Einfache Beispiele für die Ermittlung der Messunsicherheit nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

(von B. Stabel, Techniker im Physikalischen Praktikum an der RPTU)

Diese Datei ist gehostet auf der Userseite von Bernd Stabel innerhalb der RPTU unter
`https://www-user.rhrk.uni-kl.de/~bstabel/Stabelsoins.pdf`
QR-Code:

Vereinfacht gilt:

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \dots}$$

- U ist die Meßgröße, ΔU ist die ermittelte Unsicherheit nach Fehlerfortpflanzung.
- Δx, Δy, Δz usw. sind die von Euch bestimmten Messunsicherheiten am Experiment.

Beispiel Fadenpendel

Berechnung von g

$$U \mathrel{\widehat{=}} g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2}$$

- Δl und ΔT sind die von Euch bestimmten Messunsicherheiten am Experiment.

Berechnung der partiellen Ableitungen

Partielle Ableitung nach l

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right) \\
&= \frac{\partial \left(4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2}\right)}{\partial l} \\
&= \frac{4\pi^2}{T^2}
\end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach T

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right) \\
&= \frac{\partial \left(4\pi^2 \cdot l \cdot T^{-2}\right)}{\partial T} \\
&= 4\pi^2 \cdot l \cdot (-2) \cdot T^{-3} \\
&= -\frac{8\pi^2 \cdot l}{T^3}
\end{aligned}$$

Einsetzen in Grundformel

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 \cdot l}{T^3} \cdot \Delta T\right)^2} \\
&= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sqrt{(\Delta l)^2 + \left(\frac{2l}{T}\right)^2 \cdot (\Delta T)^2}
\end{aligned}$$

Beispiel kinetische Energie

Berechnung von W_{kin}

$$\begin{aligned} U \mathrel{\widehat{=}} W_{kin} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{s^2}{t^2} \end{aligned}$$

- Δm, Δs und Δt sind die von Euch bestimmten Messunsicherheiten am Experiment.

Berechnung der partiellen Ableitungen

Partielle Ableitung nach m

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial m}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{t^2} \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach s

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial s}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot \frac{s}{t^2} \\ &= \frac{m \cdot s}{t^2} \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach t

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) &= \left(\frac{\partial W_{kin}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-2) \cdot \frac{s^2}{t^3} \\ &= -\frac{m \cdot s^2}{t^3} \end{aligned}$$

Einsetzen in Grundformel

$$\Delta W_{kin} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{t^2} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{m \cdot s}{t^2} \cdot \Delta s\right)^2 + \left(-\frac{m \cdot s^2}{t^3} \cdot \Delta t\right)^2}$$

$$= \frac{s}{t^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot s \cdot \Delta m\right)^2 + (m \cdot \Delta s)^2 + \left(-\frac{m \cdot s}{t} \cdot \Delta t\right)^2}$$