

Auflösung von Singularitäten

von Anne Frühbis-Krüger and Gerhard Pfister

Das Problem der Existenz und Konstruktion einer Auflösung von Singularitäten ist eine der zentralen Fragestellungen der algebraischen Geometrie. Während sie in positiver Charakteristik noch offen ist, wurde die Existenz in Charakteristik Null in den 1960er Jahren von H. Hironaka (in nicht konstruktiver Weise) bewiesen. Erst mehr als 25 Jahre später gelang es, daraus konstruktive Zugänge zu entwickeln, auf deren Basis es dann in den letzten Jahren möglich wurde, einen Algorithmus zu implementieren. In diesem Artikel möchten wir den Leser in diese Fragestellung und in die algorithmische Vorgehensweise bei der Konstruktion der Auflösung einführen.

Einige grundlegende Begriffe

Die Grundbausteine der Varietäten in der algebraischen Geometrie sind die sogenannten affinen Varietäten; dies sind Nullstellenmengen $V(f_1, \dots, f_k) := \{z \in K^n \mid f_i(z) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\}$ von Polynomen f_1, \dots, f_k im affinen n -dimensionalen Raum K^n . Dabei wollen wir der Einfachheit halber hier voraussetzen, dass K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen ist¹. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Beispiele von affinen Varietäten. Die Topologie, die auf K^n gewählt wird, ist die Zariski-Topologie, d. h. die abgeschlossenen Mengen sind genau die Nullstellenmengen von Systemen von Polynomen; K^n induziert damit auf jeder affinen Varietät die Zariski-Topologie. Offene Mengen in der Zariski-Topologie auf K^n sind also Komplemente von Varietäten und insbesondere dicht in K^n ; in gleicher Weise ist der Zariski-Abschluss offener Teilmengen einer irreduziblen² affinen Varietät bereits die ganze Varietät.

Ein und dieselbe affine Varietät V kann die Nullstellenmenge verschiedener Systeme von Polynomen sein, $V(f_1, \dots, f_m) = V(g_1, \dots, g_s)$. Über den komplexen Zahlen besagt der Hilbertsche Nullstellensatz, dass dann für jeden Index i eine hinreichend große Potenz von g_i sich schreiben lässt als $g_i^N = \sum_{j=1}^m h_{ij} f_j$ für geeignete Polynome h_{ij} . Wir werden hier f_1, \dots, f_m ein reduziertes System³ nennen, wenn dabei stets $N = 1$ gewählt werden kann (im Fall $m = 1$ muss dann z. B. f_1 quadratfrei sein).

Morphismen zwischen affinen Varietäten sind Einschränkungen von polynomialen Abbildungen der umgebenden affinen Räume. Isomorphismen sind wie üblich Morphismen, die ein Inverses besitzen. Auf offenen Teilmengen affiner Varietäten sind als Morphismen Abbildungen zugelassen, welche durch rationale Funktionen (Quotienten zweier Polynome) definiert sind, deren Nenner auf der offenen Menge nirgends

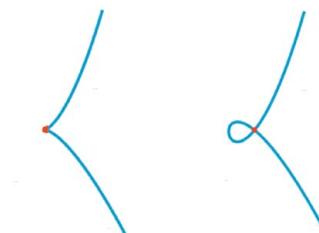


Abbildung 1. Beispiele affiner Varietäten sind diese ebenen Kurven: die Spitze $V_1 = V(y^2 - x^3) \subseteq K^2$ (linkes Bild) und der Doppelpunkt $V_2 = V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq K^2$ (rechtes Bild). In beiden Kurven ist der einzige singuläre Punkt in rot markiert.

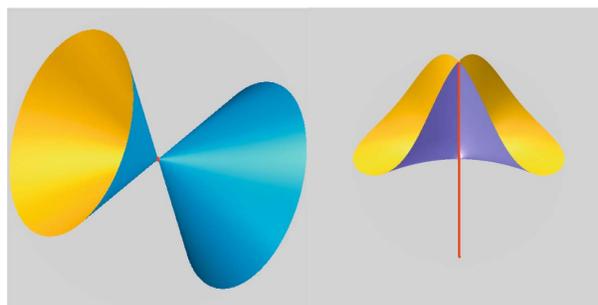


Abbildung 2. Weitere Beispiele affiner Varietäten, sind diese Flächen: der Doppelkegel $V_3 = V(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq K^3$ (linkes Bild) und Whitney's Regenschirm $V_4 = V(z^2 - xy^2) \subseteq K^3$ (rechtes Bild). Wie in den vorherigen Beispielen auch ist der singuläre Ort in rot eingezeichnet. (Im rechten Bild scheint Whitneys Regenschirm eine 1-dimensionale Komponente zu besitzen. Dies ist eine Unzulänglichkeit des reellen Bildes; es lässt sich – im Komplexen – direkt nachrechnen, dass dieser Schein trügt und Whitneys Regenschirm aus genau einer 2-dimensionalen Komponente besteht.)

verschwindet. Diese werden oft als rationale Abbildungen bezeichnet; existiert darüberhinaus noch eine rationale Abbildung, die eine Inverse zu der ersten ist, so spricht man von einer birationalen Abbildung. Da Zariski-offene Teilmengen irreduzibler Varietäten, wie bereits oben erwähnt, dicht sind, bedeutet die

¹ In der Praxis rechnen Implementationen über \mathbb{Q} , Argumentation und Interpretation erfolgen aber über \mathbb{C} . Wenn jedoch Bilder, wie in diesem Artikel zur Veranschaulichung herangezogen werden, so sind diese natürlich über den reellen Zahlen zu verstehen.

² Eine affine Varietät heißt irreduzibel, falls sie sich nicht als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen schreiben lässt.

³ Dies ist eine ad hoc Bezeichnung, die wir lediglich einführen, um den Begriff des Radikals eines Ideals zu vermeiden, dessen Einführung den Rahmen dieser kurzen Darstellung sprengen würde.

Existenz einer birationalen Abbildung zwischen zwei irreduziblen Varietäten, dass diese ‚fast überall‘ übereinstimmen. Insbesondere sind ihre Funktionenkörper isomorph.

Der n -dimensionale projektive Raum \mathbb{P}^n ist ein Beispiel für eine algebraische Varietät, die nicht affin ist. So entsteht zum Beispiel der \mathbb{P}^1 durch das Verkleben zweier Geraden außerhalb des Nullpunktes. Dabei wird der Punkt x der einen Geraden mit dem Punkt $\frac{1}{x}$ der anderen identifiziert, wie in Abbildung 3 illustriert.

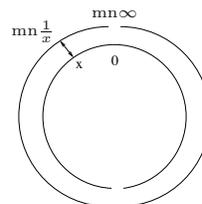


Abbildung 3. Durch geeignete Identifikation aller von Null verschiedener Punkte der beiden Geraden entsteht der $\mathbb{P}^1 = K^1 \cup \{\infty\}$.

Jede algebraische Varietät kann so durch Verkleben von affinen algebraischen Varietäten längs offener Teilmengen erhalten werden.

Viele kennen den projektiven Raum \mathbb{P}^n als Raum der Geraden in K^{n+1} durch den Nullpunkt. Eine solche Gerade ist dann durch ihren Anstieg, d. h. ihre projektiven Koordinaten $(x_0 : \dots : x_n)$, gegeben. Dabei steht $(x_0 : \dots : x_n)$ für die Äquivalenzklasse aller $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in K^{n+1}$ mit $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ und $\lambda \neq 0$. Fordert man, dass eine Koordinate $x_i \neq 0$ ist, dann ist $(x_0 : \dots : x_n) = (\frac{x_0}{x_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{x_n}{x_i})$ und die Menge dieser Punkte ist isomorph zum K^n , also eine affine algebraische Varietät. Man spricht daher auch davon, dass sich der \mathbb{P}^n von $n+1$ affinen Karten überdecken lässt.

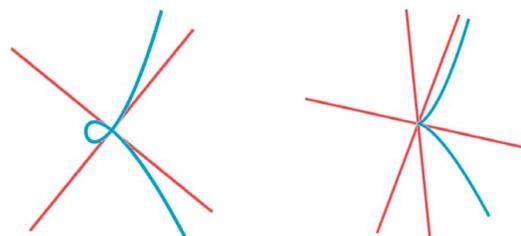


Abbildung 4. Im linken Bild sind die beiden Tangentialrichtungen in rot eingezeichnet, die man auf den ersten Blick in Null an die blaue Kurve legen würde; im rechten Bild sind exemplarisch einige Tangentialrichtungen in Null an die Spitze dargestellt.

Fast jeder Punkt einer algebraischen Varietät hat die Eigenschaft, dass eine Umgebung des Punktes aussieht wie eine Umgebung des Nullpunktes in K^n . Solche Punkte heißen glatte oder reguläre Punkte. Sie sind dadurch charakterisiert, dass der Tangentialraum in diesen Punkten dieselbe Dimension hat wie die Varietät.

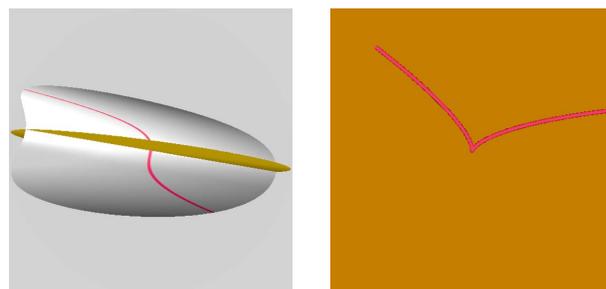


Abbildung 5. Im linken Bild ist die glatte Kurve $V(x - z^2, y - z^3) \subset K^3$ eingezeichnet. Um ihre Lage im Raum besser darstellen zu können, wurde sie dazu als Kurve auf der Fläche $V(x - z^2)$ abgebildet. In braun ist in diesem Bild die Ebene $V(z)$ eingezeichnet, auf die wir die Kurve projizieren. Das Ergebnis dieser Projektion ist dann im rechten Bild zu sehen.

Wenn $V = V(f_1, \dots, f_m) \subseteq K^n$ eine affine algebraische Varietät ist, f_1, \dots, f_m ein reduziertes System und $p \in V$ ein Punkt, dann ist der Tangentialraum $T_{V,p}$ von V im Punkt p der affine Unterraum von K^n durch den Punkt p , der durch den Vektorraum

$$\left\{ q \in K^n \mid \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) q_j = 0 \right\}$$

definiert ist. Reguläre Punkte der Varietät V sind Punkte p , in denen die sogenannte Jacobische Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$ maximalen Rang hat.⁴ Punkte, die nicht regulär sind, heißen singuläre Punkte oder Singularitäten. Die Menge der singulären Punkte von V ist abgeschlossen in V und wir bezeichnen sie mit $Sing(V)$. Im Fall einer Hyperfläche $V = V(f)$, mit quadratfreier f , ist $Sing(V) = V(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. In den

ersten drei unserer Beispiele besteht $Sing(V) = \{0\}$ nur aus dem Koordinatenursprung, im letzten Beispiel ist $Sing(V)$ eine ganze Gerade. Es ist leicht zu sehen bzw. nachzurechnen, dass hier der Tangentialraum K^n ist, wobei n wieder die Dimension des umgebenden Raumes bezeichnet. In Abbildung 4 werden die Beispiele der Kurvensingularitäten aus Abbildung 1 nochmals aufgegriffen zur Illustration des Tangentialraumes im singulären Punkt.

Singularitäten von Kurven entstehen zum Beispiel durch Projektionen von Raumkurven in die Ebene; anschaulich treten sie als Schatten glatter Raumkurven auf. Diese sind singulär, da in der Ebene nicht

⁴ Diese Art der Charakterisierung von Regularität ist auch in anderen Bereichen der Mathematik gebräuchlich, z. B. in der Analysis oder der Differentialgeometrie.

genug Platz für eine solche Kurve ist, wie auch Abbildung 5 illustriert.

Die Problemstellung und ihre Geschichte

Mit Hilfe dieser gerade erläuterten Begriffe ist es nun möglich, das Problem der Auflösung von Singularitäten zu formulieren: Zu einer gegebenen Varietät X sollen eine nicht-singuläre Varietät X' und eine birationale Abbildung $\pi : X' \rightarrow X$ gefunden werden, so dass π einen Isomorphismus $X' \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(X)) \xrightarrow{\cong} X \setminus \text{Sing}(X)$ induziert und weitere gute Eigenschaften hat.⁵ Anschaulich gesprochen ist das Ziel die Konstruktion eines glatten Modells, das mit der gegebenen Varietät fast überall übereinstimmt. Am bereits oben genannten Beispiel der Spitze $V(x^2 - y^3) \subset \mathbb{C}^2$ lässt sich diese Problemstellung (und ihre Lösung) leicht illustrieren (Abbildung 6).

Auch historisch gesehen wurde diese Fragestellung zuerst für den Fall von Kurven über dem Körper der komplexen Zahlen behandelt: bereits in der zweiten Hälfte des 19-ten Jahrhunderts war dies ein sehr aktives Forschungsgebiet und in den letzten Jahren jenes Jahrhunderts wurde die Existenz einer Auflösung von Singularitäten in dieser speziellen Situation bewiesen. Eine auch nur annähernd vollständige Nennung wesentlicher Beiträge dazu würde zu weit führen, jedoch sind in diesem Zusammenhang z. B. L. Kronecker, M. Noether und A. Brill zu nennen. Der nächste Schritt, der sich an die Betrachtung der Kurven in natürlicher Weise anschloss, war dann die Betrachtung von Flächen. Hierzu wurden viele Beiträge durch die italienische Schule geliefert (unter anderen auch von O. Chisini, G. Albanese, F. Severi), doch fehlte es diesen häufig an der nötigen Strenge. So war es die Arbeit von H. W. Jung (1908), der lokal Flächen im Raum mit Hilfe einer Projektion in die Ebene studierte, die R. J. Walker schließlich 1935 zu einem ersten mathematisch strengen Beweis der Existenz der Auflösung von Flächensingularitäten über \mathbb{C} weiterführte – durch geeignetes Zusammenfügen der lokalen Argumente zu globalen. Diese frühen Beweise beruhten meist auf analytischen Argumenten; erst in den 1930er Jahren etablierte sich ein stärkerer algebraischer Einfluss, der nun einen systematischeren Zugang ermöglichte, wie in O. Zariski's Beweisen für die Auflösung von Singularitäten von Flächen (1939) und dreidimensionalen Varietäten (1944) über algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteris-

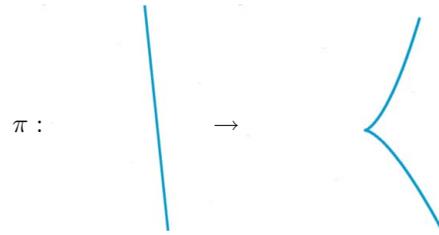


Abbildung 6. Zum Auflösen der Singularität der Spitze V_1 betrachten wir den Morphismus $\pi : K \rightarrow V_1$ mit $\pi(t) = (t^3, t^2)$. Man kann sich leicht überlegen, dass π ein Homöomorphismus ist, aber kein Isomorphismus, da es keine polynomiale Umkehrabbildung gibt. Dagegen ist $\pi : K \setminus \{0\} \rightarrow V_1 \setminus \{(0, 0)\}$ ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\pi^{-1}(x, y) = \frac{x}{y}$.



Abbildung 7. O. Zariski (links) und H. Hironaka (rechts) (Quelle: MacTutor History of Mathematics Archive)

tik Null. Der allgemeine Fall blieb trotz vieler Beiträge noch ungelöst bis es H. Hironaka, einem Schüler von Zariski, 1964 in seinem über 200 Seiten langen Artikel gelang die Existenz der Auflösung von Singularitäten in beliebiger Dimension in Charakteristik Null zu beweisen. Dafür erhielt Hironaka 1970 in Nizza die Fields Medaille.

Doch damit endete das Interesse an solchen Fragestellungen keineswegs. Einerseits sind in positiver Charakteristik lediglich Teilresultate (z. B. S. Abhyankar (1966), J. de Jong (1996)) bekannt, der allgemeine Fall ist jedoch noch immer offen. Andererseits ist Hironakas Beweis in Charakteristik Null extrem komplex und hochgradig nicht-konstruktiv, was z. B. zu einer intensiven Suche nach neuen einfacheren Zugängen – und sei es auch nur für speziellere Fälle wie etwa toroidale Varietäten – und zu der Frage nach algorithmischer Auflösung von Singularitäten geführt hat. Zur letzteren Problemstellung gab es entscheidende Beiträge von den beiden Gruppen um E. Bierstone und P. Milman einerseits und um O. Villamayor und S. Encinas andererseits seit den späten 1980er

⁵ Sie soll eigentlich sein, das heißt in der klassischen Topologie, dass die Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind. Weil sie birational ist, ist sie auch surjektiv.

⁶ Eine ausführliche einführende Darstellung dieser Zugänge, die sie gleichzeitig auch vereinfacht und weiterentwickelt, ist der Artikel *The Hironaka Theorem on Resolution of Singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (2003), 323–403, von H. Hauser.

Jahren,⁶ die schließlich in den letzten Jahren auch zu Computerimplementationen führten. Die grundlegenden Ideen eines solchen algorithmischen Zugangs möchten wir im folgenden Abschnitt näher erläutern.

Algorithmische Auflösung von Singularitäten

Hironakas Methode, Singularitäten aufzulösen, und ihre Konkretisierungen durch algorithmische Zugänge bestehen darin, die Varietät schrittweise durch sogenannte Aufblasungen, die die glatten Punkte der Varietät unverändert lassen, zu verbessern bis sie schließlich singularitätenfrei ist. Eine Aufblasung ist eine spezielle birationale⁷ Abbildung, die in der Varietät einen Punkt (oder allgemeiner die Punkte einer glatten Untervarietät) durch einen projektiven Raum ersetzt. Die Dimension bleibt bei der Aufblasung unverändert. Hierbei nennen wir den Punkt (bzw. die glatte Untervarietät) das Zentrum der Aufblasung. Ist das Zentrum der Aufblasung ein Punkt, so hat der projektive Raum, durch den der Punkt ersetzt wird, gerade die Dimension $n - 1$, wobei n die Dimension der aufzublasenden Varietät ist; ist das Zentrum von höherer Dimension d , so wird jeder Punkt des Zentrums durch einen \mathbb{P}^{n-d-1} ersetzt. Somit erhält man dann z. B. bei der Aufblasung des K^n in einem Punkt eine Varietät, die in einen $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ eingebettet ist. Anschaulich schafft die Aufblasung des umgebenden Raumes durch Einbettung in einen höherdimensionalen Raum mehr Platz zum Glattwerden. Beispiele für Aufblasungen in einem Punkt und die dadurch erzielten Verbesserungen der jeweiligen Singularität zeigen die Abbildungen 8 und 9. Aufblasungen mit Kurven als Zentrum sind aus Dimensionsgründen im allgemeinen schwer graphisch darzustellen, Abbildung 10 zeigt ein einfaches Beispiel.

Entscheidend für das Auflösen von Singularitäten mit dieser Methode ist die Wahl der Zentren; außerhalb der Zentren ändert sich ja bei der Aufblasung nichts. Insbesondere müssen bei algorithmischer Auflösung folgende Probleme und Aufgabenstellungen gelöst werden:

1. Bei jeder Aufblasung muss eine Verbesserung der Singularitäten erzielt werden, genauer gesagt eine Verbesserung der Gesamtsituation, die neben den Singularitäten auch die Konfiguration der exceptionellen Divisoren berücksichtigt.
2. Das Schnittverhalten der exceptionellen Divisoren ist nach jeder Aufblasung so einfach wie möglich.⁸

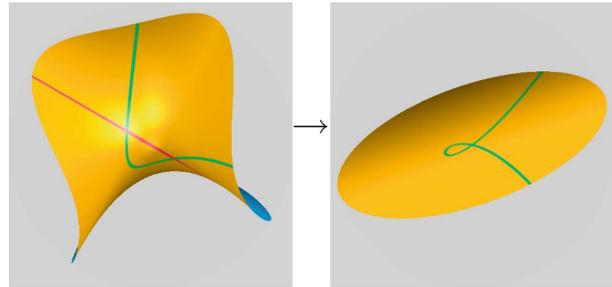


Abbildung 8. Die Aufblasung des K^2 in 0 ist die Varietät $X = \{(x, y; u : v) \in K^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\}$. Betrachtet man die Projektion $\pi : X \rightarrow K^2, \pi(x, y; u : v) = (x, y)$, dann kann man sich leicht davon überzeugen, dass $\pi : X \setminus \pi^{-1}(0) \rightarrow K^2 \setminus \{0\}$ ein Isomorphismus ist und $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}^1$ isomorph zum \mathbb{P}^1 ist. Was geschieht nun mit der (grün eingezeichneten) Kurve $V_2 = V(y^2 - x^2(x + 1))$ aus Beispiel 2 bei dieser Aufblasung? Der Abschluss \bar{V}_2 von $\pi^{-1}(V_2 \setminus \{0\})$ in X heißt die strenge Transformierte von V_2 ; $\pi^{-1}(0)$ wird als exceptionelle Gerade bezeichnet. (Im allgemeinen Fall spricht man von einer exceptionellen Hyperebene oder einem exceptionellen Divisor.) Im obigen Bild erkennt man, dass in unserem Beispiel die strenge Transformierte der Kurve (grün) glatt ist und den exceptionellen Divisor (rot) in zwei Punkten schneidet.

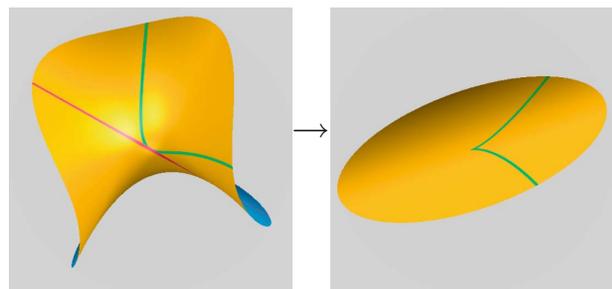


Abbildung 9. In der selben Weise wie in Abbildung 8 lässt sich auch die Spitze im K^2 mit Hilfe einer Aufblasung verbessern. Allerdings sind hier danach die strenge Transformierte der Kurve und der exceptionelle Divisor zueinander tangential, d. h. ihr Schnittverhalten ist noch nicht so einfach wie möglich.

3. Die Zentren treffen die glatten Punkte der ursprünglichen Varietät nicht.
4. Nach endlich vielen Aufblasungen besitzt die Varietät keine singulären Punkte mehr.
5. Das Schnittverhalten der singularitätenfreien strengen Transformaten mit den exceptionellen Divisoren ist am Ende so einfach wie möglich.⁸

Hironakas Vorgehensweise liefert zu der Frage der Wahl geeigneter Zentren lediglich eine Existenzaussage, jedoch keine konkrete Konstruktion. Er stellt

⁷ Wie bereits zuvor erwähnt heißt eine Abbildung birational, falls sie auf einer offenen Menge ein Isomorphismus ist.

⁸ Die Bedingung, das Schnittverhalten solle so einfach wie möglich sein, ist technisch etwas schwieriger zu formulieren und würde den Rahmen dieses Textes sprengen. Für diejenigen, die mit den Begriffen der algebraischen Geometrie vertrauter sind, sei hier angemerkt, dass die exceptionellen Divisoren normale Schnitte haben sollen und am Ende die strenge Transformierte mit den exceptionellen Divisoren ebenfalls nur normale Schnitte haben soll.

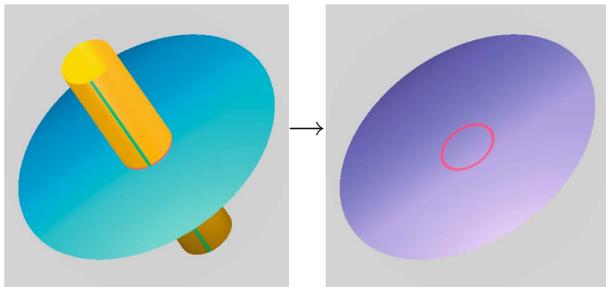


Abbildung 10. Die Aufblasung des K^3 in der Kurve $Z := V(z, x^2 + y^2 - 1)$ ist die Varietät $X = \{(x, y, z; u : v) \in K^3 \times \mathbb{P}^1 \mid uz = v \cdot (x^2 + y^2 - 1)\}$. Betrachtet man ähnlich wie in Abbildung 8 die Projektion $\pi : X \rightarrow K^3$, kann man leicht nachprüfen, dass es sich außerhalb des Zentrums um einen Isomorphismus handelt und dass $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ ist für jeden Punkt $p \in Z$. Die obigen Abbildungen können natürlich die Aufblasung des K^3 nicht wirklich illustrieren, sie veranschaulichen stattdessen, wie die Varietät $V(z) \subseteq K^3$ unter dieser Aufblasung verändert wird. Hierbei ist das Zentrum der Aufblasung der rote Kreis (im rechten Bild). Das linke Bild zeigt nur einen Teil, d. h. eine Karte, der totalen Transformierten. In dieser ist die strikte Transformierten (blau) zu sehen sowie die exzeptionelle Hyperfläche $Z \times \mathbb{P}^1$, wobei zur Veranschaulichung, für einen Punkt $p \in Z$ bzw. $q \in \mathbb{P}^1$, $\{p\} \times \mathbb{P}^1$ in grün eingezeichnet ist und $Z \times \{q\}$ in rot.

die Varietät X lokal als Durchschnitt endlich vieler Hyperflächen dar, so dass die ‚schlechteste‘ Singularität von X im Durchschnitt der schlechtesten Singularitäten der Hyperflächen liegt, und beweist dann, dass sich die Singularitäten der Hyperflächen und damit auch von X durch Aufblasungen verbessern lassen. Als Hilfsmittel hierzu benutzt unter anderem er die Hilbert-Samuel Funktion und führt Standardbasen⁹ ein. Der eigentliche Schritt zur algorithmischen Auflösung von Singularitäten besteht nun darin, eine Konstruktion anzugeben, mit deren Hilfe sich stets das nächstfolgende Zentrum explizit bestimmen lässt. Eine übliche Vorgehensweise dazu ist, für jeden Punkt ein Maß dafür festzulegen, wie ‚schlecht‘ er ist, und dann als Zentrum den Ort zu wählen, an dem dieses Maß maximalen Wert hat.

In Falle von Kurven ist die Vorgehensweise recht leicht einzusehen: Der singuläre Ort besteht aus endlich vielen Punkten, in denen dann aufzublasen ist. Dabei kann es zwar vorkommen, dass man, um Glätte in einem bestimmten Punkt zu erzielen, mehrmals aufblasen muss. Man kann jedoch mit Hilfe einer Invariante, die ein Maß dafür darstellt wie ‚schlecht‘ eine Singularität ist, sicherstellen, dass sich die Singularitäten bei jeder Aufblasung verbessern.

Anders stellt sich die Situation in höheren Dimensionen dar: hier ist der singuläre Ort im allgemeinen keine glatte Untervarietät und kann durchaus

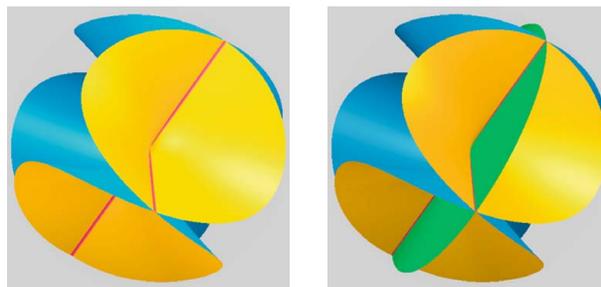
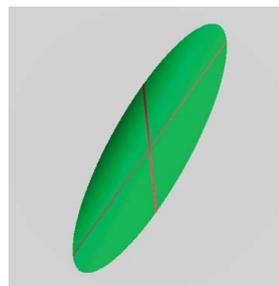


Abbildung 11. Im Bild oben links ist der singuläre Ort der Fläche $X = V(z^2 - x^2y^2) \subset K^3$ rot eingezeichnet, es ist $Sing(X) = V(z, x^2y, xy^2)$. Er stimmt hier zufällig mit dem Ort überein, an dem die gröbere Invariante maximalen Wert 2 annimmt. Im allgemeinen kann der Ort maximaler Ordnung der Fläche aber durchaus kleiner sein als der singuläre Ort. Die grüne Fläche $V(z)$, die im Bild oben rechts zusätzlich eingezeichnet ist, kann in diesem Beispiel als Hyperfläche maximalen Kontaktes benutzt werden. Das Bild unten rechts zeigt die Situation nach dem Übergang zur Dimension 2 des umgebenden Raumes: die neue Varietät $X_{\text{neu}} = V(x^2y^2) \subset W_{\text{neu}} = K^2$ besteht aus 2 Geraden, ihr singulärer Ort ist ein Punkt, der Schnittpunkt der Geraden. Hier ist die Ordnung der definierenden Gleichung von X_{neu} maximal, mit Wert 4. Damit hat insgesamt die steuernde Invariante dort den Wert $(2, 0; 4, 0)$; der Ort des maximalen Wertes ist der Nullpunkt $(0, 0, 0) \subset K^3$, der damit als Zentrum der nächsten Aufblasung gewählt wird.



aus mehreren Komponenten auch unterschiedlicher Dimension bestehen. Im Beispiel von Abbildung 11 besteht der singuläre Ort aus zwei sich schneidenden Geraden, $Sing(X) = V(z, xy)$. Es stellt sich als sehr subtiles Problem heraus, in höheren Dimensionen ein Maß dafür festzulegen, wie ‚schlecht‘ ein Punkt ist, und geeignete Zentren zu wählen, so dass sich die Singularitäten wirklich in jedem Schritt verbessern. So liefert eine Aufblasung der Varietät $V(z^2 - x^2y^2)$ im singulären Punkt des singulären Ortes, der ja auf den ersten Blick als schlechter erscheint als die übrigen Punkte der beiden sich schneidenden Geraden, aus denen der singuläre Ort besteht, gerade wieder die ursprüngliche Varietät; es hat sich also nichts verbessert. (Dieses Beispiel wird in den Abbildungen 11 und 12 illustriert und im Detail ausgeführt.)

Um solche Phänomene kontrollieren und der Komplexität der Situation Rechnung tragen zu können, ist die steuernde Invariante (ein Vektor rationaler Zahlen, der lexikographisch verglichen wird) in höheren

⁹ Für Leser, die mit Gröbnerbasen vertraut sind, sei hier angemerkt, dass der Begriff der Standardbasis dazu sehr eng verwandt ist. Der Hauptunterschied besteht darin, dass die gewählte Monomordnung lokal ist und damit insbesondere keine Wohlordnung.

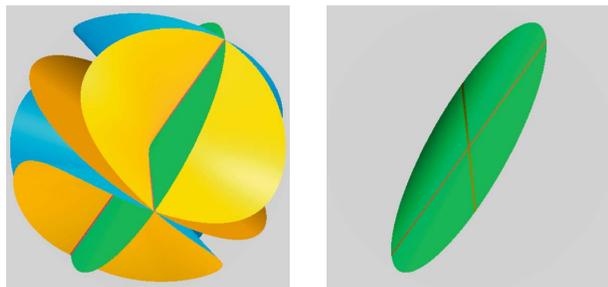


Abbildung 12. Die Aufblasung des K^3 in 0 ist die Varietät $W = \{(x, y, z; u : v : w) \in K^3 \times \mathbb{P}^2 \mid xv = yu, xw = zu, yw = zv\}$. In der affinen Karte definiert durch $u = 1$ erhalten wir den exzeptionellen Divisor $V(x)$ und die strenge Transformierte $\tilde{X} = V(w^2 - x^2v^2)$ von $X = V(z^2 - x^2y^2)$; letztere entsteht durch Einsetzen von $z = xw$ und $y = xv$ in $z^2 - x^2y^2$ gefolgt vom Ausklammern des exzeptionellen Divisors: $(xw)^2 - x^2(xv)^2 = x^2 \cdot (w^2 - x^2v^2)$. Auf den ersten Blick hat sich im Vergleich zu Abbildung 11 nicht viel verändert;

Dimensionen selbst von recht komplizierter Struktur; genauer gesagt wird sie mit Hilfe einer Induktion über die Dimension des umgebenden Raumes konstruiert. Dazu wird für die gegebene Varietät X , die in eine n -dimensionale glatte Varietät W eingebettet ist, zuerst der Ort des maximalen Wertes einer größeren Invariante bestimmt, die ein Maß dafür darstellt, ob eine Singularität vorliegt und wenn ja wie ‚schlimm‘ sie ungefähr ist. Im Fall einer Hyperfläche $V(f)$ ist das die Ordnung $ord_x(f)$ im Punkt x (gegeben durch die Taylorentwicklung). Im Beispiel von Abbildung 11 ist die Ordnung in den singulären Punkten 2, sonst 1. Dieser Ort wird dann erneut verfeinert mit einer weiteren Invariante, die das Schnittverhalten mit gewissen exzeptionellen Divisoren einbezieht und damit Daten über die bisher ausgeführten Aufblasungen. Zu Beginn des Auflösungsprozesses haben wir also im Hyperflächenfall als Anfangsteil der steuernden Invariante das Paar $(ord_x(f), 0)$.

Für den Induktionsschritt wird sodann eine sogenannte Hyperfläche H maximalen Kontaktes¹⁰ bestimmt, die nicht-singulär ist und den zuvor bestimmten Ort Z der Punkte des maximalen Wertes der Invariante enthält. Diese Hyperfläche $W_{\text{neu}} = H$ dient als glatte Varietät der Dimension $n - 1$, in die dann eine Varietät X_{neu} eingebettet ist, die geometrisch genau aus dem vorher bestimmten Ort Z besteht,

lediglich eine exzeptionelle Hyperfläche $V(x)$ (braun) ist hinzugekommen. Doch für die Wahl des nächsten Zentrums ist gerade diese Strukturinformation von essentieller Bedeutung: Wie man im linken Bild gut erkennt, ist es dadurch möglich die beiden Geraden zu unterscheiden, da eine der beiden nun eine exzeptionelle Kurve (wieder braun) darstellt. Als Zentrum wird jetzt die rote der beiden Geraden gewählt.

Zur Bestimmung der Invariante ist hier zu bemerken, dass das erste Paar sich in exakt derselben Weise ergibt, wie in Abbildung 11 beschrieben. Beim Abstieg in der Dimension wird für X_{neu} jedoch nur die Komponente berücksichtigt, die nicht exzeptioneller Divisor ist, d. h. $X_{\text{neu}} = V(y^2)$. Das ergibt die Ordnung 2 in jedem Punkt dieser Geraden; die Anzahl der exzeptionellen Divisoren, die einen Punkt der Geraden treffen, ist für alle Punkte Null – außer für den Koordinatenursprung, an dem der Wert 1 ist. Dies führt also zu Werten $(2, 0; 2, 1)$ für die Invariante im Koordinatenursprung sowie $(2, 0; 2, 0)$ in den anderen Punkten dieser Geraden. Streng nach der bisher erklärten Vorgehensweise, müsste also nochmals im Ursprung aufgeblasen werden, was aber aufgrund einer weiteren Verfeinerung der Invariante, deren Beschreibung hier zu weit führen würde, nicht geschieht.

aber mit der gesamten wesentlichen Strukturinformation der ursprünglichen Varietät X ausgestattet ist.¹¹ Der Invariantenvektor von X_{neu} , der induktiv konstruiert wird, ergibt zusammen mit dem bereits bestimmten Paar von Invarianten den Invariantenvektor von X . Hier ist zu beweisen, dass der Ort des maximalen Wertes des Invariantenvektors eine glatte Varietät ist und die bisherigen exzeptionellen Divisoren normal schneidet. Damit kann er als Zentrum für die nun folgende Aufblasung gewählt werden. Weiterhin muss man zeigen, dass nach der Aufblasung in diesem Zentrum der neue Invariantenvektor kleineren maximalen Wert hat. Das ist der schwere und umfangreiche Teil der Arbeit.

Am besten lässt sich diese Konstruktion an einem (einfachen) Beispiel erläutern: Abbildung 11 zeigt die ursprüngliche Varietät und die algorithmische Bestimmung des ersten Zentrums. Durch diese Aufblasung ergeben sich drei Karten, von denen man leicht nachrechnen kann, dass eine keine interessante Information enthält und jede der beiden anderen dieselbe Situation darstellt, die in Abbildung 12 gezeigt wird. Damit ergibt sich in jeder der beiden letzteren Karten als neues Zentrum eine Gerade. Aufblasen in dieser Geraden liefert dann jeweils bereits eine strenge Transformierte, die aus zwei glatten Flächen besteht, die sich in einer Geraden treffen (siehe Abbildung 13,

¹⁰ Die Existenz einer solchen Hyperfläche ist in Charakteristik 0 lokal stets erfüllt.

¹¹ Die Konstruktion dieser Varietät X_{neu} ist recht technisch. Für den interessierten Leser möchten wir sie daher nur in dem Fall beschreiben, in dem X eine Hyperfläche $V(f)$ ist, der umgebende glatte Raum ein K^n und keine exzeptionellen Divisoren vorhanden sind. Dann bezeichnen wir den maximalen Wert von $ord_x(f)$ mit d , die Hyperfläche maximalen Kontaktes mit H und definieren

$$\Delta^a(f) := \left\langle \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \mid |\alpha| \leq a \right\rangle.$$

In dieser Notation lässt sich das Ideal von X_{neu} in \mathcal{O}_H dann angeben als $\sum_{i=0}^{d-1} (\Delta^i(f)\mathcal{O}_H)^{\frac{d-i}{d}}$.

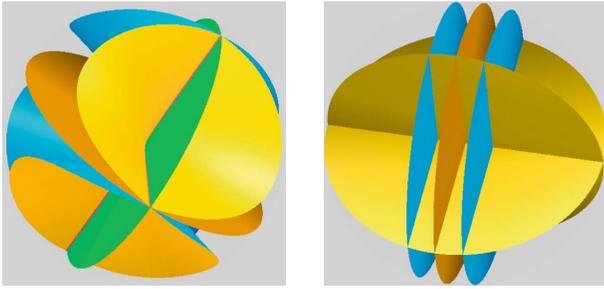


Abbildung 13. Analog zum Vorgehen in Abbildung 12 erhält man bei der Aufblasung in der roten Geraden $V(v, w)$ dann die strenge Transformierte $V(x)$ des alten exzeptionellen Divisors und die strenge Transformierte $V(a^2 - x^2)$ von $V(w^2 - x^2v^2)$ auf einer affinen Karte durch Einsetzen von $w = av$ und nachfolgendes Ausklammern des neuen exzeptionellen Divisors $V(v)$. Nach dieser zweiten Aufblasung besteht die strenge Transformierte (blau/gelb) aus zwei glatten Flächen, die sich in einer Geraden treffen (linkes Bild). Die exzeptionellen Hyperflächen sind hier wieder in Brauntönen eingezeichnet. Nach einer weiteren Aufblasung in der roten Geraden sind dann alle Singularitäten aufgelöst (rechtes Bild: strenge Transformierte in Blau, exzeptionelle Divisoren in Braun- und Ockertönen).

links). Eine weitere Aufblasung in dieser Geraden liefert dann das gewünschte Resultat (siehe Abbildung 13, rechts).

Insgesamt haben wir in dem obigen Beispiel nur einige der Karten exemplarisch betrachtet. Um das gesamte Vorgehen zu betrachten, eignet sich am besten die graphische Darstellung des Baumes der Karten und Aufblasungen Abbildung 14.

Bei der Implementierung der algorithmischen Auflösung von Singularitäten treten zwei weitere Probleme auf: Zum einen ist die Invariante – das Maß dafür, wie ‚schlecht‘ ein Punkt ist – nur lokal definiert, d. h. sie müsste theoretisch in jedem Punkt bestimmt werden. Zum anderen ist allein schon die kombinatorische Komplexität des Algorithmus extrem hoch, da die Zahl der Karten mit jeder Aufblasung wächst und eine Aufblasung in einem Zentrum, das im Durchschnitt mehrerer Karten liegt, natürlich auch in jeder dieser Karten durchgeführt werden muss. Es lässt sich jedoch zeigen, dass es möglich ist, den Ort maximalen Wertes der Invariante für eine gesamte affine Karte zu bestimmen. Darüberhinaus ist es möglich Kriterien zu bestimmen, welche Karten bei den weiteren Betrachtungen ignoriert werden können, da sie keine relevante Information enthalten, die nicht bereits in anderen Karten vorliegt.

¹² Die aktuellen Versionen der Implementation von G. Bodnar und J. Schicho (2000–2005) sind erhältlich unter <http://www.risc.uni-linz.ac.at/projects/basic/adjoints/blowup/>, die der Implementation der Autoren (2003–2005) unter <http://www.mathematik.uni-kl.de/~anne>.

Anwendungen

Alein die Einfachheit und Allgemeinheit der Aufgabenstellung und die bei näherer Betrachtung auftretenden tieferliegenden Schwierigkeiten bei der Untersuchung des Problems würden schon ausreichen, um die Auflösung von Singularitäten als interessantes Problem anzusehen. Doch die Desingularisierung ist auch ein sehr wichtiges theoretisches Werkzeug zur Untersuchung von Varietäten und ihren Singularitäten, d. h. in der Algebraischen Geometrie, der Singularitätentheorie und zahlreichen benachbarten Gebieten. So stellt der Satz über die Existenz einer Auflösung von Singularitäten sicher, dass es (in Charakteristik Null) stets eine singularitätenfreie Varietät gibt, die birational äquivalent ist zu einer gegebenen Varietät – es existiert also ein glattes Modell, mit dem man für viele Fragestellungen deutlich einfacher arbeiten kann. Darüberhinaus basieren viele Untersuchungsmethoden und Begriffsbildungen der Singularitätentheorie auf der Kenntnis einer Auflösung einer gegebenen Singularität. Um nur zwei Beispiele zu nennen, sei hier erwähnt, dass sich Puiseux Paare und charakteristische Exponenten, wichtige Invarianten ebener Kurvensingularitäten, mit Hilfe einer Auflösung bestimmen lassen.

Während die bisher genannten Anwendungen eher von theoretischer Natur waren, ermöglicht der algorithmische Zugang auch eine Implementierung und damit praktische Anwendungen der Auflösung von Singularitäten. Für den toroidalen Fall sind solche Implementationen bereits seit längerem bekannt und in Gebrauch; für den allgemeinen Fall galt es (aufgrund der Komplexität des Algorithmus) vor nicht einmal 10 Jahren noch als unmöglich, ein in der Praxis einsetzbares Programm zu erstellen. Mittlerweile existieren bereits mindestens zwei von einander unabhängige Implementationen¹², die tatsächlich auch eingesetzt werden. Damit ist der erste Schritt auf dem Weg zu Anwendungen außerhalb der reinen Mathematik genommen und es ergeben sich überraschende neue Einsatzgebiete, wie z. B. in der algebraischen Statistik, wo aktuelle Arbeiten Anwendungen in der Theorie der Bayeschen Netzwerke einführen. Hierbei wird ausgenutzt, dass naive Bayes Modelle zu höheren Sekantenvarietäten gewisser Segre-Varietäten in Korrespondenz stehen. Diese Sekantenvarietäten wiederum weisen Singularitäten auf, deren Untersuchung Aufschluss geben kann, wann die effektive Dimension des Bayeschen Netzwerkes den erwarteten Wert unterschreitet.

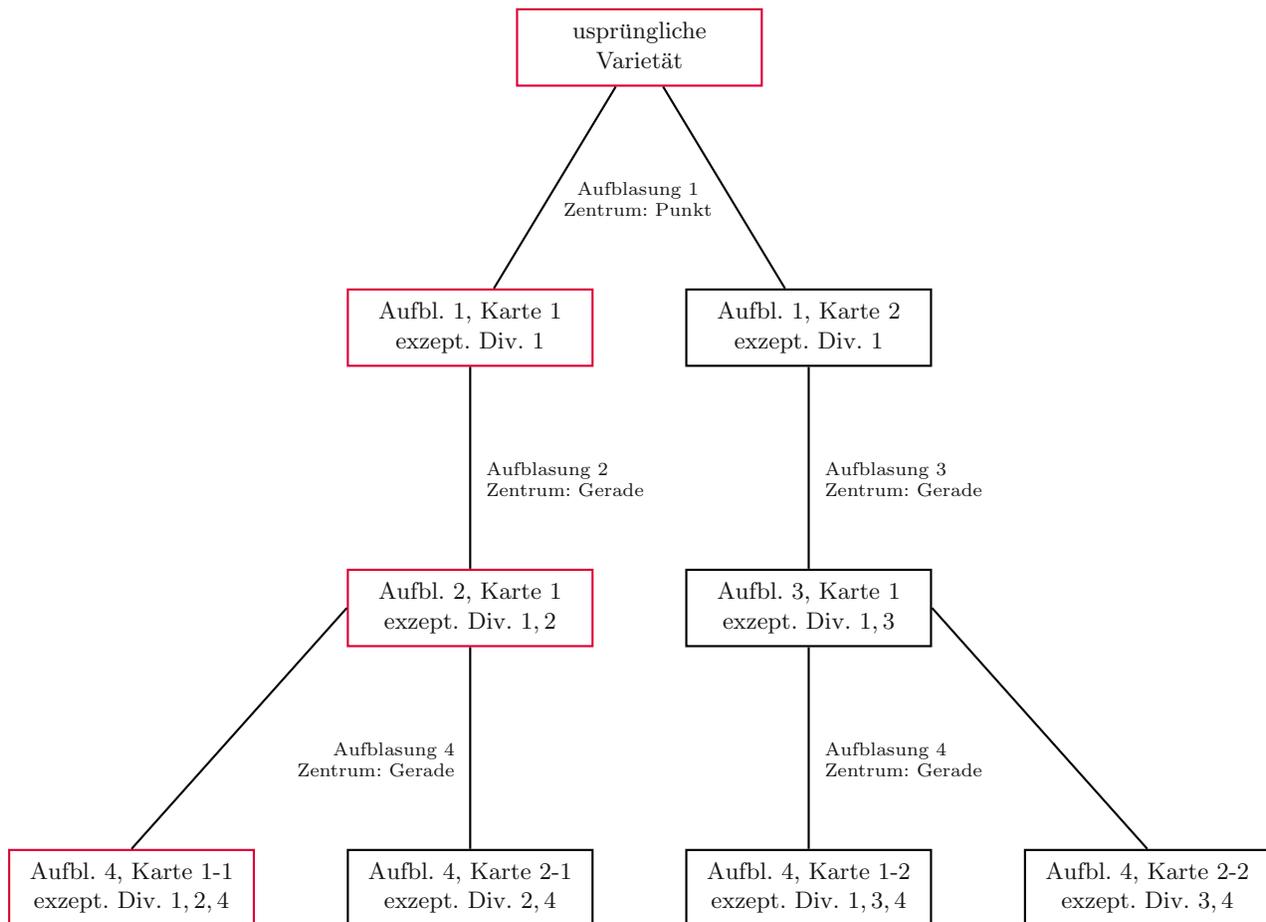


Abbildung 14. Im Baum der Karten und Aufblasungen für unser Beispiel sind die Karten in rot markiert, die in den Abbildungen 11 bis 13 dargestellt sind.

Adresse der Autoren

Dr. Anne Frühbis-Krüger
 Prof. Dr. Gerhard Pfister
 Fachbereich Mathematik
 Universität Kaiserslautern
 Postfach 3049
 67653 Kaiserslautern
 anne@mathematik.uni-kl.de
 pfister@mathematik.uni-kl.de

Anne Frühbis-Krüger, 1970 in Ludwigshafen geboren, hat in Kaiserslautern Mathematik und Physik studiert. 1996 Diplom in Mathematik, 2000 Promotion in Mathematik, seit 2001 wissenschaftliche Assistentin an der Universität Kaiserslautern, in diesem Jahr Habilitation.



Gerhard Pfister, 1947 in Thyrow geboren, hat an der Humboldt-Universität zu Berlin studiert und lehrt seit 1993 an der Universität Kaiserslautern. Er ist einer der Väter des Computeralgebra-Systems *Singular*.

