1969, p. 13–34.

[8] Artin, M., Algebraization of formal moduli II, Ann. Math. **91** (1970), 88–135.

[9] Artin, M., Construction techniques for algebraic spaces, Actes Congrès Intern. Math. 1970. Paris 1971, Tome 1, 419–423.

[10] Artin, M., Algebraic spaces, Whittemore Lectures, Yale University 1969.

[11] Artin, M., et A. Grothendieck, Cohomologie étale des schémas, Sém. IHES, Bures-sur Yvette 1963/64.

[12] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Paris 1961, chap. 1–7.

[13] Crépeaux, E., Une caractérisation des couples Henseliens, L'Enseignement Math. **13** (1968), 273–279.

[14] Dress, A., Zur Theorie der Henselschen Ringe, Math. Z. **106** (1968), 355–360.

[15] Gerstenhaber, M., A uniform cohomology theory for algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **51** (1966), 626–629.

[16] Grauert, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146** (1962), 331–368.

[17] Greenberg, M., Rational points in Henselian discrete valuation rings, Publ. Math. IHES, No. 23 (1964).

[18] Grothendieck, A., et J. Dieudonné, Eléments de géométrie algébrique, Publ. Math. IHES, No. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960–1968).

[19] Grothendieck, A., Fondaments de la géométrie algébrique, Extraite du Sém. Bourbaki 1957–1962.

[20] Grothendieck, A., Sém. géométrie algébrique, 1960/61, IHES Bures 1961.

[21] Grothendieck, A., Local Cohomology, Lecture Notes, Bd. 41, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

[22] Grothendieck, A., Géométrie formelle et géométrie algébrique, Sém. Bourbaki **11** (1958/59). Fasc. 3, 2ième éd., 182/1–182/28.

[23] Gunning, R. C., and H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Englewood Cliffs 1965.

[24] Hironaka, H., and H. Rossi, On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces, Math. Ann. **156** (1964), 313—333.
[25] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. Math. **79** (1964), 205—326.
[26] Hironaka, H., On some formal imbeddings, J. Math. **12** (1968), 587—602.
[27] Hironaka, H., and H. Matsumara, Formal functions and formal embeddings, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 52—82.
[28] Kaup, B., Über Kokerne und Pushouts in der Kategorie der komplex analytischen Räume, Math. Ann. **189** (1970), 60—76.
[29] Knutson, D., Algebraic Spaces, Ph. D. Thesis, M.I.T. 1968, Lecture Notes, Bd. 203, Berlin—Heidelberg—New York 1971.
[30] Kurke, H., Skripte über die Vorlesung „Etalkohomologie", Humboldt-Universität Berlin 1969.
[31] Kurke, H., Einige Eigenschaften von quasiendlichen Morphismen von Präschemata, Mber. Dt. Akad. Wiss. **9** (1967), 248—257.
[32] Kurke, H., Über quasiendliche Morphismen von Präschemata, Mber. Dt. Akad. Wiss. **10** (1968), 389—393.
[33] Kurke, H., Topologische Methoden in der Theorie der kommutativen Ringe, Math. Nachr. **39** (1969), 33—85.
[34] Kurke, H., Grundlagen der Theorie der Henselschen Ringe und Schemata und ihrer Anwendungen, Habilitationsschrift, Berlin 1969.
[35] Lafon, J. P., Anneaux henséliens, Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 77—107.
[36] Lazard, D., Autour de la platitude, Bull. Soc. Math. France **97** (1969), 81—128.
[37] Мойшезон, Б. Г., Алгебраический аналог компактных комплексных пространств с достаточно большим полем мероморфных функции I—III, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Матем. **33** (1969), 174—238, 323—367, 506—548.
[38] Mumford, D., Introduction to Algebraic Geometry, Preprint.
[39] Nagata, M., Local Rings, New York—London 1962.
[40] Néron, A., Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Math. IHES, No. 21 (1964).
[41] Oort, F., Hensel's lemma and rational points over local rings, Symp. Math. Inst. Naz. die Alta Mat. **3** (1970), 71—80.
[42] Pfister, G., Die Approximation formaler Schnitte, Dissertation, Berlin 1971.
[43] Pfister, G., Algebraische Räume und ihre geometrische Realisierung, Math. Nachr. **57** (1973), 177—182.
[44] Pfister, G., Ringe mit Approximationseigenschaft, Math. Nachr. **57** (1973), 169—175.
[45] Raynaud, M., Travaux récents de M. Artin, Sém. Bourbaki, No. 363 (1968/69).
[46] Raynaud, M., Passage au quotient par une relation d'équivalence plate, Proc. Conf. on Local Fields, held at Driebergen 1966, p. 78—85.
[47] Raynaud, M., Anneaux Locaux Henséliens, Lecture Notes, Bd. 169, Berlin—Heidelberg—New York 1970.
48] Rees, D., A note on analytically unramified local rings, J. London Math. Soc. **36** (1961), 24—28.
[49] Rim, Dock San, Analytic equivalence of a singular set, Amer. J. Math. **90** (1968), 463—475.
[50] Roczen, M., Henselsche Schemata und (ν)-Äquivalenz, Dissertation, Berlin 1971.
[51] Šafarevič, I. R. (Hrsg.), Algebraische Flächen, Leipzig 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).
[52] Samuel, P., Algébricité de certains points singuliers algébroides, J. Math. Pures Appl. **35** (1956), 1—6.
[53] Samuel, P., Sur les variétés algébroides, Ann. Math. Inst. Fourier II (1950).
[54] Schlessinger, M., Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 205—222.
[55] Serre, J.-P., Algèbre Locale, Multiplicités, Lecture Notes, Bd. 11, 2ième éd., Berlin—Heidelberg—New York 1965.

[56] Тюрина, Г. Н., Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Матем. **33** (1969), 1026—1058.
[57] Zariski, O., Theory and application of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields, Mem. Amer. Math. Soc. **5** (1951).
[58] Zariski, O., and P. Samuel, Commutative Algebra I, II, New York 1958, 1960.

Namen- und Sachverzeichnis