Inventiones math. 30, 145 – 174 (1975)

Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe

Gerhard Pfister (Berlin) und Dorin Popescu (Bukarest)

1. Einleitung 145
2. Allgemeine Eigenschaften von Ringen mit strenger Approximationseigenschaft 148
3. Beweis des Hauptresultates 149
4. Ein Lemma zur p-Desingularisierung 162
5. Nerons p-Desingularisierung 165
6. Anhang 173

1. Einleitung

Sei A ein lokaler noetherscher Ring, $\underline{m}$ das Maximalideal von A, $\hat{A}$ die Komplettierung von A und A^h die Henselisierung. In dieser Arbeit folgen wir einer Idee von M. Artin, die er auf dem internationalen Mathematikkongreß 1970 in Nice vorgetragen hat: Man untersuche Ringe mit folgender Eigenschaft:

Definition. A ist ein Ring mit strenger Approximationseigenschaft, wenn folgendes gilt:

Seien $Y=(Y_1, \ldots, Y_N)$ einige Variable, $f=(f_1, \ldots, f_m)$ ein System von Polynomen aus $A[Y]$ und sei c eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine Funktion $\vartheta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen) mit der folgenden Eigenschaft:

Für beliebige $\bar{y}=(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ aus A^N mit

$$f(\bar{y}) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{\vartheta(c)}$$

existieren $y=(y_1, \ldots, y_N)$ aus A^N mit

$$f(y)=0$$

und

$$y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^c$$

(d.h. $y_i \equiv \bar{y}_i \bmod \underline{m}^c$ für alle i).

Wenn A ein Ring mit strenger Approximationseigenschaft ist, wollen wir kurz $A \in \mathbf{SAE}$ schreiben, bzw. A einen **SAE**-Ring nennen.

In seiner Arbeit [2] konnte Artin zeigen, daß die Henselisierung eines Polynomenringes über einem Körper in einem Maximalideal ein **SAE**-Ring ist. Wenn A ein henselscher exzellenter diskreter Bewertungsring ist, folgt aus Resultaten von Greenberg [5], daß $A \in \mathbf{SAE}$ ist. Darauf begründet sich die Vermutung von Artin (vgl. [3]), daß die Henselisierung eines Polynomenringes über einem exzellenten diskreten Bewertungsring in einem Maximalideal ein **SAE**-Ring ist. Dieses Problem konnte von einem der Autoren gelöst werden (vgl. [11]).

In unserer Arbeit werden wir nun zunächst einige allgemeine Eigenschaften von **SAE**-Ringen untersuchen. Solche Ringe sind *henselsch* und *universell japanisch*. Weiterhin ist jeder Faktorring eines **SAE**-Ringes ein **SAE**-Ring. Der Hauptteil der Arbeit besteht darin, die **SAE**-Ringe durch eine schwächere Eigenschaft zu charakterisieren:

Definition. A ist ein Ring mit Approximationseigenschaft, wenn folgendes gilt:

Seien $Y=(Y_1, \ldots, Y_N)$ einige Variable, $f=(f_1, \ldots, f_m)$ ein System von Polynomen aus $A[Y]$ und sei c eine natürliche Zahl.

Wenn für ein $\bar{y}=(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N) \in \hat{A}^N$

$$f(\bar{y})=0$$

ist, existieren $y=(y_1, \ldots, y_N)$ aus A^N mit

$$f(y)=0$$

und

$$y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^c \hat{A}.$$

Wenn A ein Ring mit Approximationseigenschaft ist, wollen wir kurz $A \in \mathbf{AE}$ schreiben, bzw. A einen **AE**-Ring nennen.

Das Hauptresultat unserer Arbeit besteht nun darin nachzuweisen, *daß* $A \in \mathbf{SAE}$ *ist genau dann, wenn* $A \in \mathbf{AE}$ ist[1].

Damit ist auch ein Problem gelöst, das Raynaud in seiner Arbeit [13] gestellt hat: *Sei* **A** *ein* **AE**-*Ring*, f *und* Y *wie zuvor*, $\bar{y}^{(n)}$ *eine Folge aus* A^N *mit* $f(\bar{y}^{(n)}) \equiv 0 \bmod \underline{m}^n$. *Gibt es dann eine formale Lösung dieses Gleichungssystems?*

Die eine Richtung der oben genannten Äquivalenz ist trivial, die andere Richtung führt man darauf zurück, zu zeigen:

Ein formaler Potenzreihenring $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ *über einem Cohenring* R *ist ein* **SAE**-*Ring*.

Der Beweis folgt der Idee von Artin [2] unter Benutzung einer Verallgemeinerung von *Nerons p-Desingularisierung* (vgl. [8]), die im fünften Teil der Arbeit gegeben wird. Sie stützt sich auf Methoden und Ergebnisse aus der Thesis eines

---

[1] Nach Fertigstellung des Manuskripts haben wir von M. van der Put eine Arbeit zugesandt bekommen, in der für den Fall kompletter lokaler Ringe gleicher Charakteristik das gleiche Resultat mit etwas anderen Mitteln bewiesen wird. Wir wollen an dieser Stelle auf diese Arbeit hinweisen: M. van der Put, A problem on coefficient fields and equations over local rings, erscheint demnächst. Gleichzeitig wollen wir uns bei Herrn von der Put bedanken, der uns freundlicherweise auf einen Fehler im Manuskript aufmerksam machte.

der Autoren, die in [11] publiziert sind. Dort ist die p-Desingularisierung noch wesentlich weiter ausgeführt.

Was ist nun der geometrische Hintergrund unserer Fragestellung? Betrachten wir einmal folgendes Problem:

Sei S ein Schema von endlichem Typ über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring. Sei X ein S-Schema von endlichem Typ, V eine abgeschlossene Teilmenge von S, so daß der Strukturmorphismus $X \to S$ einen Schnitt s besitzt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] & & S \\
& V \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Wann kann man den Schnitt s auf ganz S oder wenigstens auf eine Etalumgebung von V fortsetzen? Das ist ein im allgemeinen recht schwieriges Problem, wenn sich der Satz über implizite Funktionen nicht anwenden läßt, d.h. wenn wir nicht wissen, ob p glatt ist. Wir wollen deshalb zusätzlich fordern, daß sich s über einen formalen Schnitt oder einen Schnitt einer durch V definierten infinitesimalen Umgebung hoher Ordnung faktorisieren läßt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & S \\
& V_n \arrow[u, hook] \arrow[ul, dashed] \\
& V \arrow[u] \arrow[uul, "s"]
\end{tikzcd}$$

(wenn V durch die Idealgarbe J von O_s definiert ist, ist V_n durch J^n definiert). So erhalten wir lokal affin folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
A[Y]/I & A \arrow[l] \arrow[d] \\
& A/J^n \arrow[d] \\
& A/J
\arrow[from=1-1, to=2-2, dashed]
\arrow[from=1-1, to=3-2]
\end{tikzcd}$$

I definiert ein Gleichungssystem, das mod J^n für große n eine Lösung aus A hat. Fortsetzung des Schnittes bedeutet nun eine Lösung aus A zu finden.

Wir wollen einmal den Spezialfall betrachten, daß V nur aus einem Punkt besteht. Die Henselisierung von A in J liefert dann einen Ring, der die strenge Approximationseigenschaft hat. Wir können deshalb eine strenge Etalumgebung U von V finden, auf die wir den Schnitt s fortsetzen können. Solche Fortsetzungen werden auch lokale Schnitte bezüglich der Etaltopologie genannt (vgl. Artin [4]).

Derartige Untersuchungen finden u.a. Anwendung bei der Algebraisierung formaler Deformationen (vgl. zum Beispiel [7]).

Durch die Äquivalenz von **AE** *und* **SAE** *erhalten wir eine große Klasse von Beispielen von Ringen mit* **SAE**:

noethersche komplette lokale Ringe,

henselsche Abschließungen von Ringen vom endlichen Typ über einem Körper oder einem exzellenten diskreten Bewertungsring in einem Maximalideal (*vgl.* [2], [11]),

konvergente Potenzreihenringe (*vgl.* [1]),

henselsche eingeschränkte Potenzreihenringe über einem henselschen exzellenten diskreten Bewertungsring (*d.h. Ringe vom Typ* $\{f, f \in R[[T_1, \ldots, T_n]], f$ *algebraisch modulo* p^m *für alle* $m > 0$, R *henselscher exzellenter diskreter Bewertungsring mit Bewertung* $p\}$) (*vgl.* [10]).

2. Allgemeine Eigenschaften von Ringen mit strenger Approximationseigenschaft

2.1. *Bemerkung.* Jeder Ring mit **SAE** ist ein Ring mit **AE.** Der Beweis ist trivial.

2.2. **Korollar.** *Sei* $A \in$ **SAE**, *dann gilt:*

(1) *A ist universell japanisch,*

(2) *A ist henselsch,*

(3) *wenn A reduziert ist, ist $\hat{A}$ reduziert,*

(4) *wenn A Integritätsbereich ist, ist A in $\hat{A}$ algebraisch abgeschlossen.*

Den Beweis des Korollars, der zum Teil auf Raynaud (vgl. [12]) zurückgeht, kann man in [7] nachlesen, da diese Eigenschaften auch für **AE**-Ringe gelten.

2.3. **Satz.** *Sei* $A \in$ **SAE** *und* $\underline{a}$ *ein Ideal von* A, *dann ist* $A/\underline{a} \in$ **SAE**.

Beweis. Sei $f_1, \ldots, f_m$ ein Gleichungssystem aus $A/\underline{a}[Y_1, \ldots, Y_N]$, sei $F_1, \ldots, F_m$ eine Liftung dieses Gleichungssystems auf den Ring $A[Y_1, \ldots, Y_N]$. Sei weiterhin $g_1, \ldots, g_t$ ein Erzeugendensystem von $\underline{a}$. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem

$$G_i = F_i + \sum_j T_{ij} g_j \qquad i = 1, \ldots, m$$

aus $A[Y_1, \ldots, Y_N, T_{11}, \ldots, T_{mt}]$. Sei ϑ die wegen der **SAE**-Eigenschaft von A dem System der G_i entsprechende Funktion, dann ist ϑ auch eine Funktion, die für das Gleichungssystem der f_i die **SAE** liefert:

Sei nämlich $f_i(\bar{y}) \equiv 0 \bmod (\underline{m}/\underline{a})^{\vartheta(c)}$ für gewisse $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N)$ aus $(A/\underline{a})^N$. Sei $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N)$ eine Liftung der $\bar{y}_i$ auf A, dann ist $F_i(\tilde{y}) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{\vartheta(c)} + \underline{a}$, d.h. $F_i(y) + \sum_j \bar{t}_{ij} g_j \in \underline{m}^{\vartheta(c)}$ für geeignete $\bar{t}_{ij}$. Da $A \in$ **SAE** ist, gibt es eine Lösung $y = (y_1, \ldots, y_N)$ und $t = (t_{11}, \ldots, t_{mt})$ aus A für das Gleichungssystem $G_i = 0$ mit $y_i \equiv \tilde{y}_i \bmod \underline{m}^c$. Die Restklassen der $y_i \bmod \underline{a}$ ergeben dann die gesuchte Lösung für das Gleichungssystem der f_i.

2.4. **Theorem.** *Jeder noethersche lokale Ring mit* **AE** *ist auch ein Ring mit* **SAE**.

Beweis. Sei A ein solcher Ring mit **AE**. Um zu zeigen, daß A ein Ring mit **SAE** ist, genügt es offenbar zu zeigen, daß $\hat{A}$ ein Ring mit **SAE** ist. Wir müssen also folgendes beweisen:

Jeder komplette lokale noethersche Ring ist ein **SAE**-*Ring.*

Nach Satz 2.3 und dem Struktursatz von Cohen für komplette lokale Ringe (vgl. [6]) genügt es zu zeigen:

Jeder Potenzreihenring über einem Cohenring R ist aus **SAE**. Dazu zeigen wir allgemeiner das folgende Theorem:

2.5. **Theorem.** *Sei R ein kompletter diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0 und mit der Bewertung p. Seien $T=(T_1, \dots, T_n)$, $Y=(Y_1, \dots, Y_N)$, $X=(X_1, \dots, X_{N'})$ einige Variable und $A=R[[T]]$, $\underline{m}=(p, T)$. Seien weiterhin $f=(f_1, \dots, f_m)$ Potenzreihen aus $A[[Y]][X]$ und sei c eine natürliche Zahl.*

Dann gibt es eine Funktion $\vartheta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für beliebige $\bar{y}=(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N)$ aus $\underline{m}A^N$ und $\bar{x}=(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{N'})$ aus $A^{N'}$ mit

$$f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{\vartheta(c)}$$

existieren $y=(y_1, \dots, y_N)$ aus $\underline{m}A^N$ und $x=(x_1, \dots, x_{N'})$ aus $A^{N'}$ mit

$$f(y, x)=0$$

und

$$y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^c, \qquad x \equiv \bar{x} \bmod \underline{m}^c.$$ [1]

Den Beweis dieses Theorems werden wir im nächsten Teil geben. Er basiert auf folgender Idee:

Wir gehen aus von der Situation $f(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0 \bmod \underline{m}^M$ für großes M. Zunächst werden wir zeigen, daß man sich auf den Fall beschränken kann, daß $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod (T)^M$ ist. Dann betrachten wir die Jacobische Matrix

$$J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}(\bar{y}, \bar{x}), \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(\bar{y}, \bar{x})\right).$$

Ideal wäre es, wenn sie $\bmod(p, T^M)$ vollen Rang hätte.

In diesem Fall kann man durch Induktion über die Höhe des von den f_i erzeugten Ideals und über die Anzahl der T_i das Problem auf die Anwendung des Newtonschen Lemmas (vgl. [1], [2], [7] oder [11]) zurückführen.

Im allgemeinen werden aber alle Minoren der obigen Matrix modulo (p^t, T^M) verschwinden, d.h. es liegt eine p-Singularität der Ordnung t vor. Diesen Fall reduzieren wir durch eine verallgemeinerte p-Desingularisierung nach Neron auf den vorigen.

3. Beweis des Hauptresultates (Theorem 2.5.)

(1) Reduktion auf den Fall, daß f ein Primideal ist mit $f \cap A=0$

3.1. **Lemma.** *Für jedes Ideal $\underline{a}$ von $A[[Y]][X]$ (Bezeichnungen von 2.5) gibt es eine endliche Menge von Primidealen*

$$F(\underline{a}) \subseteq \{\underline{q}, \underline{q} \in \operatorname{Spec} A[[Y]][X], \underline{q} \cap A=0\}$$

[1] Der Kürze halber bezeichnen wir hier das N-fache direkte Produkt von $\underline{m}A$ mit $\underline{m}A^N$.

und eine Funktion $\theta_{\underline{a}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit der folgenden Eigenschaft: Sei* $c \in \mathbb{N}$ *und* $y \in \underline{m} A^N$, $x \in A^{N'}$ *mit* $\underline{a}(y,x) \equiv 0\ \underline{m}^{\theta_{\underline{a}}(c)}$ (*bzw.* $\equiv 0 \bmod T^{\theta_{\underline{a}}(c)}$), dann gibt es ein $\underline{q} \in F(\underline{a})$, $\underline{q} \supseteq \underline{a}$ *und* $\underline{q}(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^c$ (*bzw.* $\equiv 0 \bmod T^c$).

(Dabei verstehen wir unter $\underline{a}(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^c$, daß $g(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^c$ ist für alle Potenzreihen $g \in \underline{a}$.)

Wenn im folgenden das Ideal $\underline{a}$ fixiert ist, werden wir statt $\theta_{\underline{a}}$ kurz θ schreiben.

Beweis. Wenn $\underline{a} \cap A \neq 0$ ist, setzen wir $F(\underline{a}) = \emptyset$ und $\theta(c) = \max\{c, s+1, t+1\}$, wobei s die Ordnung einer von Null verschiedenen Potenzreihe aus $A \cap \underline{a}$ ist und t dadurch definiert ist, daß für ein $g \in \underline{a} \cap A$ gilt:

$$g \in \underline{m}^t, \quad g \notin \underline{m}^{t+1}.$$

Wenn $\underline{a} \cap A = 0$ ist, setzen wir $F(\underline{a}) = \{\underline{q}, \underline{q} \in \operatorname{Spec} A[[Y]][X], \underline{q} \cap A = 0, \underline{q}$ kommt in der Primidealzerlegung von $\sqrt{\underline{a}}$ vor$\}$. Da $\underline{a} \cap A = 0$ ist, ist $F(\underline{a}) \neq \emptyset$. Sei nun e die kleinste natürliche Zahl mit $\sqrt{\underline{a}}^e \subseteq \underline{a}$, k die Anzahl der Primideale in der Primidealzerlegung von $\sqrt{\underline{a}}$, s die kleinste natürliche Zahl, so daß falls $\underline{q} \cap A \neq 0$ für ein Primideal der Primidealzerlegung von $\sqrt{\underline{a}}$ ist, in $\underline{q} \cap A$ eine von Null verschiedene Potenzreihe der Ordnung $\leqq s-1$ existiert. Sei weiterhin t die kleinste natürliche Zahl, so daß falls $\underline{q} \cap A \neq 0$ ist für ein Ideal der Primidealzerlegung von $\sqrt{\underline{a}}$, in $\underline{q} \cap A$ eine Potenzreihe liegt, die nicht in $\underline{m}^t$ ist.

Nun definieren wir $\theta(c) = \max\{\text{cek}, \text{kes}, \text{ket}\}$.

Sei nun $x \in A^{N'}$ und $y \in \underline{m} A^N$ und $\underline{a}(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{\theta(c)}$ (bzw. $\equiv 0 \bmod T^{\theta(c)}$).

Aus der Definition von e folgt $\sqrt{\underline{a}}(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{\theta(c)/e}$ (bzw. $\equiv 0 \bmod T^{\theta(c)/e}$). Nun wissen wir, daß für die Ideale der Primidealzerlegung von $\sqrt{\underline{a}}$ gilt $\prod_i \underline{q}_i \subseteq \sqrt{\underline{a}}$ Es ist also $\prod \underline{q}_i(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{\theta(c)/e}$ (bzw. $\equiv 0 \bmod T^{\theta(c)/e}$). Daraus folgt, daß für ein i $\underline{q}_i(y,x) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{c'}$ (bzw. $\equiv 0 \bmod T^{c'}$) gilt mit $c' = \max\{s, c, t\}$. Andererseits muß für diese $\underline{q}_i$ gelten $\underline{q}_i \cap A = 0$, weil dies sonst ein Widerspruch zur Definition von s bzw. t wäre.

(2) Der Fall $n=0$

Wir müssen hier für unsere Zwecke das Resultat von Greenberg [5] etwas verallgemeinern.

Beim Beweis des Theorems 2.5 für den Fall $n=0$, d.h. $A=R$, können wir uns nach Lemma 3.1 zunächst auf den Fall beschränken, daß die f_i ein Primideal $\underline{q}$ erzeugen mit $\underline{q} \cap R = 0$. Nach Lemma 6.1 existiert ein R-Automorphismus φ von $R[[Y]]$, so daß $\varphi(\underline{q})$ über $R[[Y_1, \ldots, Y_m]][Y_{m+1}, \ldots, Y_N, X]$ definiert ist und $\varphi(\underline{q}) \cap R[[Y_1, \ldots, Y_m]] = 0$. Sei also o.B.d.A. $N'=0$ und $\underline{q}$ über

$$R[[Y_1, \ldots, Y_m]][Y_{m+1}, \ldots, Y_N]$$

definiert mit $\underline{q} \cap R[[Y_1, \ldots, Y_r]] = 0$. Da R von der Charakteristik 0 ist und $\underline{q} \cap R = 0$ ist, existieren nach dem Jacobinschen Kriterium (vgl. Anhang) $g_1, \ldots, g_r$ aus $\underline{q}$ (r = Höhe von $\underline{q}$) und ein $r \times r$-Minor M der Matrix $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right)_{j \geqq m+1}$ mit $M \notin \underline{q}$. Wir schließen jetzt induktiv über $N - ht(\underline{q})$; ($ht(\underline{q})$ *ist hier stets die Höhe von* $\underline{q}$).

Wenn die Höhe von $\underline{q}$ gleich N ist, folgt $\underline{q} = (Y_1, \ldots, Y_N)$ und der Satz ist trivialerweise richtig.

3.2. **Lemma.** *Sei* $f=(f_1,\dots,f_r)$ *ein System von r Potenzreihen aus*

$$R[[Y_1,\dots,Y_m]][Y_{m+1},\dots,Y_N] \quad \textit{mit } f\cap R[[Y_1,\dots,Y_m]]=0,$$

$r\leqq N-m$, *und M ein* $r\times r$-*Minor der Matrix* $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)_{j\geqq m+1}$. *Dann gibt es eine Funktion* $\mu\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *mit der folgenden Eigenschaft:* $\mu(c,t)\geqq c$, $\mu(c,t)\geqq t$ *für beliebige* c, $t\in\mathbb{N}$. *Für beliebiges* $\bar{y}\in pR^N$ *mit* $f(\bar{y})\equiv 0 \bmod p^{\mu(c,t)}$ *und* $M(\bar{y})\not\equiv 0 \bmod p^t$ *existiert ein* $y\in R^N$ *mit* $y\equiv\bar{y} \bmod p^c$ *und* $f(y)=0$.

Wenn das Lemma bewiesen ist, ist der Satz klar:

Dazu betrachten wir $F(\underline{q}+(M))$. Wenn $F(\underline{q}+(M))$ nicht leer ist, gibt es ein $\underline{q}'\in F(\underline{q}+(M))$, $\underline{q}'\supseteq\underline{q}$ und $ht(\underline{q}')>ht(\underline{q})$. Damit gilt nach Induktionsvoraussetzung der Satz für $\underline{q}'$.

Sei $\theta=\theta_{\underline{q}+(M)}$ die nach Lemma 3.1 zu $F(\underline{q}+(M))$ gehörige Funktion. Wenn nun $F(\underline{q}+(M))=\emptyset$ ist, d.h. $\underline{q}+(M)\cap R\neq 0$, dann gibt es ein c_0, so daß $\underline{q}(\bar{y})+M(\bar{y})\not\equiv 0 \bmod p^{c_0}$ für alle $\bar{y}\in R^N$ erfüllt ist. Sei nun $\underline{q}_0\cap\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m=\sqrt{(g_1,\dots,g_r)}$ die Primidealzerlegung und $\underline{q}=\underline{q}_0$. Sei weiterhin d wie folgt definiert:

Wenn $m=0$ ist, setzen wir $d=1$. Wenn $m\geqq 1$ ist, sei d die kleinste Zahl, für die $M^d\in\underline{q}+(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)$ ist. Solch ein d existiert, da $\sqrt{(g_1,\dots,g_r)}$ kein Primideal ist, und folglich $(R[[Y]]/(g_1,\dots,g_r))_{\underline{p}}$ kein Integritätsbereich für alle Primideale $\underline{p}\supseteq\underline{q}+(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)$. Wenn nämlich $M\notin\sqrt{\underline{q}+(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)}$ wäre, folgte aus dem Jacobischen Kriterium (vgl. Anhang), daß der vorige Ring regulär wäre. Das ist ein Widerspruch.

Mit den so definierten Größen sind wir nunmehr in der Lage für unser $\underline{q}$ die Funktion ϑ zu definieren:

Falls $F(\underline{q}+(M))=\emptyset$ ist, definieren wir $\vartheta(c)=\mu(c\,c_0\,d,c_0)$, und falls $F(\underline{q}+(M))\neq\emptyset$ definieren wir

$$\vartheta(c)=\max_{\underline{q}'}\{\mu(d\theta\,\vartheta_{\underline{q}'}(c),\theta\,\vartheta_{\underline{q}'}(c)),\mu(dc,\theta\vartheta_{\underline{q}'}(c))\},$$

wobei $\vartheta_{\underline{q}'}$ die nach Theorem 2.5 zu $\underline{q}'$ aus $F(\underline{q}+(M))$ gehörige Funktion ist.

Sei nun ein $\bar{y}\in pR^N$ gegeben mit $\underline{q}(\bar{y})\equiv 0 \bmod p^{\vartheta(c)}$. Wenn im zweiten Fall $M(\bar{y})\equiv 0 \bmod p^{\theta\vartheta_{q'}(c)}$ ist, finden wir nach Induktionsvoraussetzung ein $y\in R^N$ mit $\underline{q}'(y)=0$ für ein $\underline{q}'\in F(\underline{q}+(M))$ und $y\equiv\bar{y} \bmod p^c$. Da $\underline{q}\subseteq\underline{q}'$ ist sind wir dann fertig. Wir können also annehmen, daß $M(\bar{y})\not\equiv 0 \bmod p^{\theta\vartheta_{q'}(c)}$ ist. Dann gibt es nach Lemma 3.2 ein $y\in R^N$ mit $g_i(y)=0$ für $i=1,\dots,r$ und $y\equiv\bar{y} \bmod p^{c''}$, wobei $c''=\max\{d\theta\,\vartheta_{\underline{q}'}(c),dc\}$ ist. Wir wollen zeigen, daß $\underline{q}(y)=0$ ist. Wenn $m=0$ ist, ist das klar. Sei also $m\geqq 1$. Dann wissen wir, daß $M^d\in\underline{q}+(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)$ ist; sei $M^d=M_1+M_2$ mit $M_1\in\underline{q}$ und $M_2\in(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)$.

Nun ist $M_1(y)\equiv M_1(\bar{y})\equiv 0 \bmod p^{c''}$. Wäre nun $M_2(y)\equiv 0 \bmod p^{c''}$, würde folgen, daß $M(y)\equiv 0 \bmod p^{\theta\vartheta_{q'}(c)}$ ist, was aber ein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme ist. Damit muß $M_2(y)\not\equiv 0 \bmod p^{c''}$ sein, d.h. insbesondere ist $M_2(y)\neq 0$.

Nun ist $\underline{q}(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)\subseteq\underline{q}\cap(\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m)=\sqrt{(g_1,\dots,g_r)}\subseteq\mathrm{Kern}(Y\mapsto y)$. Da $\underline{q}_1\cap\cdots\cap\underline{q}_m\nsubseteq\mathrm{Kern}(Y\mapsto y)$ ist, folgt $\underline{q}(y)=0$.

Damit ist das Theorem 2.5 für den Fall $A=R$ bewiesen.

Wir müssen noch Lemma 3.2 beweisen.

Wir führen Lemma 3.2 direkt auf das Newtonsche Lemma zurück (vgl. [1, 2, 7, 11]). Wir benötigen es in der folgenden Form:

3.3. **Newtonsches Lemma.** *Seien A, Y, X, f wie in Theorem 2.5. Wir setzen zusätzlich voraus, daß die Anzahl der $f_i \leqq N+N'$ ist. Sei D ein $m \times m$-Minor der Matrix* $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$.

Wenn für ein $\bar{y} \in \underline{m} A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod D^2(\bar{y}, \bar{x})\, \underline{m}^c$ gilt, dann existieren $y \in \underline{m} A^N$, $x \in A^{N'}$ mit $f(y, x) = 0$ und $y \equiv \bar{y} \bmod D(\bar{y}, \bar{x})\, \underline{m}^c$, $x \equiv \bar{x} \bmod D(\bar{y}, \bar{x})\, \underline{m}^c$.

Das Lemma ist in der vorliegenden Form in den oben zitierten Arbeiten zwar nicht bewiesen, da die Gleichungen formale Potenzreihen sind, man kann aber den Beweis direkt übertragen, da über A der Satz über implizite Funktionen gilt.

Wir definieren nun $\mu(c, t) = 2t + c$. Sei nun $f(\bar{y}) \equiv 0 \bmod p^{\mu(c,t)}$ für ein $\bar{y} \in p R^N$ und $M(\bar{y}) \not\equiv 0 \bmod p^t$. Dann ist $M(\bar{y}) = p^x \cdot$ Einheit mit $x < t$. Daraus folgt, daß $M(\bar{y})^2\, p^c$ die $f_i(\bar{y})$ teilt für alle i. Damit sind die Voraussetzungen des Newtonschen Lemmas erfüllt und Lemma 3.2 ist bewiesen.

Bemerkung. Man könnte eventuell das Greenbergsche Resultat in dieser Form auch etwas einfacher beweisen. Wir haben diesen Beweis gewählt, weil er genau die Idee des folgenden allgemeinen Beweises widerspiegelt.

(3) Reduktion auf den Fall $f(\bar{y}) \equiv 0 \bmod T^M$

3.4. **Lemma.** *Seien A, Y, X, f wie in Theorem 2.5. Es existiert eine Funktion $\varepsilon\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Für alle $\bar{y} \in \underline{m} A^N$ und $\bar{x} \in A^{N'}$ mit $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod (p^{\varepsilon(c,u)}, T^u)$ existiert ein *$y \in \underline{m} A^N$, $x \in A^{N'}$ mit $f(y, x) \equiv 0 \bmod T^u$ und $y \equiv \bar{y} \bmod p^c$, $x \equiv \bar{x} \bmod p^c$.*

Beweis. Wir führen neue Variable $Z_{j,k_1,\ldots,k_n}$ ein, $j = 1, \ldots, N$, $k_1, \ldots, k_n \geqq 0$. Dann machen wir die Substitution

$$Y_j^+ = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geqq 0} Z_{j,k_1,\ldots,k_n} T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n}$$

für die Y_j in die Potenzreihen f_i. Analog substituieren wir X^+ für X vermittels Z' und erhalten

$$f_j(Y^+, X^+) = \sum_{r_1,\ldots,r_n \geqq 0} G_{j,r_1,\ldots,r_n}(Z, Z')\, T_1^{r_1} \ldots T_n^{r_n}.$$

Wir definieren nun ε wie folgt:

$\varepsilon(c, u)$ sei die nach Theorem 2.5 für den Fall $n = 0$ dem System $G(Z, Z') = (G_{j,r_1,\ldots,r_n}(Z, Z'))$ $j = 1, \ldots, m$, $r_1 + \cdots + r_n \leqq u$, $r_i \geqq 0$ zugeordnete Funktion.

Wir müssen nun zeigen, daß die so definierte Funktion ε die Bedingungen des Lemmas erfüllt.

Sei also $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod (p^{\varepsilon(c,u)}, T^u)$ für ein $\bar{y} \in \underline{m} A^N$ und $\bar{x} \in A^{N'}$. Wir können die $\bar{y}_j$ in der Form

$$\bar{y}_j = \sum \bar{z}_{j,k_1,\ldots,k_n} T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n}$$

schreiben mit $\bar{z}_{j,k_1,\ldots,k_n} \in R$. Wir setzen $\bar{z} = (\bar{z}_{j,k_1,\ldots,k_n})$ $j=1,\ldots,N$, $k_1+\cdots+k_n \leqq u$. Analog verfahren wir mit $\bar{x}$. Nun sehen wir sofort, daß $G(\bar{z},\bar{z}') \equiv 0 \bmod p^{\varepsilon(c,u)}$ ist. Da wir unser Theorem für $n=0$ schon verifiziert haben, existieren z, $z' \in R$ mit $G(z,z')=0$ und $z \equiv \bar{z} \bmod p^c$, $z' \equiv \bar{z}' \bmod p^c$.

Nun setzen wir für $k_1+\cdots+k_n > u$

$$\bar{z}_{j,k_1,\ldots,k_n} = z_{j,k_1,\ldots,k_n} \quad \text{und}$$

$$y_j = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geqq 0} z_{j,k_1,\ldots,k_n} T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n}.$$

Analog verfahren wir mit x.

Mit dieser Definition ist klar, daß $f(y,x) \equiv 0 \bmod T^u$ ist und $y \equiv \bar{y} \bmod p^c$, $x \equiv \bar{x} \bmod p^c$ für $y=(y_1,\ldots,y_N)$ und $x=(x_1,\ldots,x_{N'})$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nach diesem Schritt können wir folgende Situation voraussetzen:

Das Theorem 2.5 ist für den Fall $n=0$ bewiesen; die Gleichungen f_i erzeugen ein Primideal $\underline{q}$ mit $\underline{q} \cap A = 0$; es gibt einen $r \times r$-Minor M der Jacobischen Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$, der nicht in $\underline{q}$ liegt ($r = ht(\underline{q})$); o.B.d.A. können wir annehmen, daß M durch $f_1,\ldots,f_r$ definiert ist; weiterhin können wir uns bei unseren Untersuchungen auf den Fall beschränken, daß $\underline{q}(\bar{y},\bar{x})$ in einer genügend hohen Potenz von T liegt. Um nun analog zum Fall $n=0$ vorgehen zu können, müssen wir noch gewährleisten, daß $M(\bar{y},\bar{x})$ nicht durch p teilbar ist, d.h. daß keine „p-Singularität" vorliegt.

(4) Auflösung der p-Singularitäten von $\underline{q}$

3.5. *Definition.* Sei $\underline{q}$ ein Primideal in $A[[Y]][X]$, $\bar{y} \in \underline{m}A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$, t eine natürliche Zahl. Wir sagen $\underline{q}$ hat eine p-Singularität der Ordnung t in $\bar{x}$, $\bar{y}$, wenn für jeden $r \times r$-Minor M der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$ (mit $\underline{q}=(f_1,\ldots,f_m)$, $r=ht(\underline{q})$) gilt:

$$M(\bar{y},\bar{x}) \equiv 0 \bmod (p, T^t).$$

Um eine p-Desingularisierung vornehmen zu können, müssen wir nun noch ein Maß für die p-Singularitäten einführen: die Länge $l(t,\underline{q},\bar{y},\bar{x})$.

3.6. *Definition.* Seien $\underline{q}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$, t wie in 3.5. Wir sagen $\underline{q}$ hat eine p-Singularität der Ordnung t und der Länge $l(t,\underline{q},\bar{y},\bar{x})$ in $\bar{y}$, $\bar{x}$, wenn für jeden $r \times r$-Minor M der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j^2}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k^2}\right)$ für alle Erzeugendensysteme $(f_1,\ldots,f_m)$ von $\underline{q}$ gilt:

$$M(\bar{y},\bar{x}) \equiv 0 \bmod (p^{l(t,\underline{q},\bar{y},\bar{x})}, T^t)$$

und es einen solchen Minor M' gibt mit

$$M'(\bar{y},\bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p^{l(t,\underline{q},\bar{y},\bar{x})+1}, T^t);$$

dabei ist wieder $r = ht(\underline{q})$.

Wir werden jetzt unter Vergrößerung der Anzahl N' der X die p-Singularitäten schrittweise auflösen:

3.7. **Satz** (Nerons p-Desingularisierung). *Sei* $\underline{q} \subseteq A[[Y]][X]$ *ein Primideal, dann existiert eine endliche Menge von Primidealen*

$$H(\underline{q}) \subseteq \{\underline{q}', \underline{q}' \in \operatorname{Spec} A[[Y]][X, Z], Z = (Z_1, \dots, Z_{N+N'}), \underline{q}' \supseteq \underline{q}, \\ ht(\underline{q}') = ht(\underline{q}) + N + N'\}$$

und für jede monoton steigende Funktion $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi \geqq 1_{\mathbb{N}}$ *gibt es eine Funktion* $\beta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit der folgenden Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl* t *und jedes* $\bar{y}$ *aus* $\underline{m}A^N$ *und* $\bar{x} \in A^{N'}$ *mit* $\underline{q}(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod T^{\beta(t)}$ *und* $0 \neq l(t, \underline{q}, \bar{y}, \bar{x}) < \infty$ *existieren ein* $\underline{q}' \in H(\underline{q})$, *ein* $\lambda \in \mathbb{N}$ *und ein* $\bar{z} \in A^{N+N'}$ *mit*

$$\underline{q}'(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}) \equiv 0 \bmod T^{\varphi(\lambda)}$$

und

$$l(\lambda, \underline{q}', \bar{y}, \bar{x}, \bar{z}) < l(t, \underline{q}, \bar{y}, \bar{x}).$$

Wir werden diesen Satz im 5. Teil unserer Arbeit beweisen. Auf seiner Grundlage können wir nun im Beweis von Theorem 2.5. fortfahren.

(5) Induktion über n und über $N - ht(\underline{q})$

3.8. **Lemma.** *Wir nehmen an, Theorem 2.5. sei für weniger als n Variable T_i bewiesen. Sei $\underline{q}$ ein Primideal aus $A[[Y]][X]$ mit $\underline{q} \cap A = 0$. Dann existiert für beliebige t eine Funktion $\mu_t: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mu_t(c, s) \geqq s$ für alle s, $c \in \mathbb{N}$ und der folgenden Eigenschaft: (F_t): Sei $\bar{y} \in \underline{m}A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ beliebig gegeben mit*

$$\underline{q}(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod T^{\mu_t(c, \gamma)}$$

und $l(\gamma, \underline{q}, \bar{y}, \bar{x}) \leqq t$, dann existiert ein $y \in \underline{m}A^N$ und $x \in A^{N'}$ mit $\underline{q}(y, x) = 0$ und $y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^c$, $x \equiv \bar{x} \bmod m^c$.

Wir wollen einmal annehmen, das Lemma 3.8. sei bewiesen und daraus unser Theorem 2.5. folgern:

Wir schließen induktiv über $d = N - N' - r$ mit $r = ht(\underline{q})$. Dazu betrachten wir $F(\underline{q} + (M))$ und $\theta_{\underline{q}+(M)}$ aus Lemma 3.1. Sei weiterhin $\varepsilon: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nach Lemma 3.4. zu dem System $\{M, f_1, \dots, f_m\}$ assoziierte Funktion. Wir können weiterhin annehmen, daß wir uns in der am Ende von (3) beschriebenen Situation für das Theorem 2.5. befinden, d.h. die Gleichungen $f_1, \dots, f_m$ erzeugen ein Primideal $\underline{q}$ mit $\underline{q} \cap A = 0$,

$$M = \left| \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k} \right| \qquad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, r', \quad k = r' + 1, \dots, r$$

liegt nicht in $\underline{q}$.

Wenn $F(\underline{q} + (M)) = \emptyset$ ist, setzen wir $\gamma = \theta_{\underline{q}+(M)}(1)$ und $t = \varepsilon(c, \gamma) - 1$.

Sei μ_t die nach Lemma 3.8. zu $\underline{q}$ und t assoziierte Funktion, dann setzen wir $\vartheta_{\underline{q}}(c) = \mu_t(c, \gamma)$. Sei nun für ein $\bar{y} \in \underline{m}A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ $\underline{q}(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_q(c)}$. Dann muß $M(\bar{y}, \bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p^{t+1}, T^{\gamma})$ sein, weil sonst nach Lemma 3.4. ein $\tilde{y} \in A^N$ und $\tilde{x} \in A^{N'}$ existieren würde mit $(\underline{q} + (M))(\tilde{y}, \tilde{x}) \equiv 0 \bmod T^{\gamma}$, was seinerseits $F(\underline{q} + (M)) \neq \emptyset$ nach sich ziehen würde, denn so war ja γ gerade gewählt. Wir haben also folgende

Situation: $\underline{q}(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod T^{\mu_t(c,\gamma)}$ und $l(\gamma,\underline{q},\bar{y},\bar{x})\leqq t$. Nun können wir Lemma 3.8. anwenden und der Satz ist in diesem Fall bewiesen.

Sei nun $F(\underline{q}+(M))\neq\emptyset$. Sei $\bar{\lambda}\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ die Funktion definiert durch $\bar{\lambda}=\max\{\vartheta_{\underline{q}'},\underline{q}'\in F(\underline{q}'+(M))\}$, wobei $\vartheta_{\underline{q}'}$ die nach Theorem 2.5. zu $\underline{q}'$ assoziierte Funktion ist (nach Induktionsvoraussetzung gilt ja das Theorem 2.5. schon für $\underline{q}'$, da $ht(\underline{q}')>ht(\underline{q})$ ist. Wir setzen $\gamma=\theta_{\underline{q}+(M)}(\bar{\lambda}(c))$ und $t=\varepsilon(c,\gamma)-1$. Sei μ_t die nach Lemma 3.8. zu $\underline{q}$ assoziierte Funktion. Wir setzen $\vartheta_{\underline{q}}(c)=\mu_t(c,\gamma)$. Wir müssen nun zeigen, daß die so definierte Funktion $\vartheta_{\underline{q}}$ den Bedingungen des Theorems 2.5. genügt. Sei $\bar{y}\in\underline{m}A^N$ und $\bar{x}\in A^{N'}$ mit $\underline{q}(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{\underline{q}}(c)}$. Wenn $M(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod (p^{t+1},T^{\gamma})$ ist, haben wir $(\underline{q}+(M))(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod (p^{\varepsilon(c,\gamma)},T^{\gamma})$. Damit existiert nach Lemma 3.4. ein $\tilde{y}\in\underline{m}A^N$ und $\tilde{x}\in A^{N'}$ mit $(\underline{q}+(M))(\tilde{y},\tilde{x})\equiv 0 \bmod T^{\gamma}$ und $\tilde{y}\equiv\bar{y} \bmod p^c$, $x\equiv\bar{x} \bmod p^c$. Damit existiert nach der Wahl von γ ein $\underline{q}'\in F(\underline{q}+(M))$ mit $\underline{q}'(\tilde{y},\tilde{x})\equiv 0 \bmod T^{\bar{\lambda}(c)}$. Damit gibt es ein $y\in A^N$ und ein $x\in A^{N'}$ mit $y\equiv\tilde{y} \bmod \underline{m}^c$, $x\equiv\tilde{x} \bmod \underline{m}^c$ und $\underline{q}'(y,x)=0$. Insbesondere ist $\underline{q}(y,x)=0$ und $y\equiv\tilde{y}\equiv\bar{y} \bmod \underline{m}^c$, $x\equiv\tilde{x} \bmod \underline{m}^c$.

Wenn nun $M(\bar{y},\bar{x})\not\equiv 0 \bmod (p^{t+1},T^{\gamma})$ ist, dann haben wir wieder, da $\underline{q}(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod T^{\mu_t(c,\gamma)}$ ist, die Situation des Lemmas 3.8. Damit ist das Theorem 2.5. bewiesen, wenn wir Lemma 3.8. beweisen.

Beweis von Lemma 3.8. Wir wollen für einen Moment annehmen, daß das folgende Lemma richtig ist:

3.9. **Lemma.** *Theorem 2.5. sei für weniger als n Variable T_i bewiesen. Sei $\underline{q}\subseteq A[[Y]][X]$ ein Primideal mit $\underline{q}\cap A=0$. Dann existiert eine Funktion $\mu\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft: Sei $\bar{y}\in\underline{m}A^N$, $\bar{x}\in A^{N'}$ gegeben mit $\underline{q}(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod T^{\mu(c,\gamma)}$ und $l(\gamma,\underline{q},\bar{y},\bar{x})=0$, dann existiert ein $y\in A^N$ und ein $x\in A^{N'}$ mit $\underline{q}(y,x)=0$ und $y\equiv\bar{y} \bmod \underline{m}^c$, $x\equiv\bar{x} \bmod \underline{m}^c$.*

Aus diesem Lemma folgern wir nun 3.8.:

Wir beweisen 3.8. mittels vollständiger Induktion über t. Der Fall $t=0$ ist gerade Lemma 3.9.

Wir nehmen nun an, wir hätten μ_{t-1} definiert und 3.8 sei für $t-1$ bewiesen. Sei nun $H(\underline{q})$ die nach Satz 3.7. zu $\underline{q}$ assoziierte Menge, β die so durch $\mu_{t-1}(c,\_)$ definierte Funktion. Dann definieren wir $\mu_t(c,\gamma)=\beta(\gamma)$.

Sei nun $\underline{q}(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod T^{\mu_t(c,\gamma)}$ und $l(\gamma,\underline{q},\bar{y},\bar{x})\leqq t$, dann existiert nach Satz 3.7. ein $\underline{q}'$ aus $H(\underline{q})$, ein $\lambda\in\mathbb{N}$ und ein $\bar{z}$ aus $A^{N+N'}$ mit $\underline{q}'(\bar{y},\bar{x},\bar{z})\equiv 0 \bmod T^{\mu_{t-1}(c,\lambda)}$ und $l(\lambda,\underline{q}',\bar{y},\bar{x},\bar{z})<l(\gamma,\underline{q},\bar{y},\bar{x})\leqq t$.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist 3.8. bewiesen.

Beweis von 3.9. Wir führen 3.9. auf das folgende Lemma zurück:

3.10. **Lemma.** *Wir nehmen an, 2.5. ist für weniger als n Variable T_i bewiesen. Sei $f=(f_1,\dots,f_r)$ ein System von Potenzreihen aus $A[[Y]][X]$ mit $r\leqq N+N'$. Sei M ein $r\times r$-Minor der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j},\frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$. Dann gibt es eine Funktion $\bar{\mu}\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft: Sei $\bar{y}\in\underline{m}A^N$ und $\bar{x}\in A^{N'}$ gegeben mit $f(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod T^{\bar{\mu}(c,\gamma)}$ und $M(\bar{y},\bar{x})\not\equiv 0 \bmod (p,T^{\gamma})$, dann gibt es ein $y\in A^N$ und ein $x\in A^{N'}$ mit $f(y,x)=0$ und $y\equiv\bar{y} \bmod \underline{m}^c$, $x\equiv\bar{x} \bmod \underline{m}^c$.*

Nehmen wir einmal an, Lemma 3.10. sei bewiesen. Wir werden daraus dann Lemma 3.9. folgern. Der Beweis ist analog zum Beweis vom Fall $n=0$ bei der Reduktion auf Lemma 3.2.

Sei $\underline{q} \subseteq A[[Y]][X]$ ein Primideal mit $\underline{q} \cap A=0$. Um das Jacobische Kriterium anwenden zu können, setzen wir voraus, daß $\underline{q} \cap A[[Y]]=0$ ist. Daß die Behandlung dieses Falles repräsentativ ist zeigt uns Lemma 4.1. Sei $r=ht(\underline{q})$; sei J eine endliche Menge von Erzeugenden von $\underline{q}$. Nach dem Jacobischen Kriterium (vgl. Anhang) existieren $f_1, \ldots, f_r \in J$, so daß ein $r \times r$-Minor M der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$ nicht in $\underline{q}$ enthalten ist. Sei $\mathscr{F}$ die endliche Menge aller r-Tupel von Potenzreihen von J, so daß ein $r \times r$-Minor der durch diese definierten Jacobischen Matrix nicht in $\underline{q}$ liegt. Wir wissen $\mathscr{F} \neq \emptyset$.

Sei nun $f=(f_1, \ldots, f_r)$ aus $\mathscr{F}$ und $\sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}=\underline{q}_0 \cap \cdots \cap \underline{q}_k$ die Primidealzerlegung und o.B.d.A. $\underline{q}=\underline{q}_0$. Wenn $k>0$ ist, bezeichnen wir mit $\underline{b}$ das Ideal $\underline{q}_1 \cap \cdots \cap \underline{q}_k$. Sei d die kleinste Zahl, so daß $M^d \in \underline{q}+\underline{b}$ ist. Eine solche Zahl existiert nach dem Jacobischen Kriterium (vgl. auch Begründung im Beweis vom Fall $n=0$). Wenn $k=0$ ist, setzen wir $d=1$. Sei $\bar{\mu}_{f,M}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nach Lemma 3.10. zu f und M assoziierte Funktion. Weiterhin setzen wir $s_{f,M}=\max\{c, d, \gamma\}$ und $\mu(c, \gamma)=\max\{\max_{f,M}\{\bar{\mu}_{f,M}(c, s_{f,M}), \gamma_d\}\}$, wobei f die Menge $\mathscr{F}$ durchläuft.

Wir zeigen nun, daß die so definierte Funktion μ den Bedingungen von 3.9. genügt.

Sei $\bar{y} \in \underline{m}A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ gegeben mit $\underline{q}(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod T^{\mu(c,\gamma)}$ und $l(\gamma, \underline{q}, \bar{y}, \bar{x})=0$. Dann existiert ein $f \in \mathscr{F}$ und ein dadurch definierter $r \times r$-Minor M, so daß $M(\bar{y}, \bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$ ist. Aus Lemma 3.10. folgt nun, daß ein $y \in A^N$, $x \in A^{N'}$ existiert mit $f(y, x)=0$ und $y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^{s_{f,M}}$, $x \equiv \bar{x} \bmod \underline{m}^{s_{f,M}}$.

Wir müssen zeigen, daß $\underline{q}(y, x)=0$ ist. Wenn $k=0$ ist, ist das klar. Wenn $k>0$ ist, folgern wir $M^d(y, x) \not\equiv 0 \bmod (p, T^{\gamma d})$, weil $M(\bar{y}, \bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$ ist und $y \equiv \bar{y} \bmod (p, T)^{\gamma d}$ (analoges gilt für x). Andererseits gibt es $M_1 \in \underline{q}$ und $M_2 \in \underline{b}$ mit $M^d=M_1+M_2$, weil ja $M^d \in \underline{q}+\underline{b}$ war. Dann muß aber $M_2(y, x) \not\equiv 0 \bmod (p, T^{\gamma d})$ sein, weil ja $M_1(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\gamma d}$ ist. Folglich ist $\underline{b}$ nicht im Kern $(Y \mapsto y,\ X \mapsto x)$ enthalten. Nun ist aber $\underline{q}\underline{b} \subseteq \underline{q} \cap \underline{b}=\sqrt{(f_1, \ldots, f_r)} \subseteq \operatorname{Kern}(Y \mapsto y,\ X \mapsto x)$, also ist $\underline{q} \subseteq \operatorname{Kern}(Y \mapsto y,\ X \mapsto x)$, d.h. $\underline{q}(y, x)=0$.

Damit ist Lemma 3.9. bewiesen.

(6) Reduktion auf das Newtonsche Lemma

3.11. **Lemma.** *Wir nehmen an, das Theorem 2.5. ist für weniger als n Variable T_i bewiesen. Sei $f=(f_1, \ldots, f_m)$ und g ein System von Potenzreihen aus $A[[Y]][X]$. Dann existiert eine Funktion $\sigma\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Sei $\bar{y} \in \underline{m}A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ mit $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod ((g(\bar{y}, \bar{x}))+T^{\sigma(c,\gamma)})$ und $g(\bar{y}, \bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$, dann existiert ein $y \in A^N$, $x \in A^{N'}$ mit $f(y, x) \equiv 0 \bmod (g(y, x))$ und $y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^c$, $x \equiv \bar{x} \bmod \underline{m}^c$.

Mit Hilfe des Newtonschen Lemmas werden wir aus 3.11. das Lemma 3.10. folgern:

Beweis von Lemma 3.10. Sei σ die zu $f=(f_1, \ldots, f_r)$ und $g=M^2$ nach Lemma 3.11. assoziierte Funktion. Wir setzen $\bar{\mu}(c, \gamma)=\max\{\sigma(c+2, 2\gamma), c+2\gamma\}$ für alle $c, \gamma \in \mathbb{N}$.

Wenn nun für ein $\bar{y} \in \underline{m} A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod T^{\bar{\mu}(c,\gamma)}$ ist und $M(\bar{y}, \bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$, dann gibt es nach 3.11. ein $\tilde{y} \in A^N$, $\tilde{x} \in A^{N'}$ mit $f(\tilde{y}, \tilde{x}) \equiv 0 \bmod (M^2(\tilde{y}, \tilde{x}))$ und $\tilde{y} \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^{c+2}$, $\tilde{x} \equiv \bar{x} \bmod \underline{m}^{c+2}$. Es existieren also $h_i \in A$, so daß $f_i(\tilde{y}, \tilde{x}) = M^2(\tilde{y}, \tilde{x}) h_i$ ist für alle i. Weil nun $f_i(\tilde{y}, \tilde{x}) \equiv f_i(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod \underline{m}^{c+2}$ ist, folgt $h_i \equiv 0 \bmod \underline{m}^c$. Folglich gilt $f(\tilde{y}, \tilde{x}) \equiv 0 \bmod (M^2(\tilde{y}, \tilde{x}) \underline{m}^c)$. Jetzt sind die Voraussetzungen des Newtonschen Lemmas 3.3. erfüllt: es existiert also ein $y \in A^N$, $x \in A^{N'}$ mit $f(y, x) = 0$ und $y \equiv \tilde{y} \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^c$, $x \equiv \tilde{x} \equiv \bar{x} \bmod \underline{m}^c$.

Damit ist Lemma 3.10. bewiesen.

(7) Induktion über die Anzahl n der T_i

Beweis von Lemma 3.11. Wir können zunächst, vorausgesetzt R/p ist unendlich, wenn für ein $\bar{y} \in \underline{m} A^N$, $\bar{x} \in A^{N'}$ $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod ((g(\bar{y}, \bar{x})) + T^{\sigma(c,\gamma)})$ ist und $g(\bar{y}, \bar{x}) \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$, durch einen linearen Automorphismus von A der Form $T_i \mapsto T_i + a_i T_n$, $T_n \mapsto T_n$ mit $a_i \in R$ stets erreichen, daß nach seiner Anwendung $g(\bar{y}, \bar{x})$ T_n-allgemein ist, d.h. $g(\bar{y}, \bar{x})(T_1 = \cdots = T_{n-1} = 0) \not\equiv 0 \bmod (p, T_n^\gamma)$. Da ein solcher Automorphismus die Bedingungen $g(\bar{y}, \bar{x} \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$ und $f(\bar{y}, \bar{x}) \equiv 0 \bmod ((g(\bar{y}, \bar{x})) + T^{\sigma(c,\gamma)})$ nicht ändert, genügt es 3.11. für den Fall zu beweisen, daß $g(\bar{y}, \bar{x})$ von vornherein T_n-allgemein ist. Man kommt in der obigen Situation mit endlich vielen Automorphismen aus, die nicht von $\bar{y}$ und $\bar{x}$ abhängen.

Wenn nun R/p endlich ist, benötigen wir folgenden

Hilfssatz. *Es gibt eine von R abhängige monoton steigende Funktion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für jedes $\gamma \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche Menge σ_γ von lokalen R-Automorphismen von $R[[T]]$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Potenzreihe $U \in R[[T]]$ mit $U \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$ existiert ein $\sigma \in \sigma_\gamma$, so daß $\sigma(U)(0, \ldots, 0, T_n) \not\equiv 0 \bmod (p, T_n^{\varphi(\gamma)})$ ist.*

Beweis. Sei k ein endlicher Körper. Sei $\bar{\sigma}$ die Menge aller k-Automorphismen von $k[[T]]$ von der Form

$$T_i \mapsto T_i + T_n^{\rho_i}, \qquad T_n \mapsto T_n.$$

Sei $\rho_\sigma = \max\{\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}\}$ für $\sigma \in \bar{\sigma}$. Sei $U \in k[[T]]$ und $U \not\equiv 0 \bmod T^\gamma$. Wir setzen $e_U = \min\{\rho_\sigma, \sigma \in \bar{\sigma}, \sigma(U)(0, \ldots, 0, T_n) \neq 0\}$. Nun ist k endlich, also ist die Menge $\varphi_{k,\gamma} = \{e_U, U \in k[[T]], U \not\equiv 0 \bmod T^\gamma\}$ beschränkt. Sei

$$e_{k,\gamma} = \max\{e_U, e_U \in \varphi_{k,\gamma}\}.$$

Sei weiterhin

$$d_U = \min\{d, \text{ so daß ein } \sigma \in \bar{\sigma} \text{ existiert mit } \rho_\sigma \leq e_{k,\gamma} \text{ und}$$

$$\sigma(U)(0, \ldots, 0, T_n) \not\equiv 0 \bmod T_n^d\}$$

für ein $U \in k[[T]]$ mit $U \not\equiv 0 \bmod T^\gamma$. Analog zu $\varphi_{k,\gamma}$ ist auch die Menge $\mathcal{D}_{k,\gamma} = \{d_U, U \in k[[T]], U \not\equiv 0 \bmod T^\gamma\}$ beschränkt. Sei $d_{k,\gamma} = \max\{d_U, d_U \in \mathcal{D}_{k,\gamma}\}$.

Seien nun $k_1, \ldots, k_t$ alle endlichen Körper, die weniger als γ Elemente haben. Wir setzen

$$d_\gamma = \max\{d_{k_1,\gamma}, \ldots, d_{k_t,\gamma}\}$$

$$e_\gamma = \max\{e_{k_1,\gamma}, \ldots, e_{k_t,\gamma}\},$$

und definieren $\varphi(\gamma) = \max\{d_\gamma, \gamma\}$.

Sei nun $R/p=k$ ein endlicher Körper. Wenn k weniger als γ Elemente hat, sei σ_γ die Menge der R-Automorphismen von $R[[T]]$ der Form

$$T_i \mapsto T_i + T_n^{\rho_i}, \qquad T_n \mapsto T_n$$

mit $\rho_i \leqq e_\gamma$ für alle $i=1, \ldots, n-1$. σ_γ ist endlich. Wenn nun für ein $U \in R[[T]]$ $U \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$ ist, dann existiert ein $\sigma \in \sigma_\gamma$, so daß $\sigma(U)(0, \ldots, 0, T_n) \not\equiv 0 \bmod (p, T_n^{\varphi(\gamma)})$ ist. Wenn k mehr als γ Elemente hat, sei $I \subset R$ eine Menge, die aus γ Elementen von R besteht deren Reste modulo p verschieden sind. Sei σ_γ die Menge der R-Automorphismen von $R[[T]]$ der Form

$$T_i \mapsto T_i + a_i T_n, \qquad T_n \mapsto T_n \quad \text{mit } a_i \in I.$$

Es ist klar, daß σ_γ und φ den Bedingungen des Hilfssatzes genügen.

Wir müssen dann im endlichen Fall

$$\sigma(c, \gamma) = \max\{\sigma_{\gamma,\tau}(c, \varphi(\gamma)), \tau \in \sigma_\gamma\}$$

setzen, wobei $\sigma_{\gamma,\tau}$ diejenige Funktion ist, die wir jetzt im Beweis von 3.11 nach der Anwendung von τ auf unsere Gleichungen konstruieren. Sei nun $f=(f_1, \ldots, f_m)$ und g wie in 3.11 gegeben. Wir machen die Substitution

$$Y_k^r = U_k, \qquad k=1, \ldots, N$$

in die Potenzreihen f, g, wobei $U=(U_1, \ldots, U_N)$ neue Unbestimmte bezeichnen. Auf diese Weise erhalten wir Potenzreihen $\tilde{f}=(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m)$ und $\tilde{g}$ aus $A[[U]][Y, X]$ (In $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ sind die Exponenten von Y_k alle kleiner als r). Dann machen wir die Substitution

$$Y_k^+ = \sum_{j=0}^{r-1} Y_{kj} T_n^j, \qquad U_k^+ = \sum_{j=0}^{r-1} U_{kj} T_n^j \qquad k=1, \ldots, N$$

$$X_{k'}^+ = \sum_{j=0}^{r-1} X_{k'j} T_n^j \qquad k'=1, \ldots, N'$$

für die Y_k, U_k, $X_{k'}$ in die Potenzreihen $\tilde{f}_i$, $\tilde{g}$ und $\tilde{h}_k = Y_k^r - U_k$, wobei die Y_{kj}, $X_{k'j}$, U_{kj} neue Unbestimmte bezeichnen. Sei $A(T_n) = T_n^r + A_{r-1} T_n^{r-1} + \cdots + A_0$ ein Polynom mit den neuen Variablen A_i. Mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes dividieren wir $\tilde{g}(Y^+, U^+, X^+)$, die $\tilde{f}_i(Y^+, U^+, X^+)$ und die $\tilde{h}_k(Y^+, X^+, U^+)$ durch $A(T_n)$ und erhalten:

$$\tilde{g}(Y^+, U^+, X^+) = A(T_n) \cdot Q + \sum_{j=0}^{r-1} G_j T_n^j$$

$$\tilde{h}_k(Y^+, U^+, X^+) = A(T_n) \cdot Q'_k + \sum_{j=0}^{r-1} L_{kj} T_n^j$$

$$\tilde{f}_i(Y^+, U^+, X^+) = A(T_n) \cdot Q''_i + \sum_{j=0}^{r-1} F_{ij} T_n^j,$$

Wobei $Q, Q'_k, Q''_i, G_j, F_{ij}, L_{kj}$ Potenzreihen in den Variablen $T, Y_{kj}, A_s, X_{kj}, U_{kj}$ mit Koeffizienten in R aus $A[[(U_{kj}), (A_s)]][(Y_{kj}), (X_{kj})]$ sind. Weiterhin ist klar, daß die Reihen

$$(+)\quad G=(G_0,\ldots,G_{r-1},F_{10},\ldots,F_{m,r-1},L_{10},\ldots,L_{N,r-1})$$

nicht von T_n abhängen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also für die Reihen G eine Funktion $\vartheta'_r\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für beliebige $((\bar{u}_{kt}),(\bar{a}_s))$ aus $(p,T_1,\ldots,T_{n-1})\,R[[T_1,\ldots,T_{n-1}]]^{rN+r}$ und $((\bar{y}_{kt}),(\bar{x}_{ij}))$ aus $R[[T_1,\ldots,T_{n-1}]]^{r(N+N')}$ mit

$$G((\bar{u}_{kt}),(\bar{a}_s),(\bar{y}_{kt}),(\bar{x}_{ij}))\equiv 0 \bmod (p,T_1,\ldots,T_{n-1})^{\vartheta'_r(c)}$$

existiert eine Lösung $((u_{kt}),(a_s),(y_{kt}),(x_{ij}))$ aus $R[[T_1,\ldots,T_{n-1}]]$ mit $G((u_{kt}),(a_s),(y_{kt}),(x_{ij}))=0$ und

$$\left.\begin{aligned} u_{kt}&\equiv\bar{u}_{kt}\\ a_s&\equiv\bar{a}_s\\ y_{kt}&\equiv\bar{y}_{kt}\\ x_{ij}&\equiv\bar{x}_{ij}\end{aligned}\right\}\quad \bmod (p,T_1,\ldots,T_{n-1})^c$$

Wir definieren nun

$$\sigma(c,\gamma)=\max\{\gamma\cdot\vartheta'_r(\max\{c,r\}),\, r=1,\ldots,\gamma\}.$$

Wir müssen nun zeigen, daß die so definierte Funktion den Bedingungen von 3.11 genügt.

Sei nun $\bar{y}\in \underline{m}A^N$ und $\bar{x}\in A^{N'}$ mit $f(\bar{y},\bar{x})\equiv 0 \bmod ((g(\bar{y},\bar{x}))+T^{\sigma(c,u)})$ und o.B.d.A. $g(\bar{y},\bar{x})(T_1=\cdots=T_{n-1}=0)\not\equiv 0 \bmod (p,T_n^r)$, wobei $r\leqq u$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft sei.

Wenn $r=0$ ist, ist $g(\bar{y},\bar{x})$ eine Einheit und wir sind fertig. Wenn $r>0$ ist, gibt es nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ein Polynom

$$\bar{a}(T_n)=T_n^r+\bar{a}_{r-1}\,T_n^{r-1}+\cdots+\bar{a}_0$$

aus $R[[T_1,\ldots,T_{n-1}]]\,[T_n]$, so daß die $\bar{a}_i$ Nichteinheiten sind, und eine Einheit $\bar{h}$, so daß $g(\bar{y},\bar{x})=\bar{a}(T_n)\,\bar{h}$ ist.

Wir dividieren nun mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes die $\bar{y}_k$ durch $\bar{a}(T_n)$ und erhalten:

$$\bar{y}_k=\bar{a}(T_n)\,\bar{z}_k+\sum_{t=0}^{r-1}\bar{y}_{kt}\,T_n^t\qquad k=1,\ldots,N$$

mit $\bar{z}_k\in A$ und $\bar{y}_{k_t}\in R[[T_1,\ldots,T_{n-1}]]$.

Analog verfahren wir mit $\bar{u}_k$ und $\bar{x}_k$ und erhalten

$$\bar{u}_k=\bar{y}_k^r=\bar{a}(T_n)\,\bar{z}'_k+\sum_{t=0}^{r-1}\bar{u}_{kt}\,T_n^t$$

$$\bar{x}_{k'}=\bar{a}(T_n)\,\bar{z}''_{k'}+\sum_{j=0}^{r-1}\bar{x}_{k'j}\,T_n^j$$

mit $\bar{u}_{kt},\ \bar{x}_{k'j}\in R[[T_1,\ldots,T_{n-1}]]$.

Da nun die $\bar{y}_k \in \underline{m}$ waren, folgt aus den Eigenschaften des Weierstraßpolynoms $\bar{a}(T_n)$, daß die $\bar{u}_{kt}$ alle aus $(p, T_1, \ldots, T_{n-1})$ sind. Wir können sie also in beliebige Potenzreihen einsetzen. Das war gerade auch der Sinn der Substitution der U_k, denn im allgemeinen können die $\bar{y}_{kt}$ auch Einheiten sein, die man dann nur in Polynome einsetzen kann.

Nun setzen wir $\bar{y}_k^+ = \sum_{t=0}^{r-1} \bar{y}_{kt} T_n^t$, $\bar{u}_k^+ = \sum_{t=0}^{r-1} \bar{u}_{kt} T_n^t$ und $\bar{x}_k^+ = \sum_{t=0}^{r-1} \bar{x}_{kt} T_n^t$. Aus der Taylorschen Formel erhalten wir

$$\tilde{g}(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) \equiv \tilde{g}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}) \mod \bar{a}(T_n)$$

$$\tilde{h}_i(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) \equiv \tilde{h}_i(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}) \mod \bar{a}(T_n)$$

$$\tilde{f}_i(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) \equiv \tilde{f}_i(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}) \mod \bar{a}(T_n).$$

Weiterhin wissen wir ja, daß $\tilde{g}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}) \equiv 0 \mod \bar{a}(T_n)$ ist und $\tilde{h}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}) = 0$. Damit ist $\tilde{f}_i(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) \equiv \tilde{f}_i(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}) \equiv 0 \mod ((\bar{a}(T_n)) + T^{\sigma(c,u)})$. Es gibt also k_i und φ_i aus A mit

$$\tilde{f}_i(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) = \bar{a}(T_n)\, k_i + \varphi_i$$

und

$$\varphi_i \equiv 0 \mod T^{\sigma(c,u)}.$$

Wenn wir nun die φ_i mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes durch $\bar{a}(T_n)$ dividieren, erhalten wir:

$$\varphi_i = \bar{a}(T_n)\, \pi_i + \sum_{t=0}^{r-1} \varphi_{it}\, T_n^t \qquad \text{mit } \varphi_{it} \in R[[T_1, \ldots, T_{n-1}]].$$

So erhalten wir $\tilde{f}_i(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) \equiv \sum_{t=0}^{r-1} \varphi_{it}\, T_n^t \mod \bar{a}(T_n)$.

Wir betrachten nun das Gleichungssystem $(+)$ und die Q, Q_i', Q_k'' und erhalten:

$$\tilde{f}_i(\bar{y}^+, \bar{u}^+, \bar{x}^+) = \bar{a}(T_n)\, Q_i''((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s))$$
$$+ \sum_{j=0}^{r-1} F_{ij}((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s))\, T_n^j.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung beim Weierstraßschen Vorbereitungssatz ergibt sich

$$F_{ij}((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s)) = \varphi_{ij}$$

für alle i, j. Analog erhalten wir

$$G_j((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s)) = 0$$

$$L_{ij}((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s)) = 0.$$

Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß $\varphi_{ij} \equiv 0 \mod T^{\sigma(c,u)/u}$ ist. Das gewährleistet uns das folgende

3.12. **Lemma.** *Sei $\varphi \in A$ eine Potenzreihe von der Form*

$$\varphi = \bar{a}(T_n)\,\pi + \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j\, T_n^j \qquad r \geqq 1,$$

mit $\pi \in A$ und $\varphi_i \in R[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$.

Wenn $\varphi \equiv 0 \bmod \underline{m}^{ru}$ ist, dann gilt $\varphi_j \equiv 0 \bmod \underline{m}^u$ für alle j.

Wir wollen zunächst im Beweis von 3.11 fortfahren und das Lemma im Anschluß beweisen.

Wir haben nun folgende Situation:

$$\left.\begin{aligned} &F_{ij}((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s)) \equiv 0 \\ &G_j((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s)) \equiv 0 \\ &L_{ij}((\bar{u}_{kt}), (\bar{y}_{kt}), (\bar{x}_{kt}), (\bar{a}_s)) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{mod}(p, T_1, \ldots, T_{n-1})^{\vartheta_r(\max\{r,c\})}$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren $(y_{kt}), (a_s), (x_{kt}), (u_{kt})$ aus $R[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$ mit

$$F_{ij}((u_{kt}), (y_{kt}), (x_{kt}), (a_s)) = 0$$

$$G_j((u_{kt}), (y_{kt}), (x_{kt}), (a_s)) = 0,$$

$$L_{ij}((u_{kt}), (y_{kt}), (x_{kt}), (a_s)) = 0$$

und

$$(++) \qquad \left.\begin{aligned} x_{kt} &\equiv \bar{x}_{kt} \\ u^k{}_t &\equiv \bar{u}_{kt} \\ y_{kt} &\equiv \bar{y}_{kt} \\ a_s &\equiv \bar{a}_s \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{mod}(p, T_1, \ldots, T_{n-1})^{\max\{r,c\}}$$

für alle k, t, s. Sei nun $a(T_n) = T_n^r + a_{r-1}\, T_n^{r-1} + \cdots + a_0$. Wir setzen

$$y_k = a(T_n)\, \bar{z}_k + \sum_{t=0}^{r-1} y_{kt}\, T_n^t$$

und definieren analog u_k, x_k.

Aus der Taylorschen Formel erhalten wir $f_i(y, x) \equiv 0 \bmod a(T_n)$ und $g(y, x) \equiv 0 \bmod a(T_n)$, denn es ist $f_i(y, x) \equiv \tilde{f}_i(y, u, x) \bmod a(T_n)$, $g(y, x) \equiv \tilde{g}(y, u, x) \bmod a(T_n)$ und $\tilde{h}_i(y, u) \equiv 0 \bmod a(T_n)$. Andererseits ist wegen der Kongruenz $(++)$ $g(y,x) \not\equiv 0 \bmod (p, T^r)$ and $y \equiv \bar{y} \bmod \underline{m}^r$; somit haben wir $g(y, x) = a(T_n) \cdot$ Einheit. Damit ist das Lemma bewiesen.

Es bleibt noch Lemma 3.12 zu beweisen:

Sei $\pi = \sum b_k\, T_n^k$ mit $b_k \in R[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$. Dann ist

$$\varphi = \sum_{j=0}^{r-1} (\bar{a}_0\, b_j + \cdots + \bar{a}_j\, b_0 + \varphi_j)\, T_n^j + \sum_{k \geqq 0} (b_k + b_{k+1}\, \bar{a}_{r-1} + \cdots + b_{k+r}\, \bar{a}_0)\, T_n^{r+k}.$$

Wir zeigen nun induktiv, daß $b_k \in (p, T_1, \ldots, T_{n-1})^t$ ist für alle k mit $0 \leqq k \leqq r(u-t)-1$. Sei nämlich $b_k \in (p, T_1, \ldots, T_{n-1})^{t-1}$ für alle k mit $0 \leqq k \leqq r(u-t+1)-1$,

$t \geqq 1$, dann folgt $D_k = b_k + b_{k+1}\bar{a}_{r-1} + \dots + b_{k+r}\bar{a}_0$ liegt in $(p, T_1, \dots, T_{n-1})^t$ für alle k mit $0 \leqq k \leqq r(u-t) - 1$, weil ja $D_k T_n^{r+k} \in \underline{m}^{ru}$ ist. Nun ist aber $b_{k+r-j}\bar{a}_j \in (p, T_1, \dots, T_{n-1})^t$ für alle $j = 0, \dots, r-1$, weil ja $\bar{a}_j$ Nichteinheit ist. Deshalb muß $b_k \in (p, T_1, \dots, T_{n-1})^t$ sein. Wir setzen nun $t = u-1$ und erhalten $b_k \in (p, T_1, \dots, T_{n-1})^{u-1}$ für alle $k = 1, \dots, r-1$. Damit ist $\bar{a}_{k-j} b_j \in (p, T_1, \dots, T_{n-1})^u$ für alle $j = 1, \dots, r-1$. Da nun $\varphi_j + \bar{a}_j b_0 + \dots + \bar{a}_0 b_j \in (p, T_1, \dots, T_{n-1})^u$ ist, ist damit das Lemma bewiesen.

Damit ist Theorem 2.5 bis auf Nerons p-Desingularisierung vollständig bewiesen.

4. Ein Lemma zur p-Desingularisierung

Sei R ein diskreter Bewertungsring der Charakteristik 0 oder ein Körper der Charakteristik p.

Sei $\underline{a} \subset R[[T, Y]][X]$ ein Ideal, wir definieren

$$s(\underline{a}) = \{f, f \in \operatorname{Hom}_{R[[T]]}(R[[T, Y]][X]/\underline{a}, R[[T]]), f(Y) \in T\}$$

$$s(\underline{a}, c) = \{f, f \in \operatorname{Hom}_{R[[T]]}(R[[T, Y]][X]/\underline{a}, R[[T]]/T^c), f(Y) \in T\}.$$

Wir sagen weiterhin, daß $\underline{a}$ *polynomial definiert* ist, falls ein $k \in \{1, \dots, N\}$ existiert, so daß $\underline{a}$ ein System von Erzeugenden aus $R[[T]][[Y_1, \dots, Y_k]][Y_{k+1}, \dots, Y_N, X]$ hat und $\underline{a} \cap R[[T, Y_1, \dots, Y_k]] = 0$ ist.

4.1. **Lemma.** *Für jedes Ideal $\underline{a}$ von $R[[T, Y]][X]$, T, Y, X wie in 2.5 kann man eine endliche Menge von Primidealen*

$$F(\underline{a}) \subseteq \{\underline{q} \in \operatorname{Spec} R[[T, Y]][X], \underline{q} \cap R[[T]] = 0, Q(R[[T, Y]][X]/\underline{q}) | Q(R[T])$$

separabel, $\underline{q}$ polynomial definiert$\}$

finden und eine Funktion $\theta_{\underline{a}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:

(1) *Wenn $s(\underline{a}) = \emptyset$ ist, dann ist $\bigcup_{\underline{q} \in F(\underline{a})} s(\underline{q}) = \emptyset$,*

(2) *wenn $s(\underline{a}, \theta_{\underline{a}}(c)) \neq \emptyset$ ist, dann ist $\bigcup_{\underline{q} \in F(\underline{a})} s(\underline{q}, c) \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei $F_1(\underline{a}) = \{\underline{q} \in \operatorname{Spec} R[[T, Y]][X],\ \underline{q} \cap R[[T]] = 0\}$. Analog zu 3.1 zeigt man zunächst, daß eine Funktion $\theta_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so daß aus $\underline{a}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\theta_1(c)}$ folgt $\underline{q}(y, x) \equiv 0 \bmod T^c$ für ein $\underline{q} \in F_1(\underline{a})$.

Daraus ersehen wir, daß es genügt für alle $\underline{q}$ aus $F_1(\underline{a})$ die Menge $F(\underline{q})$ und die Funktion $\theta_{\underline{q}}$ zu definieren. Dann können wir nämlich $F(\underline{a}) = \bigcup F(\underline{q}_i)$ und $\theta_{\underline{a}}(c) = \theta_1(\max \theta_{\underline{q}_i}(c))$ setzen, wobei die $\underline{q}_i$ die zu $\underline{a}$ assoziierten Primideale durchlaufen, und sind dann fertig. Sei also $\underline{a}$ ein Primideal mit $\underline{a} \cap R[[T]] = 0$. Wenn

$$ht(\underline{a} \cap R[[T, Y]]) > N$$

ist, finden wir nach Lemma 6.1 einen Isomorphismus φ der Form

$$T_i \mapsto T_i + \sum_{j>i} T_j^{e_j} + \sum Y_k^{b_k}, \qquad Y_i \mapsto Y_i + \sum_{j>i} Y_j^{c_j}$$

mit natürlichen Zahlen b_j, c_j, e_j, die $\geqq 2$ sind, so daß $\underline{a}_1 = \varphi(\underline{a})$ über $R[[T_1, \ldots, T_s]][T_{s+1}, \ldots, T_n, Y, X]$ definiert ist und $\underline{a}_1 \cap R[[T_1, \ldots, T_s]] = 0$, $s < n$.

φ definiert nun eine Abbildung

$$\sigma\colon\ R[[T, Y]]/\underline{a} \cap R[[T, Y]] \to R[[T_1, \ldots, T_s]][T_{s+1}, \ldots, T_n, Y]/\underline{a}_2$$

mit $\underline{a}_2 = \underline{a}_1 \cap R[[T, Y]]$.

$R[[T_1, \ldots, T_s]][T_{s+1}, \ldots, T_n, Y]/\underline{a}_2$ ist ein endlicher freier $R[[T_1, \ldots, T_s]]$-Modul vom Rang sagen wir t. Nun wählen wir $\theta(c) = t+1$. Wir wollen uns nun überlegen, daß es kein y, x aus $R[[T]]$ gibt mit $\underline{a}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{t+1}$.

Dazu nehmen wir einmal an, daß die obige Kongruenz für gewisse y, x erfüllt ist. Dann betrachten wir den Morphismus

$$\delta\colon\ R[[T, Y]]/\underline{a} \cap R[[T, Y]] \to R[[T]]/T^{t+1} \qquad \text{mit } \delta(T) = T$$

und $y = \delta(Y)$. Es ist klar, daß δ surjektiv ist. Damit ist $\delta \circ \sigma^{-1}$ surjektiv. Das kann aber nicht sein. Um dies einzusehen, betrachten wir $\delta \circ \sigma^{-1} | R[[T_1, \ldots, T_s]]$: $T_i \mapsto T_i + \sum_{j>s} T_j^{e_j} + \sum y_i^{c_i}$. Das ist aber eine Injektion $R[[T_1, \ldots, T_s]]/T^{t+1} \to R[[T]]/T^{t+1}$. Durch die Festlegung $T_j \mapsto T_j$ für $j > s$ kann diese Injektion zu einem Isomorphismus δ' von $R[[T]]/T^{t+1}$ erweitert werden. Dieser Isomorphismus definiert uns eine Surjektion

$$\delta'^{-1} \circ \delta \circ \sigma^{-1}\colon\ R[[T_1, \ldots, T_s]][T_{s+1}, \ldots, T_n, Y]/\underline{a}_2 \to R[[T]]/T^{t+1}.$$

Diese Abbildung läßt $R[[T_1, \ldots, T_s]]$ fest. Bei der obigen Abbildung kann aus Dimensionsgründen (Wahl von t) nicht jedes T_i ein Urbild haben. Das ergibt einen Widerspruch.

Wir können somit voraussetzen, daß $ht(\underline{a} \cap R[[T, Y]]) \leqq N$ ist. Dann existiert ein Automorphismus γ von $R[[T, Y]]$ von der Form

$$\nu(T_i) = T_i + p_i(Y), \qquad \nu(Y_i) = Y_i + p_i'(Y_{i+1}, \ldots, Y_N),$$

so daß $\nu(\underline{a})$ polynomial definiert ist. Man überlegt sich nun leicht, daß $s(\underline{a}) = \emptyset$ ist genau dann, wenn $s(\nu(\underline{a})) = \emptyset$ ist, und daß $s(\underline{a}, c) = \emptyset$ ist genau dann, wenn $s(\nu(\underline{a}), c) = \emptyset$ ist für alle $c \in \mathbb{N}$. Wir können also jetzt folgende Situation annehmen:

$$\underline{q} \subseteq R[[T, Y]][X] \qquad \text{ist ein Primideal mit } \underline{q} \cap R[[T, Y]] = 0.$$

Wenn die kanonische Abbildung $u_{\underline{q}}$: $Q(R[[T, Y]]) \to Q(R[[T, Y]][X]/\underline{q})$ separabel ist, sind wir fertig, denn dann setzen wir $F(\underline{q}) = \{\underline{q}\}$ und $\theta_{\underline{q}} = id$. Wir können also annehmen, daß R ein Körper der Charakteristik p ist.

Wir werden nun induktiv über $s_{\underline{q}} = N' - ht(\underline{q})$ unser $F(\underline{q})$ bestimmen. Da wir $\underline{q} \cap R[[T, Y]] = 0$ voraussetzen können, ist $s_{\underline{q}} \geqq 0$ und der Fall $s_{\underline{q}} = 0$ ist trivial.

Wenn $u_{\underline{q}}$ nicht separabel ist, werden wir ein Ideal $\underline{a}' \supsetneqq \underline{q}$ konstruieren und eine natürliche Zahl α, so daß aus $\underline{q}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\alpha c}$ folgt $\underline{a}'(y, x) \equiv 0 \bmod T^c$ für beliebige $y \in TR[[T]]^N$, $x \in R[[T]]^{N'}$ und $c \in \mathbb{N}$. Wenn wir ein solches $\underline{a}'$ konstruiert haben, sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig. Wir wählen $F(\underline{q}) = F(\underline{a}')$ und $\theta_{\underline{q}} = \alpha \cdot \theta_{\underline{a}'}$. Wir müssen also die Existenz eines solchen $\underline{a}'$ nachweisen. Wenn nun $u_{\underline{q}}$ nicht separabel ist, gibt es eine endliche rein inseparable Erweiterung K

von R, so daß $K^p \subseteq R$ ist und $K((T', Y')) \otimes_{R((T,Y))} Q(R[[T, Y]][X]/\underline{q})$ kein reduzierter Ring ist, wobei $T' = (T'_1, \ldots, T'_n)$ und $Y' = (Y'_1, \ldots, Y'_N)$ neue Variable sind mit $T'^p_k = T_k$ und $Y'^p_k = Y_k$ für alle k. Es ist nun $K[[T', Y']]$ ein endlicher freier $R[[T, Y]]$-Modul. Nach Resultaten von Greenberg (vgl. [5]) existiert ein Funktor $\mathscr{F}$ von der Kategorie der $K[[T', Y']]$-Algebren von endlichem Typ in die Kategorie der $R[[T, Y]]$-Algebren von endlichem Typ, so daß $\mathscr{F}$ linksadjungiert zum Funktor π^* der Skalarbereicherweiterung der Kategorie der $R[[T, Y]]$-Algebren in die der $K[[T', Y']]$-Algebren ist. Darüber hinaus führt $\mathscr{F}$ surjektive Abbildungen in surjektive über.

Nun ist $\pi^*(R[[T, Y]][X]/\underline{q}) = R[[T, Y]][X]/\underline{q} \otimes_{R[[T,Y]]} K[[T', Y']]$ nach der Wahl von K und T' nicht reduziert. Sei $\underline{b} = \sqrt{\underline{q}\, K[[T', Y']][X]}$ und α die kleinste Zahl, so daß $\underline{b}^\alpha \subseteq \underline{q}\, K[[T', Y']][X]$ ist, sei weiterhin

$$v\colon\ \pi^*(R[[T, Y]][X]/\underline{q})$$
$$= K[[T', Y']][X]/\underline{q}\, K[[T', Y']][X] \to K[[T', Y']][X]/\underline{b}$$

die kanonische Surjektion. Wir betrachten das folgende Fasersummendiagramm in der Kategorie der $R[[T, Y]]$-Algebren:

$$\begin{array}{ccc} R[[T, Y]][X]/\underline{q} & \xleftarrow{\ \Phi\ } & (\mathscr{F} \circ \pi^*)(R[[T, Y]][X]/\underline{q}) \\ {\scriptstyle v'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}(v)} \\ B & \xleftarrow{\ u\ } & \mathscr{F}(K[[T', Y']][X]/\underline{b}) \end{array}$$

wobei Φ der Adjunktionsmorphismus ist. Weil $\mathscr{F}(v)$ eine surjektive Abbildung ist, ist auch v' surjektiv. Andererseits kann v' nicht injektiv sein, denn sonst wäre v bijektiv: In diesem Fall würde nämlich ein $\bar{v}\colon K[[T', Y']][X]/\underline{b} \to \pi^*(R[[T, Y]][X]/\underline{q})$ existieren, so daß $\Phi \circ \mathscr{F}(\bar{v}) = v'^{-1} \circ u$ ist. Daraus folgt $\Phi \circ \mathscr{F}(\bar{v} \circ v) = \Phi$ und somit $\bar{v} \circ v = id$. Weil v nun surjektiv ist, würde daraus folgen, daß v bijektiv ist. Das ist aber nicht möglich, da $\pi^*(R[[T, Y]][X]/\underline{q})$ nicht reduziert ist. Folglich existiert ein Ideal $\underline{a}'$ in $R[[T, Y]][X]$ mit $\underline{a}' \supsetneqq \underline{q}$ und $B \simeq R[[T, Y]][X]/\underline{a}'$.

Sei nun $y \in TR[[T]]^N$, $x \in R[[T]]^{N'}$ mit $\underline{q}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\alpha c}$. Sei

$$\sigma\colon\ R[[T, Y]][X]/\underline{q} \to R[[T]]/T^{\alpha c}$$

der durch y und x definierte kanonische Morphismus von $R[[T]]$-Algebren. Dann kann man den Morphismus $\pi^*(\sigma)\colon K[[T', Y']][X]/\underline{q}\, K[[T', Y']][X] \to K[[T']]/T'^{p\alpha c}$ zu einem Morphismus $\hat{\sigma}\colon K[[T', Y']][X]/\underline{b} \to K[[T']]/T'^{pc} \simeq \pi^*(R[[T]]/T^c)$ liften. Sei $\bar{\sigma}\colon \mathscr{F}(K[[T', Y']][X]/\underline{b}) \to R[[T]]/T^c$ der aus durch Adjunktion erhaltene Morphismus von $R[[T]]$-Algebren. Man überlegt sich sofort, daß $\bar{\sigma} \circ \mathscr{F}(v) = m \circ \sigma \circ \Phi$ ist, wobei m die kanonische Surjektion

$$R[[T]]/T^{\alpha c} \to R[[T]]/T^c$$

ist. Dann gibt es aber einen eindeutig bestimmten Morphismus von $R[[T]]$-Algebren $\lambda\colon R[[T, Y]][X]/\underline{a}' = B \to R[[T]]/T^c$, so daß $\lambda \circ v' = m \circ \sigma$ ist und $\lambda \circ u = \bar{\sigma}$. Daraus folgt, daß $\underline{a}'(y, x) \equiv 0 \bmod T^c$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

5. Nerons p-Desingualisierung

Wir wollen in diesem Teil den Satz 3.7 beweisen.

Dazu werden wir zunächst den Prozeß der p-Desingularisierung anschaulich beschreiben und so die Konstruktion im Beweis motivieren. Sei $\varphi: R[[T, Y]][X] \to R[[T]]/T^s$ eine Abbildung gegeben durch $X_i \mapsto \bar{x}_i$, $Y_i \mapsto \bar{y}_i$ und seien

$$f_1, \ldots, f_r \in \operatorname{Kern} \varphi \qquad (r \leqq N).$$

Wir setzen weiterhin voraus, daß die Bilder aller $r \times r$-Minoren der Jacobischen Matrix der f_i bei φ in $pR[[T]]/T^s$ enthalten sind. Sei weiterhin

$$J = \operatorname{Kern}(R[[T, Y]][X] \to R[[T]]/T^s \to R/p[[T]]/T^s),$$

dann ist die durch J definierte abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R[[T, Y]][X]/(f_1, \ldots, f_r) = \mathfrak{X}$ im singulären Ort von $\mathfrak{X}$ enthalten. Sei nun $J = (h_1, \ldots, h_t)$. Um die Singularität von $\mathfrak{X}$ bzgl. p aufzulösen, blasen wir $\mathfrak{X}$ in J auf und betrachten den durch p definierten affinen Bestandteil der Aufblasung

$$R[[T, Y]][X]\Big/(f_1, \ldots, f_r)\left[\frac{h_1}{p}, \ldots, \frac{h_t}{p}\right]$$
$$= R[[T, Y]][X, Z]/(f_1, \ldots, f_r, pZ_1 - h_1, \ldots, pZ_t - h_t).$$

Sei $\bar{\mathfrak{X}}$ das Spektrum dieses Ringes. Nach Definition von J ist $h_i(\bar{y}, \bar{x}) \equiv p\bar{z}_i \bmod T^s$ für gewisse $\bar{z}_i$ aus $R[[T]]$. Deshalb läßt sich der Morphismus φ zu einem Morphismus von $\operatorname{Spec} R[[T]]/T^s \to \bar{\mathfrak{X}}$ (definiert durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) fortsetzen. Wir müssen nun zeigen, daß sich für ein über $(f_1, \ldots, f_r, pZ_1, \ldots, pZ_t - h_t)$ liegendes Primideal von $R[[T, Y]][X, Z]$ die Länge l der p-Singularität gegenüber der durch φ definierten verkleinert hat. Um dies nachzuweisen, benötigen wir noch einige weitere Eigenschaften dieses Primideals:

(1) es soll modulo p ein regulärer Punkt von $\bar{\mathfrak{X}}$ sein,

(2) die f_i und $pZ_j - h_j$ müssen modulo p gewissen Relationen genügen (d.h. wir müssen aus ihnen andere Erzeugende des Primideals konstruieren deren Minoren eine kleinere Länge ergeben).

Wir wollen dann, wenn ein Punkt aus der Aufblasung den Bedingungen (1) und (2) genügt, (natürlich werden wir (2) noch präzisieren) sagen, daß er ein ausgezeichneter Punkt für die Singularitätenauflösung ist.

Sei $R/p = k$ und bezeichne für diesen Fall „^{0}" stets die Restklasse modulo p. Da die Bedingungen (1) und (2) Bedingungen modulo p sind und aus technischen Gründen (Anwendung des Jacobischen Kriteriums), wollen wir zunächst statt mit Punkten aus $\bar{\mathfrak{X}}$ mit Punkten über k, d.h. modulo p rechnen. Modulo p ist ja auch $\bar{\mathfrak{X}}$ über $k[[T, Y]][X]$ definiert.

Wir wollen nun vom geometrischen Hintergrund abstrahieren und rein algebraisch definieren, was wir unter einem ausgezeichneten Punkt der Singularitätenauflösung von $f_1, \ldots, f_r$ verstehen.

Sei also $\underline{q}$ ein Primideal aus $k[[T, Y]][X]$, das modulo p von einem Punkt der Aufblasung kommt, oder allgemeiner sei $\underline{q}$ ein Primideal aus $k[[T, Y]][X]$, das die f_i^0 enthält für $i = 1, \ldots, r$ und alle $r \times r$-Minoren der Matrix $\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i^0}{\partial X_h}\right)$.

5.1. *Definition.* $\underline{q}$ heißt ausgezeichnetes Primideal in der Singularitätenauflösung von $f_1, \ldots, f_r$ und wir schreiben kurz $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathbf{A}(\underline{q})$, wenn es

$$h_1, \ldots, h_t \in R[[T, Y]][X]$$

gibt, $t \leqq N + N'$, mit

(0) $h_1^0, \ldots, h_t^0 \in \underline{q}$,

(1′) es gibt einen $t \times t$-Minor der Matrix $\left(\frac{\partial h_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial h_i}{\partial X_k}\right)$, der modulo p nicht in $\underline{q}$ liegt,

(2′) es existieren Potenzreihen $H_i, Q \in R[[T, Y]][X]$, $U_{il}, g_i \in R[[T, Y]][X, Z]$ $i = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, t$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_t)$ einige neue Variable, und eine natürliche Zahl ξ, $1 \leqq \xi \leqq r$, so daß

a) $Qf_i = pg_i + \sum_{l=1}^{t} U_{il}(pZ_l - h_l)$ ist für $i \neq \xi$,

b) $Q \sum_{i=1}^{r} H_i f_i = p^2 g_\xi + \sum_{l=1}^{t} U_{\xi 1}(pZ_1 - h_1)$ ist

c) $Q^0, H_\xi^0 \notin \underline{q}$.

Dabei entsprechen die Bedingungen (1′) und (2′) genau den Bedingungen (1) und (2), die Bedingung (0) gewährleistet in unserer Situation, daß $\underline{q}$ von einem Punkt der Aufblasung herkommt. Die Bedingung (2′) wird uns, wenn wir die Existenz von ausgezeichneten Punkten in der Singularitätenauflösung nachgewiesen haben, helfen die Länge der p-Singularität zu verkleinern (wir gehen dazu von den $\{f_i\}$ zu den $\{g_i\}$ über, die eine kleinere Länge liefern).

(1) Die Existenz von ausgezeichneten Punkten in der Singularitätenauflösung

5.2. **Satz.** *Sei $\underline{a}$ ein Ideal aus $k[[T, Y]][X]$, $f = (f_1, \ldots, f_r)$ ein System von Potenzreihen aus $R[[T, Y]][X]$ $r \leqq N$, so daß $f_1^0, \ldots, f_r^0 \in \underline{a}$ ist und alle $r \times r$-Minoren der Jacobischen Matrix $\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i^0}{\partial X_k}\right)$ in $\underline{a}$ liegen.*

Dann gibt es eine endliche Menge von Primidealen

$$G(\underline{a}) \subseteq \{\underline{q} \in \operatorname{Spec} k[[T, Y]][X], \underline{q} \cap k[[T]] = 0, f \in \mathbf{A}(\underline{q})\}$$

und eine Funktion $\alpha_{\underline{a}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:

(G): *Sei $c \in \mathbb{N}$ und $y \in \underline{m} R[[T]]^N$, $x \in R[[T]]^{N'}$ mit $f(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\alpha_{\underline{a}}(c)}$ und $\underline{a}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\alpha_{\underline{a}}(c)}$,*

dann existiert ein $\underline{q} \in G(\underline{a})$ mit $\underline{q}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^c$. Ferner kann $\alpha_{\underline{a}} \geqq 1_{\mathbb{N}}$ monoton steigend gewählt werden.

Beweis. Sei $F(\underline{a})$ und $\theta_{\underline{a}}$ aus 4.1 gegeben. Wenn $F(a)$ leer ist, überlegen wir uns, daß stets $\underline{a}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\theta_{\underline{a}}(1)}$ ist. Wir setzen dann $G(\underline{a}) = \emptyset$ und $\alpha_{\underline{a}}(c) = \max\{c, \theta_{\underline{a}}(1)\}$ und sind fertig. Wenn $F(\underline{a}) \neq \emptyset$ ist, wählen wir ein $\underline{q} \in F(\underline{a})$. Sei s die Höhe von $\underline{q}$. Nach dem Jacobischen Kriterium (wir können es anwenden, weil $\underline{q}$ eine separable Erweiterung definiert und polynomial definiert ist, vgl. 4.1) existieren $h_1, \ldots, h_s$ aus $R[[T, Y]][X]$, so daß

1) $h_1^0, \ldots, h_s^0$ das Maximalideal $\underline{q}k[[T, Y]][X]_{\underline{q}}$ von $k[[T, Y]][X]_{\underline{q}}$ erzeugen,

2) ein $s \times s$-Minor D der Jacobischen Matrix $\left(\frac{\partial h_i^0}{\partial Y_j}, \frac{\partial h_i^0}{\partial X_k}\right)$ modulo p nicht in $\underline{q}$ liegt, d.h. $D^0 \notin \underline{q}$.

Nun sind die $f_i^0 \in \underline{q}$. Es existieren Polynome Q, $S_{ie} \in R[[T, Y]][X]$ $i = 1, \ldots, r$, $e = 1, \ldots, s$, so daß $Q^0 \notin \underline{q}$ ist und $Q^0 f_i^0 = \sum_{e=1}^{s} S_{ie}^0 h_e^0$.

Sei nun ξ die kleinste natürliche Zahl, so daß alle $\xi \times \xi$-Minoren der Matrix $\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i^0}{\partial X_k}\right) i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, N, k = 1, \ldots, N'$ in $\underline{q}$ enthalten sind. Dann existieren Polynome $H_i \in R[[T, Y]][X]$ $i = 1, \ldots, \xi$, so daß $\sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j} \in \underline{q}$ ist und $\sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial X_j} \in \underline{q}$ ist und $H_\xi^0 \notin \underline{q}$ für alle j (wir können H_ξ^0 als einen $(\xi - 1) \times (\xi - 1)$-Minor der Matrix $\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i^0}{\partial X_k}\right)$ $i = 1, \ldots, \xi - 1$, $j = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, N'$ wählen, der nicht in $\underline{q}$ liegt, falls $\xi > 1$ ist (Cramersche Regel), und $H_\xi = 1$ wählen, falls $\xi = 1$ ist; man muß dabei natürlich gegebenenfalls die f_i umnumerieren).

Nun ist aber

$$\sum_{e=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 S_{ie}^0\right) \frac{\partial h_e^0}{\partial Y_j} = \sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 \left(\sum_{e=1}^{s} S_{ie}^0 \frac{\partial h_e^0}{\partial Y_j}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 \left(Q^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j} + \frac{\partial Q^0}{\partial Y_j} f_i^0 - \sum_{e=1}^{s} \frac{\partial S_{ie}^0}{\partial Y_j} h_e^0\right) \quad \text{in } \underline{q}$$

enthalten für alle j. Analoges gilt für die partiellen Ableitungen nach X_j. Andererseits gibt es nach der Cramerschen Regel Potenzreihen $m_{je'}$ aus $R[[T, Y]][X]$, so daß

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial h_e^0}{\partial Y_j} m_{je'} + \sum_{j=1}^{N'} \frac{\partial h_e^0}{\partial X_j} m_{N+j,e'} = D^0 \delta_{ee'}$$

ist, wobei $\delta_{ee'}$ das Kroneckersymbol bezeichnet. Daraus folgt, daß

$$D^0 \left(\sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 S_{ie'}^0\right) = \sum_{j',j=1}^{N',N} \sum_{e=1}^{s} \sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 S_{ie}^0 \left(\frac{\partial h_e^0}{\partial Y_j} m_{je'} + \frac{\partial h_e^0}{\partial X_j} m_{N+j',e'}\right)$$

aus $\underline{q}$ ist für alle $e' = 1, \ldots, s$. Da aber nun $D^0 \notin \underline{q}$ ist, folgt daraus, daß $\sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 S_{ie}^0 \in \underline{q}$ ist für alle $e = 1, \ldots, s$. Also existieren Q' und $S_{\xi ee'} \in R[[T, Y]][X]$ mit $Q'^0 \notin \underline{q}$ und

$$Q'^0 \left(\sum_{i=1}^{\xi} H_i^0 S_{ie}^0\right) = \sum_{e'=1}^{s} S_{\xi ee'}^0 h_{e'}^0.$$

Wir haben also folgendes erreicht: Für jedes $\underline{q} \in F(\underline{a})$ können wir $Q^{\underline{q}}, S_{ie}^{\underline{q}}, S_{\xi ee'}^{\underline{q}}$, $H_i^{\underline{q}} \in R[[T, Y]][X]$ finden, $i = 1, \ldots, r$, $e, e' = 1, \ldots, s$ mit

$$Q^{\underline{q}0} f_i^0 = \sum_{e=1}^{s} S_{ie}^{\underline{q}0} h_e^{\underline{q}0} \quad \textit{für } i \neq \xi$$

und

$$Q^{q^0}\left(\sum_{i=1}^{r} H_i^{q^0} f_i^0\right)=\sum_{e,e'=1}^{s} S_{\xi e e'}^{q^0} h_e^{q^0} h_{e'}^{q^0},$$

wobei wir $H_i^q=0$ gesetzt haben, falls $\xi<i\leqq r$ ist. Daraus folgt, daß Potenzreihen $V_i^q\in R[[T,Y]][X]$ existieren, so daß

$$Q^q f_i=\sum_{e=1}^{s} S_{ie}^q h_e^q+p V_i^q \qquad \text{ist für } i\neq\xi$$

und

$$Q^q\sum_{i=1}^{r} H_i^q f_i=\sum_{e,e'=1}^{s} S_{\xi e e'}^q h_e^q h_{e'}^q+p V_\xi^q.$$

Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $\{F_m\}$ $m\geqq 1$ auf die folgende Weise:

$$F_1=F(\underline{a}),\qquad F_m=\bigcup_{q\in F_{m-1}} F(\underline{q}+(V_\xi^{q^0}))\qquad \text{für alle } m>1,$$

wobei V_ξ^q die zuvor zu $\underline{q}$ und f assoziierte Potenzreihe ist. Wenn für ein $\underline{q}\in F_{m-1}$ V_ξ^q die Eigenschaft hat, daß $V_\xi^{q^0}\notin\underline{q}$ ist, dann haben alle Primideale von $F(\underline{q}+(V_\xi^{q^0}))$ eine Höhe, die größer als die von $\underline{q}$ ist. Wenn $V_\xi^{q^0}\in\underline{q}$ ist für alle $\underline{q}\in F_{m-1}$, dann ist $F_m=F_{m-1}$. Folglich existiert eine natürliche Zahl $u\leqq N$, so daß $F_u=F_{u+1}$ ist. Sei nun per definitionem $G(\underline{a})=F_u$. Sei $c\in\mathbb{N}$, wir konstruieren nun eine Familie natürlicher Zahlen $\{\beta_m\}$, $0\leqq m\leqq u-1$ auf die folgende Weise: $\beta_0=c$, $\beta_m=\max\{\theta_{q+(V_\xi^{q^0})}(\beta_{m-1}),\ \underline{q}\in F_{u-m}\}$. Wir setzen $\alpha_{\underline{a}}(c)=\theta_{\underline{a}}(\beta_{u-1})$.

Wir müssen nun zeigen, daß die auf diese Weise definierten G und α unserer Bedingung (G) genügen. Sei $y\in\underline{m}R[[T]]^N$ und $x\in R[[T]]^{N'}$ mit $f(y,x)\equiv 0$ mod $T^{\alpha_{\underline{a}}(c)}$ und $\underline{a}(y^0,x^0)\equiv 0 \bmod T^{\alpha_{\underline{a}}(c)}$. Es ist klar, daß dann F_1 nicht leer sein kann. Es gibt also ein $\underline{q}\in F_1$, so daß $\underline{q}(y^0,x^0)\equiv 0 \bmod T^{\beta_{u-1}}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} p V_\xi^q(y,x)&=Q^q(y,x)\left(\sum_{i=1}^{r} H_i^q(y,x) f_i(y,x)-\sum_{e,e'=1}^{s} S_{\xi e e'}^q(y,x) h_e^q(y,x) h_{e'}^q(y,x)\right.\\ &\equiv 0 \bmod (p^2, T^{\beta_{u-1}}),\end{aligned}$$

weil $f(y,x)\equiv 0 \bmod T^{\beta_{u-1}}$ ist und $h_e^q(y,x)\equiv 0 \bmod (p, T^{\beta_{u-1}})$. Daraus folgt, daß $V_\xi^q(y,x)\equiv 0 \bmod (p, T^{\beta_{u-1}})$ ist und folglich $(\underline{q}+(V_\xi^{q^0}))(y^0,x^0)\equiv 0 \bmod T^{\beta_{u-1}}$. Damit kann auch F_2 nicht leer sein. Auf diese Weise fahren wir fort und sehen, daß $G(\underline{a})$ nicht leer ist, und daß ein $\underline{q}\in G(\underline{a})$ existiert mit $\underline{q}(y^0,x^0)\equiv 0 \bmod T^c$. Wir müssen nun noch zeigen, daß $f\in\mathbf{A}(\underline{q})$ ist für alle $\underline{q}\in G(\underline{a})$. Sei $\underline{q}\in G(\underline{a})$, dann ist $V_\xi^q\in\underline{q}$ und es existieren Polynome Q', $W_{\xi e}$ aus $R[[T,Y]][X]$ $e=1,\dots,s$ mit $Q'^0\notin\underline{q}$ und $Q'^0\, V_\xi^{q^0}=\sum_{e=1}^s W_{\xi e}^0 h_e^{q^0}$. Damit erhalten wir die Kongruenz

$$Q^q Q'\sum_{i=1}^{r} H_i^q f_i\equiv Q'\sum_{e,e'=1}^{s} S_{\xi e e'}^q h_e^q h_{e'}^q+p\sum_{e=1}^{s} W_{\xi e}^q h_e^q \bmod p^2.$$

Wir können folglich für alle $\underline{q}\in G(\underline{a})$ Potenzreihen $Q^q, S_{ie}^q, S_{\xi e e'}^q, H_i^q, W_{\xi e}^q, W_\xi^q, V_i^q$ aus $R[[T,Y]][X]$ finden, so daß $Q^q f_i=\sum_{e=1}^s S_{ie}^q h_e^q+p V_i^q$ ist und

$$Q^q\left(\sum_{i=1}^{r} H_i^q f_i\right)=\sum_{e,e'=1}^{s} S_{\xi e e'}^q h_e^q h_{e'}^q+p\sum_{e=1}^{s} W_{\xi e}^q h_e^q+p^2 W_\xi^q, \tag{+}$$

wobei $Q^{q^0}, H_\xi^{q^0}\notin\underline{q}$ sind.

Wir machen nun in die obigen Gleichungen (+) die Substitution $g^q_{r+l} = p Z_l - h^q_l$, $l = 1, \ldots, s$ mit neuen Variablen Z_i. Daraus erhalten wir unsere gesuchten Potenzreihen g^q_i, $U^q_{ie} \in R[[T, Y]][X, Z]$:

$$U^q_{ie} = -S^q_{ie} \quad \text{für } i \neq \xi, \quad g^q_i = V^q_i + \sum_{e=1}^{s} S^q_{ie} Z_e$$

$$g^q_\xi = W^q_\xi + \sum_{e,e'=1}^{s} S^q_{\xi e e'} Z_e Z_{e'} + \sum_{e=1}^{s} W^q_{\xi e} Z_e$$

$$U^q_{\xi e} = \sum_{e'=1}^{s} (S^q_{\xi e e'}(-h^q_{e'}) + S^q_{\xi e' e}(-p Z_{e'})) - p W^q_{\xi e'}$$

und damit die gewünschte Darstellung in (2') von Definition 5.1.

(2) Die Auflösung der p-Singularitäten

Beweis von Satz 3.7. Mit den Bezeichnungen von 3.7 sei J ein endliches Erzeugendensystem von $\underline{q}$ und $f = (f_1, \ldots, f_r)$ ein beliebiges System von r Potenzreihen ($r = ht(\underline{q})$) aus J. Um 3.7 zu beweisen genügt es, eine endliche Teilmenge

$$H^f \subseteq \{\underline{q}' \in \operatorname{Spec} R[[T, Y]][X, Z],\ Z = (Z_1, \ldots, Z_{N+N'}), \underline{q}' \supseteq \underline{q},$$
$$ht(\underline{q}') = ht(\underline{q}) + N + N'\}$$

zu finden und für jede monoton steigende Funktion φ mit $\varphi \geqq 1_{\mathbb{N}}$ eine Funktion β^f zu finden mit der folgenden Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl γ und alle $y \in \underline{m} R[[T]]^N$ und $x \in R[[T]]^{N'}$ mit $\underline{q}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\beta^f(\gamma)}$ und $0 \neq l(\gamma, f, y, x) < \infty$ existiert ein $\underline{q}' \in H^f$ und ein $\lambda \in \mathbb{N}$ sowie ein $z \in R[[T]]^{N+N'}$ mit $\underline{q}'(y, x, z) \equiv 0 \bmod T^{\varphi(\lambda)}$ und $l(\lambda, \underline{q}', y, x, z) < l(\gamma, f, y, x)$.

(Dabei ist $l(\gamma, f, y, x)$ die höchste Potenz von p, die alle Koeffizienten der Monome in T vom Grad $\leqq \gamma$ der $M(y, x)$ teilt, wobei M alle $r \times r$-Minoren der durch f definierten Jacobischen Matrix durchläuft).

Wenn wir diesen Fall erledigt haben, setzen wir

$$H(\underline{q}) = \bigcup_{f \subset J} H^f \quad \text{und} \quad \beta = \max\{\beta^f, f \subseteq J\}.$$

Es ist klar, daß dann 3.7 bewiesen ist.

Wir wollen nun im folgenden zur besseren Unterscheidung Ideale in $R[[T, Y]][X]$ wie bisher durch „—" kennzeichnen und Ideale in $k[[T, Y]][X]$ durch „~".

Sei nun $f = (f_1, \ldots, f_r)$ ein System von r Potenzreihen aus J. Sei $\tilde{a}_1$ das von $f_1^0, \ldots, f_r^0$ und allen $r \times r$-Minoren der Matrix $\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i^0}{\partial X_k}\right)$ in $k[[T, Y]][X]$ erzeugte Ideal. Sei $G(\tilde{a}_1)$ und $\alpha_{\tilde{a}_1}$ wie in 5.2. Wir konstruieren eine Folge $\{G_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ auf die folgende Weise:

$$G_1 = G(a_1), \quad G_m = \bigcup_{\tilde{q} \in G_{m-1}} (G(\tilde{q} + (D^{\tilde{q}0})) \cup G(\tilde{q} + (H^{\tilde{q}0}_\xi)) \cup G(\tilde{q} + (Q^{\tilde{q}0}))),$$

wobei $D^{\tilde{q}0}, H^{\tilde{q}0}_\xi, Q^{\tilde{q}0} \notin \tilde{q}$ die nach 5.2 zu $\tilde{q}$ assoziierten Potenzreihen sind. Es ist klar, wenn G_m nicht leer ist und $\tilde{q}' \in G_m$, dann existiert ein $\tilde{q}'' \in G_{m-1}$ mit $\tilde{q}'' \subsetneqq \tilde{q}'$.

Damit gibt es, falls G_1 nicht leer ist, eine natürliche Zahl $e \in \mathbb{N}$, so daß $G_e \neq \emptyset$ ist und $G_{e+1} = \emptyset$.
Wir setzen $G = \bigcup_m G_m$ und betrachten das System der zu $\tilde{q} \in G$ und f nach 5.2. assoziieren $\{g_i^{\tilde{q}}\}_{i=1,\ldots,r+s}$, wobei wir $g_{r+i}^{\tilde{q}} = pZ_i - h_i^{\tilde{q}}$ setzen ($s = ht(\tilde{q})$). Wir fügen zu diesem System noch die Gleichungen $g_{r+u}^{\tilde{q}} = Z_u$ für $s < u \leqq N + N'$ hinzu und haben auf diese Weise ein System von Polynomen $g^{\tilde{q}} = \{g_i^{\tilde{q}}\}$ $i = 1, \ldots, N + N' + r$ aus $R[[T, Y]][X, Z]$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_{N+N'})$. Wir setzen nun

$$H = \{(\underline{q}, Z)\} \cup \{\underline{q}', \underline{q}' \supseteq \underline{q}, \underline{q}' \text{ ein zu } (g_1^{\tilde{q}}, \ldots, g_{r+N+N'}^{\tilde{q}}) \text{ assoziiertes Primideal für ein } \tilde{q} \in G, ht(\underline{q}') = N + N' + ht(\underline{q})\}.$$

Nun wollen wir die zu f und φ assoziierte Funktion $\beta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstruieren. Wenn alle $r \times r$-Minoren der f entsprechenden Jacobischen Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$ in $\underline{q}$ enthalten sind, wählen wir $\beta(\gamma) = \gamma$ für alle $\gamma \in \mathbb{N}$; dann gibt es nämlich kein $y \in \underline{m}R[[T]]^N$, $x \in R[[T]]^{N'}$ mit $\underline{q}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\beta(\gamma)}$ und $l(\gamma, f, y, x) < \infty$.

Wir können also annehmen, daß ein $r \times r$-Minor M der f entsprechenden Jacobischen Matrix existiert mit $M \notin \underline{q}$. Sei $\sqrt{(f)} = \underline{q}_0 \cap \cdots \cap \underline{q}_\mu$ die Primidealzerlegung von $\sqrt{(f)}$ in $R[[T, Y]][X]$. Nach der Wahl von f ist $\underline{q}$ ein zu f assoziiertes Primideal. Sei also o.B.d.A. $\underline{q} = \underline{q}_0$. Wenn $\mu > 0$ ist, setzen wir $\underline{b} = \underline{q}_1 \cap \cdots \cap \underline{q}_\mu$ und betrachten die kleinste Zahl d mit $M^d \in \underline{q} + \underline{b}$ für alle $r \times r$-Minoren der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$. Die Existenz eines solchen d zeigt man analog zum Beweis $n = 0$ im Teil 3. Wenn $\mu = 0$ ist, setzen wir $d = 1$. Sei nun $\alpha_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die wie folgt definierte Funktion:

$$\alpha_m(c) = \max\{\alpha_{\tilde{q} + (H^{\tilde{q}0})}(c), \alpha_{\tilde{q} + (Q^{\tilde{q}0})}(c), \alpha_{\tilde{q} + (D^{\tilde{q}0})}(c); \tilde{q} \in G_m\}$$

für alle $c \in \mathbb{N}$ und $m = 1, \ldots, e$. Wir konstruieren induktiv eine Familie von Zahlen $\{\bar{\beta}_m\}_{m=0,\ldots,e}$ auf die folgende Weise:

$$\beta_0 = \max\{\alpha_e(1), \gamma d\}, \qquad \bar{\beta}_m = \alpha_{e-m}(VW\varphi(\gamma + (r+2)\bar{\beta}_{m-1}))$$

für $m = 1, \ldots, e$, ($\alpha_0 = \alpha_{\tilde{a}_1}$), wobei W eine Zahl ist, die größer als die Anzahl der zu $(g^{\tilde{q}})$ assoziierten Primideale ist für alle $\tilde{q} \in G$, und V eine natürliche Zahl ist mit $(\sqrt{(g^{\tilde{q}})})^V \subseteq (g^{\tilde{q}})$ für alle $\tilde{q} \in G$. Wir setzen $\beta(\gamma) = \varphi(\bar{\beta}_0)$.

Wir müssen nun zeigen, daß die so definierten H und β den Bedingungen von 3.7 genügen.

Sei $\gamma \geqq 0$ und $y \in \underline{m}R[[T]]^N$, $x \in R[[T]]^{N'}$ mit $\underline{q}(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\beta(\gamma)}$ und $0 \neq l(\gamma, f, y, x) < \infty$. Gibt es einen $r \times r$-Minor M der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$ mit $M(y, x) \not\equiv 0 \bmod(p, T^{\bar{\beta}_e})$, dann wählen wir $\underline{q}' = (\underline{q}, Z)$, $\lambda = \bar{\beta}_e$ und $z_u = 0$ für alle $u = 1, \ldots, N + N'$. Es ist dann $\underline{q}'(y, x, z) \equiv 0 \bmod T^{\varphi(\lambda)}$ und $l(\lambda, \underline{q}', y, x, z) = 0$. Im anderen Fall (wenn ein solcher Minor nicht existiert) folgt, daß $\tilde{a}_1(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_e}$ ist. Es existiert also ein $\tilde{q} \in G_1$, so daß $\tilde{q}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_e}$ ist, wobei wir hier der Kürze halber mit ϑ_m die Zahl $VW\varphi(\gamma + (r+2)\bar{\beta}_{m-1})$ für $m = 1, \ldots, e$ bezeichnen. Man überlegt sich nun leicht, daß eine natürliche Zahl m' existiert und ein $\tilde{q} \in G_{e-m'+1}$ mit $\tilde{q}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{m'}}$ und $H_\xi^{\tilde{q}0}(y^0, x^0)$, $D^{\tilde{q}0}(y^0, x^0)$, $Q^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_{m'-1}}$.

Diese Zahl m' findet man auf die folgende Weise: Nehmen wir einmal an, $\tilde{q}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_m}$ und $D^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_{m-1}}$ für ein $\tilde{q} \in G_{e-m+1}$ $m \in \{1, \dots, e\}$. Dann ist $(\tilde{q} + (D^{\tilde{q}0}))\,(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_{m-1}}$, folglich existiert ein $\tilde{q}' \in G_{e-m}$, so daß $\tilde{q}'(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{m-1}}$ ist. Falls $H_\xi^{\tilde{q}'0}(y^0, x^0) \not\equiv 0$, $D^{\tilde{q}'0}(y^0, x^0) \not\equiv 0$, $Q^{\tilde{q}'0}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_{m-2}}$ ist, setzen wir $m' = m - 1$, ansonsten fahren wir auf diese Weise fort. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten werden wir auf jeden Fall am Ziel sein, weil $H_\xi^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0$, $D^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0$, $Q^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_0}$ ist für alle $\tilde{q} \in G_e$. Wir setzen nun $\lambda = \gamma + (r+2)\bar{\beta}_{m'-1}$. Sei nun $\tilde{q} \in G_{e-m'+1}$ mit $\tilde{q}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{m'}}$ und $H_\xi^{\tilde{q}0}(y^0, x^0)$, $D^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0$, $Q^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_{m'-1}}$.

Nach 5.2 haben wir folgende Gleichungen in $R[[T, Y]][X, Z]$:

1) Wir setzen zur Abkürzung wie zuvor $g_{r+u}^{\tilde{q}} = pZ_u - h_u^{\tilde{q}}$, $u = 1, \dots, s$ $(s = ht(\tilde{q}))$,

2) $Q^{\tilde{q}} f_i = p g_i^{\tilde{q}} + \sum_{u=1}^{s} U_{iu}^{\tilde{q}} g_{r+u}^{\tilde{q}}$ für $i \neq \xi$,

3) $Q^{\tilde{q}} \left(\sum_{i=1}^{r} H_i^{\tilde{q}} f_i \right) = p^2 g_\xi^{\tilde{q}} + \sum_{u=1}^{s} U_{\xi u}^{\tilde{q}} g_{r+u}^{\tilde{q}}$.

Sei nun $z \in R[[T]]^{N+N'}$ mit $g_{r+u}^{\tilde{q}}(y, x, z) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{m'}}$, $u = 1, \dots, s$ (ein solches z können wir finden, da $h_u^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{m'}}$ ist). Wir setzen weiterhin $z_u = 0$ für $s < u \leqq N + N'$. Es ist klar, daß bei dieser Wahl $(g^{\tilde{q}})(y, x, z) \equiv 0 \bmod T^{\vartheta_{m'}}$ ist; folglich existiert ein $\underline{q}'$ aus der Menge der zu $(g^{\tilde{q}})$ assoziierten Primideale mit $\underline{q}'(y, x, z) \equiv 0 \bmod T^{\varphi(\bar{\lambda})}$. Wir zeigen nun, daß $\underline{q}' \supseteq \underline{q}$. Unter Benutzung von 1) und 2) erhalten wir, daß $Q^{\tilde{q}} f_i \in \underline{q}'$ ist für $i \neq \xi$ und $Q^{\tilde{q}} H_\xi^{\tilde{q}} f_\xi \in \underline{q}'$. Nun ist aber $H_\xi^{\tilde{q}}$ und $Q^{\tilde{q}} \notin \underline{q}'$, weil $\underline{q}'(y, x, z) \subseteq T^{\varphi(\lambda)}$ ist und $H_\xi^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0$, $Q^{\tilde{q}0}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\bar{\beta}_{m'-1}}$ ist; folglich liegen die $f_1, \dots, f_r$ in q'. Wenn nun $\sqrt{(f_1, \dots, f_r)} = \underline{q}$ ist, sind wir fertig. Absonsten müssen wir uns an die Primidealzerlegung von $\sqrt{(f)}$ erinnern und an die Definition von d und $\underline{b}$: Es existieren also $M_1 \in \underline{q}$ und $M_2 \in \underline{b}$, so daß $M^d = M_1 + M_2$ ist. Nun ist aber $M^{0d}(y^0, x^0) \not\equiv 0 \bmod T^{\gamma d}$ und $M_1(y, x) \equiv 0 \bmod T^{\beta(\gamma)}$. Daraus folgt, daß $M_2(y, x) \not\equiv 0 \bmod T^{\gamma d}$ ist. Dann ist aber $\underline{b}(y, x) \not\equiv 0 \bmod T^{\varphi(\lambda)}$ und somit $\underline{b} \subsetneqq \underline{q}'$. Da aber $\underline{q}\,\underline{b} \subseteq \underline{q} \cap \underline{b} \subseteq \sqrt{(f)} \subseteq \underline{q}'$ gilt, folgt $\underline{q} \subseteq \underline{q}'$.

Wir müssen nun zum Schluß noch zeigen, daß sich die ganze Mühe gelohnt hat, d.h. daß $l(\lambda, \underline{q}', y, x, z) < l(\gamma, f, y, x)$ ist. Wir setzen $l(\gamma, f, y, x) = t$. Es genügt zu zeigen (nach Wahl von $\underline{q}'$), daß $l(\lambda, (g^{\tilde{q}}), y, x, z) < t$ ist. Dazu genügt es einen $(r+N) \times (r+N)$-Minor M der Matrix

$$\left(\frac{\partial g_i^{\tilde{q}}}{\partial Y_j}, \frac{\partial g_i^{\tilde{q}}}{\partial Z_u}, \frac{\partial g_i^{\tilde{q}}}{\partial X_k} \right)$$

$i = 1, \dots, r + N + N'$, $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, N'$, $u = 1, \dots, N + N'$

zu finden mit $M(y, x, z) \not\equiv 0 \bmod (p^t, T^\lambda)$.

Unter Benutzung von 2) und 3) erhalten wir nun modulo $T^{\vartheta_{m'}}$ folgende Kongruenzen:

4) $Q^{\tilde{q}}(y, x) \dfrac{\partial f_i}{\partial Y_j}(y, x) \equiv p \dfrac{\partial g_i^{\tilde{q}}}{\partial Y_j}(y, x, z) + \sum_{u=1}^{s} U_{iu}^{\tilde{q}}(y, x, z) \dfrac{\partial g_{r+u}^{\tilde{q}}}{\partial Y_j}(y, x, z)$

5) $Q^{\tilde{q}}(y, x) \sum_{i=1}^{r} H_i^{\tilde{q}}(y, x) \dfrac{\partial f_i}{\partial Y_j}(y, x) \equiv p^2 \dfrac{\partial g_\xi^{\tilde{q}}}{\partial Y_j}(y, x, z) + \sum_{u=1}^{s} U_{\xi u}^{\tilde{q}}(y, x, z) \dfrac{\partial g_{r+u}^{\tilde{q}}}{\partial Y_j}(y, x, z)$

für $j=1,\dots,N$. Analoges gilt für die partiellen Ableitungen nach X. Wenn man 4) und 5) benutzt und berücksichtigt, daß für $i>s$ $\frac{\partial g^{\bar q}_{r+i}}{\partial Y_j}=0$, $\frac{\partial g^{\bar q}_{r+i}}{\partial X_j}=0$ ist und $\frac{\partial g^{\bar q}_{r+i}}{\partial Z_j}=\delta_{ij}$ und für $i\leqq s$ gilt

$$\frac{\partial g^{\bar q}_{r+i}}{\partial Y_j}=-\frac{\partial h^{\bar q}_i}{\partial Y_j},\qquad \frac{\partial g^{\bar q}_{r+i}}{\partial X_j}=-\frac{\partial h^{\bar q}_i}{\partial X_j},\qquad \frac{\partial g^{\bar q}_{r+i}}{\partial Z_j}=p\,\delta_{ij},$$

sieht man, daß es genügt einen $(r+s)\times(r+s)$-Minor $\tilde M$ der Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}(y,x) & \frac{\partial f_i}{\partial X_k}(y,x) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline -\frac{\partial h^{\bar q}_u}{\partial Y_j} & -\frac{\partial h^{\bar q}_u}{\partial X_k} & \begin{matrix} p & \\ & \ddots \end{matrix} & 0 \\ & & & p \end{array}\right)$$

zu finden, daß $\tilde M \not\equiv 0 \bmod (p^{r+t+1}, T^{\gamma+\beta_{m'-1}})$ ist. Wenn $r\geqq s$ ist, wählen wir $\tilde M$ als den durch die Spalten des $r\times r$-Minors M und die Spalten $N'+N+1,\dots,$ $N'+N+s$ definierten Minor.

Wenn $r<s\leqq N+N'$ ist, folgt die Behauptung aus folgendem Lemma:

5.3. **Lemma.** *Sei A eine über $R[[T]]$ definierte Matrix von der Form* $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D\end{pmatrix}$, *wobei B eine $r\times N$-Matrix ist, C eine $s\times N$-Matrix und $D=p\,I_s$ (I_s die $s\times s$-Einheitsmatrix), $r<s\leqq N$. Wir setzen voraus, daß ein $r\times r$-Minor M von B existiert mit $M\not\equiv 0 \bmod (p^{t+1}, T^{\gamma})$ und daß ein $s\times s$-Minor M' von C existiert mit $M'\not\equiv 0 \bmod (p, T^{\gamma'})$. Dann existiert ein $(r+s)\times(r+s)$-Minor $\tilde M$ von A, so daß $\tilde M\not\equiv 0 \bmod (p^{r+t+1}, T^{\gamma+\gamma'-1})$ ist.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß für alle $r\times r$-Minoren M von B gilt $M\equiv 0 \bmod (p^t, T^{\gamma})$.

Wir betrachten zunächst den Fall $n=1$, d.h. T ist nur eine Unbestimmte. Sei C^0 die Restklassenmatrix $\bmod\, p$. Die Elemente von C^0 liegen dann in dem diskreten Bewertungsring $k[[T]]$ (mit $R/p=k$). Es gibt somit zwei invertierbare Matrizen U' ($s\times s$-Matrix) und V' ($N\times N$-Matrix) mit Elementen aus $R[[T]]$, so daß $U'^0\,C^0\,V'^0$ eine diagonale $s\times N$-Matrix ist. Sei U die $(r+s)\times(r+s)$-Matrix $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & U'\end{pmatrix}$ und V die $(s+N)\times(s+N)$-Matrix $\begin{pmatrix} V' & 0 \\ 0 & U'^{-1}\end{pmatrix}$. Es ist klar, daß es genügt einen $(r+s)\times(r+s)$-Minor $\tilde M$ von $A'=\begin{pmatrix} BV' & 0 \\ U'CV' & D\end{pmatrix}=UAV$ zu finden, so daß $\tilde M\not\equiv 0 \bmod (p^{r+t+1}, T^{\gamma+\gamma'-1})$ ist. Wir haben damit unser Problem auf den Fall reduziert, daß C^0 eine Diagonalmatrix ist. Nun seien $u_1,\dots,u_r$ die Spalten von M. Es gibt $s-r$-Spalten von M', die nicht in M vorkommen, sagen wir $u_{r+1},\dots,u_s$. Nun gibt es einen $(s-r)\times(s-r)$-Minor M'' von C, in dem die Spalten $u_{r+1},\dots,u_s$ vorkommen, mit der Eigenschaft $M''\not\equiv 0 \bmod (p, T^{\gamma'})$. Seien $V_{r+1},\dots,V_s$ die Zeilen von M''. Sei M der $(r+s)\times(r+s)$-Minor von A, der durch die Spalten $u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_s$, $N+V_1,\dots,N+V_r$ gegeben ist, wobei $V_1,\dots,V_r$ alle die

Zeilen von C sind, die nicht in M'' liegen. Dann gilt $\tilde{M} \equiv p^r M'' M \not\equiv 0 \bmod (p^{r+t+1}, T^{\gamma+\gamma'-1})$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall $n>1$. Sei M ein $r\times r$-Minor von B, so daß $M = Hp^t + H'$ ist, wobei $H \not\equiv 0 \bmod (p, T^\gamma)$, $H' \equiv 0 \bmod T^\gamma$, und sei M' ein $s\times s$-Minor von C, so daß $M' \not\equiv 0 \bmod (p, T^{\gamma'})$ ist. Wir können für diese Lemma voraussetzen, daß $k=R/p$ unendlich ist, weil wir anderenfalls R hier durch eine unverzweigte Erweiterung R' von R mit unendlichen Restklassenkörper k' ersetzen könnten. Es gibt also einen linearen Automorphismus $\sigma\colon R[[T]] \to R[[T]]$ der Form $\sigma(T_i) = T_i + a_i T_n$, $a_n = 0$, so daß $\sigma(H)$ und $\sigma(M') \bmod p$ T_n-allgemein sind. Wir können also o.B.d.A. voraussetzen, daß $H^0(0,\dots,0,T_n) \not\equiv 0 \bmod T^\gamma$ ist und $M'^0(0,\dots,0,T_n) \not\equiv 0 \bmod T^{\gamma'}$ ist. Sei nun $\sigma'\colon R[[T]] \to R[[T_n]]$ die kanonische Projektion, d.h. $\sigma'(S) = S(0,\dots,0,T_n)$. Nun ist klar, daß $\sigma'(A)$ eine über $R[[T_n]]$ definierte Matrix ist, die für den Fall einer Variablen den Bedingungen unseres Lemmas genügt. Es gibt also einen $(r+s)\times(r+s)$-Minor $\tilde{M}$ von A, so daß $\sigma'(\tilde{M}) \not\equiv 0 \bmod (p^{r+t+1}, T_n^{\gamma+\gamma'-1})$ ist. Dann ist aber auch $\tilde{M} \not\equiv 0 \bmod (p^{r+t+1}, T^{\gamma+\gamma'-1})$. Damit ist nun 3.7 bewiesen.

6. Anhang

Sei R ein kompletter diskreter Bewertungsring, p die Bewertung.

6.1. **Lemma.** *Sei $\underline{a} \subseteq R[[Y]][X]$ ein Primideal mit $\underline{a} \cap R = 0$. Dann existiert ein R-Automorphismus φ von $R[[Y]]$ von der Form $Y_i \mapsto Y_i + \sum_{j>i} Y_j^{e_j}$, $e_j \geqq 2$, so daß $\varphi(\underline{a})$ die folgende Eigenschaft hat:*

(1) *$\varphi(\underline{a})$ ist über $R[[Y_1,\dots,Y_m]][Y_{m+1},\dots,Y_N,X]$ definiert und*

(2) *$\varphi(\underline{a}) \cap R[[Y_1,\dots,Y_m]] = 0$.*

Beweis. Wenn $\underline{a} \cap R[[Y]] = 0$ ist, sind wir fertig. Wenn nun $\underline{a} \cap R[[Y]] \neq 0$ ist, können wir (da $\underline{a} \cap R = 0$ ist) ein von Null verschiedenes f aus $\underline{a} \cap R[[Y]]$ finden, das nicht durch p teilbar ist (Primidealeigenschaft). Nach einer Transformation der Art $Y_i \mapsto Y_i + Y_N^{\alpha_i}$, können wir annehmen, daß f Y_N-allgemein ist, d.h. $f(0,\dots,0,Y_N) \neq 0$. Wir können weiterhin annehmen, daß wir von einem Element minimaler Ordnung aus $\underline{a} \cap R[[Y]]$ ausgegangen sind. Nach evtl. Multiplikation mit einer Einheit können wir annehmen, daß $f = Y_N^s + b_{s-1} Y_N^{s-1} + \dots + b_0$ ist mit $b_i \in R[[Y_1,\dots,Y_{N-1}]]$ (Weierstraßscher Vorbereitungssatz). Wir können nun mittels des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes und f ein Erzeugendensystem von $\underline{a}$ so abändern, daß $\underline{a}$ über $R[[Y_1,\dots,Y_{N-1}]][Y_N,X]$ definiert ist. Wenn nun $\underline{a} \cap R[[Y_1,\dots,Y_{N-1}]] = 0$ ist, sind wir fertig. Ansonsten setzen wir das Verfahren analog fort.

6.2. **Satz** (Jacobisches Kriterium). *Sei $\underline{a} \subseteq R[[T]][X]$ ein Primideal mit $R[[T]] \cap \underline{a} = 0$, dann ist für ein Erzeugendensystem $f_1,\dots,f_m$ von $\underline{a}$ Rang $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right)$ mod $\underline{a} = ht(\underline{a})$, wenn $Q(R[[T]][X]/\underline{a}) | Q(R[[T]])$ separabel ist.*

Beweis. Da $ht(\underline{a}) = ht(\underline{a}\,Q(R[[T]])[X])$ ist, kann man das Jacobische Kriterium für Polynomenringe über Körpern anwenden (vgl. Nagata, M.: Local rings. New York (1962)) und erhält mit Hilfe von 6.1 die Aussage des Satzes.

6.3. **Folgerung.** *Sei R von der Charakteristik* 0; *seien T, Y, X wie in* 2.5. *Sei $\underline{a} \subseteq R[[T, Y]][X]$ ein Ideal mit $\underline{a} \cap R[[T, Y]] = 0$. Sei $\underline{q}$ ein zu $\underline{a}$ assoziiertes Primideal und $\underline{q}'$ ein Primideal, das $\underline{q}$ enthält mit $\underline{q}' \cap R[[T, Y]] = 0$.*

Dann ist $S = R[[T, Y]][X]_{\underline{q}} / \underline{a} R[[T, Y]][X]_{\underline{q}}$ regulär genau dann, wenn Rang $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_k}\right) \bmod \underline{q}' = h\,t(\underline{q})$ ist.

Dabei sei $f_1, \ldots, f_m$ ein Erzeugendensystem von $\underline{a}$.

Man kann hier den Beweis des entsprechenden Satzes von Nagata übertragen. Der Spezialfall für $\underline{a} = \underline{q} = \underline{q}'$ ist 6.2.

Literatur

1. Artin, M.: On the solutions of analytic equations. Inventiones math. **5**, 277–291 (1968)
2. Artin, M.: Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. IHES **36**, 23–58 (1969)
3. Artin, M.: Construction techniques for algebraic spaces. Actes Congrès intern. math. 419–423 (1970)
4. Artin, M.: The implicit function theorem in algebraic geometry. In: Proceedings of the Bombay Colloquium, pp. 13–34 (1968)
5. Greenberg, M.: Rational points in henselian discrete valuation rings. Publ. Math. IHES **31**, 59–64 (1964)
6. Grothendieck, A., Dieudonne, J.: Elements de géométrie algébrique. Publ. Math. IHES **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **21**, **28** (1960/1968)
7. Kurke, H., Pfister, G., Roczen, M.: Henselsche Ringe und algebraische Geometrie. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975
8. Neron, A.: Modeles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. Publ. Math. IHES **21** (1964)
9. Pfister, G.: Ringe mit Appproximationseigenschaft. Mathematische Nachrichten **57**, 169–175 (1973)
10. Pfister, G.: Einige Bemerkungen zur Struktur lokaler henselscher Ringe, erscheint in: Beiträge zur Algebra und Geometrie (1975)
11. Popescu, D.: A strong approximation theorem over discrete valuation rings. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **XX** (1975)
12. Raynaud, M.: Travaux récents de M. Artin. Sem. Bourbaki **21**, no. 363 (1968/1969)
13. Raynaud, M.: Anneaux henseliens et approximations. Colloque d'Algebre de Rennes (France) (1972)

Gerhard Pfister
Sektion Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
DDR-108 Berlin
Unter den Linden 6
Deutsche Demokratische Republik

Dorin Popescu
Department of Mathematics
University of Bucharest
Str. Academiei nr. 14
Bucharest
Romania

(Eingegangen am 21. November 1974/11. Februar 1975)